

М.А.Рувінський

Про правило додавання ймовірностей у квантовій механіці

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул.Шевченка, 57, м.Івано-Франківськ, 76000, Україна, bruvinsky@gmail.com*

Показано, що "інтерференцію ймовірностей" у квантовій механіці можна пояснити на основі класичної теореми теорії ймовірностей про ймовірність додавання подій, пов'язаних з двома різними і сумісними типами рухів, що випливають з корпускулярно-хвильового дуалізму мікросвіту.

Ключові слова: теорія ймовірностей, дифракція електронів на щілинах, ймовірність суми подій, квантова механіка.

Стаття поступила до редакції 10.11.2005; прийнята до друку 15.12.2005.

Вступ

Прийнято вважати, що класична теорія ймовірностей не може пояснити "інтерференцію ймовірностей" в квантовій механіці, яку яскраво ілюструють на прикладі ідеалізованого досліду з дифракції електронів на двох щілинах [1-4]. В [2], напр., підкреслено, що квантово-механічне означення густини ймовірності відрізняється від статистичного; в [3] визначено новий, квантово-механічний, закон додавання ймовірностей, який містить, на відміну від класичного закону, інтерференційний доданок. Звичайно, наявність інтерференційних ефектів при відсутності впливу процесів вимірювання є добре підтвердженим експериментальним фактом. Однак викликає подив, що центральне математичне поняття теорії ймовірностей виявляється непридатним для опису інтерферуючих альтернативних подій [1]. Можливо,

справа полягає у неадекватному визначенні квантових подій без урахування корпускулярно-хвильового дуалізму мікросвіту [5] при застосуванні теореми про ймовірність додавання [1] відповідних подій. Покажемо, що при правильному виборі подій інтерференція ймовірностей не суперечить згаданій класичній теоремі теорії ймовірностей.

I. Звичайний аналіз дифракції електронів на двох щілинах

Розглянемо схему дифракції електронів на двох щілинах (рис. 1). В точці А розташовано джерело електронів S, 1 і 2 – дві щілини на екрані В, детектор реєструє електрони в довільній тоці x на екрані С. Густина ймовірності $w(x)$ попадання електронів в точку x представлена як функція положення детектора x (рис. 2) при різних варіантах досліду: а)

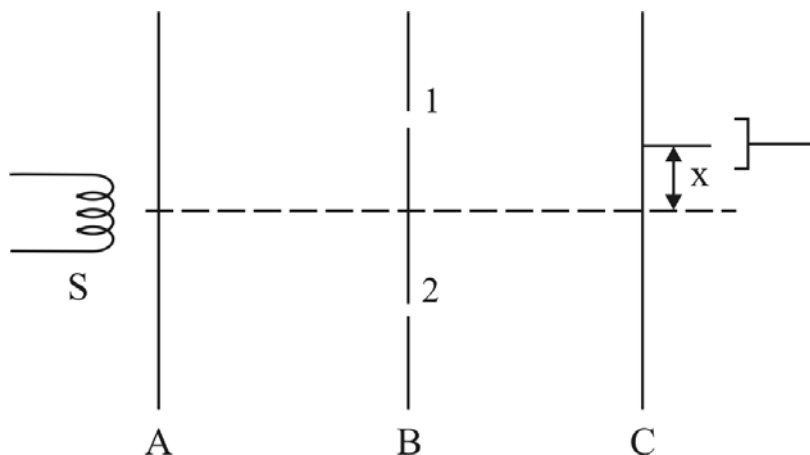


Рис. 1. Схема досліду з дифракції електронів на двох щілинах ("інтерференція ймовірностей")

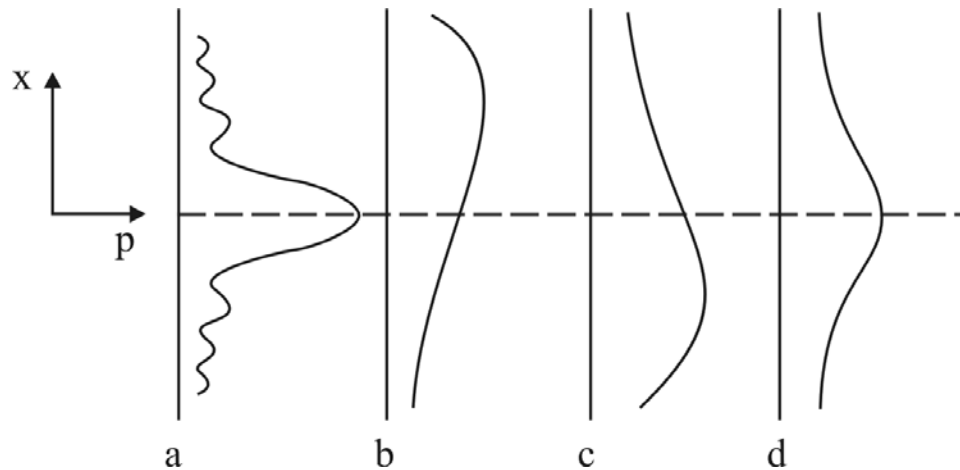


Рис. 2. Результати дослідження дифракції від двох щілин

результат експерименту з двома одночасно відкритими щілинами; б) відкрита тільки щілина 1; с) відкрита тільки щілина 2; д) $d = b + c$, якщо відкриті обидві щілини, і кожен електрон пройшов би тільки через одну щілину з двох. Це суттєво відрізняється від кривої а), яку ми отримаємо в дійсності. Результат а) є повністю аналогічним експерименту з інтерференцією хвиль між щілинами. При цьому припускаємо [5], що щілини є достатньо вузькими порівняно з відстанню між ними, так що можна знехтувати інтерференційними ефектами дифрагованих хвиль від різних частин однієї і тієї ж щілини, тобто ефектами скінченної ширини окремих щілин. Позначимо через A_i подію попадання електрона в точку x , якщо він пройшов через отвір i ; $w(A_i)$ – відповідна густина ймовірності, $i=1,2$. $w(A_1+A_2)$ – густина ймовірності попадання електрона в точку x при одночасно відкритих щілинах 1 і 2, тобто густина ймовірності додавання подій A_1 і A_2 . Згідно з класичною теоремою теорії ймовірностей [6]

$$w(A_1 + A_2) = w(A_1) + w(A_2) - w(A_1 A_2), \quad (1)$$

де $w(A_1 A_2)$ – густина ймовірності при одночасному проходженні електрона через обидві щілини. Оскільки остання подія $A_1 A_2$ є неможливою

$$w(A_1 A_2) = 0, \quad (2)$$

із (2) і (1) маємо, що

$$w(A_1 + A_2) = w(A_1) + w(A_2). \quad (3)$$

При цьому повинна була б спостерігатись картина $d = b + c$. Однак в дійсності отримаємо картину а) інтерференції ймовірностей, коли

$$w(A_1 + A_2) \neq w(A_1) + w(A_2). \quad (4)$$

Результат а) (або (4)) в квантовій механіці пов'язаний з принципом суперпозиції і трактуванням хвильових функцій Ψ_1 і Ψ_2 як амплітуд ймовірностей попадання в точку x при проходженні через отвори 1 і 2 відповідно. Замість класичного закону додавання ймовірностей (3) вводиться [1,3] закон додавання амплітуд

ймовірностей

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (5)$$

і квадрат модуля амплітуди Ψ визначає квантово-механічний закон додавання ймовірностей:

$$w = w_1 + w_2 + 2\sqrt{w_1 w_2} \cos \delta, \quad (6)$$

де δ – різниця фаз амплітуд ймовірностей. Доданок

$$w_{12} = 2\sqrt{w_1 w_2} \cos \delta \quad (7)$$

характеризує "інтерференцію ймовірностей".

II. Врахування двох типів руху при дифракції електронів на двох щілинах

Припустимо, що при проходженні електрона через кожну i -щілину при відкритих одночасно щілинах існують два різні і сумісні типи руху, пов'язані з подіями A_i і B_i відповідно. Подія A_i не залежить від того, чи відкрита інша щілина. Подія B_i відбувається тільки при відкритих обидвох щілинах і залежить від процесу спостереження при з'ясуванні через яку щілину пройшов електрон. Існування другого типу руху B_i пов'язано з існуванням у електрона суперпозиційного стану (5) і є проявом універсального корпускулярно-хвильового дуалізму мікросвіту. Досліди стверджують, що електрон не може одночасно пройти через обидві щілини. Отже, при врахуванні двох типів руху, замість (3), густина ймовірності попадання в точку x екрана визначається виразом:

$$w(A_1 + B_1 + A_2 + B_2) = w(A_1 + B_1) + w(A_2 + B_2) \quad (8)$$

При цьому [6]

$$w(A_i + B_i) = w(A_i) + w(B_i) - w(A_i B_i), \quad (9)$$

де $w(A_i B_i)$ – густина ймовірності попадання в точку x екрана при суміщенні двох типів руху і проходженні через i -щілину ($i=1,2$). При одночасно відкритих щілинах $w(B_i) \neq 0$ і $w(A_i B_i) \neq 0$. Крім того, в нашій ідеалізованій моделі відповідні густини ймовірностей $w(B_i)$ і $w(A_i B_i)$ не

залежать від номера і щілини:

$$w(B_i) = w(B), w(A_i B_i) = w(AB). \quad (10)$$

Враховуючи (9) і (10) в (8), отримаємо, що

$$w(A_1 + B_1 + A_2 + B_2) = w(A_1) + w(A_2) + 2[w(B) - w(AB)]. \quad (11)$$

Вирази (8), (11) можна знайти також, використовуючи загальну формулу [6] для

імовірності суми довільного числа подій

$$w\left(\sum_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n w(C_i) - \sum_{i < j} w(C_i C_j) + \sum_{i < j < k} w(C_i C_j C_k) - \dots + (-1)^{n-1} w(C_1 \dots C_n), \quad (12)$$

при $n = 4$, $C_1 = A_1$, $C_2 = B_1$, $C_3 = A_2$, $C_4 = B_2$, неможливості одночасного проходження електрона через обидві щілини (напр., $w(A_1 A_2) = 0$, $w(A_1 B_2) = 0$, $w(B_1 B_2) = 0$ і т.д.) і умові (10).

Відношення

$$\frac{|w(B) - w(AB)|}{w(B) + w(AB)} \leq 1. \quad (13)$$

При відкритих одночасно щілинах

$$w(B) + w(AB) > 0. \quad (14)$$

При закритті однієї з щілин, коли $w(A_1) = 0$ або $w(A_2) = 0$,

$$\begin{aligned} w(B) + w(AB) &= 0, \\ w(B) &= 0, w(AB) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Внаслідок цього, а також з міркувань розмірності густини імовірності, можна покласти, що

$$w(B) + w(AB) = \sqrt{w(A_1)w(A_2)}. \quad (16)$$

З (13) випливає можливість представлення:

$$\frac{w(B) - w(AB)}{w(B) + w(AB)} = \cos \delta. \quad (17)$$

Враховуючи (16), (17) і (11) маємо для густини імовірності попадання електрона в точку екрана при наявності двох сумісних типів руху вираз

$$w = w(A_1) + w(A_2) + 2\sqrt{w(A_1)w(A_2)} \cos \delta, \quad (18)$$

який співпадає з квантово-механічним законом (6) додавання ймовірностей. При усередненні δ в процесі спостереження за електроном "інтерференція ймовірностей" зникає, як і при закритті однієї з щілин (коли $w(A_1) = 0$ або $w(A_2) = 0$).

III. Дифракція на одній щілині при врахуванні двох типів руху електрона

Якщо щілина є достатньо широкою, то як відомо [7-9], існують інтерференційні ефекти, зумовлені дифрагованими хвилями від різних частин однієї і тієї ж щілини. Покажемо, що при врахуванні двох різних і сумісних типів руху електрона при скінченній ширині щілини класична теорема для імовірності суми двох подій A і B,

пов'язаних з двома типами руху, в принципі допускає можливість дифракційної картини від однієї щілини. Припускаємо, що подія A є можливою при довільній ширині щілини, а подія B істотно визначається скінченною шириною щілини. Густина імовірності попадання електрона в точку на екрані

$$w(A + B) = w(A) + w(B) - w(AB). \quad (19)$$

При достатньо великій ширині щілини порівняно з довжиною хвилі де Бройля і при відсутності впливу спостереження згідно [6]

$$w(AB) = w(A)P(B/A) \approx w(A), \quad (20)$$

де $P(B/A)$ – відносна імовірність події B при умові, що подія A відбулася (в цьому випадку $P(B/A) \approx 1$). Тоді $w(A + B) \approx w(B)$, і механізм руху B в принципі забезпечує появу дифракційної картини [7] (рис. 3, а). В протилежному граничному випадку достатньо вузької щілини (або втручання процесу спостереження за рухом електрона)

$$w(AB) = w(B)P(A/B) \approx w(B), \quad (21)$$

де $P(A/B)$ – відносна імовірність події A при умові, що подія B відбулася. При $P(A/B) \approx 1$ $w(A + B) \approx w(A)$, і механізм руху A забезпечує

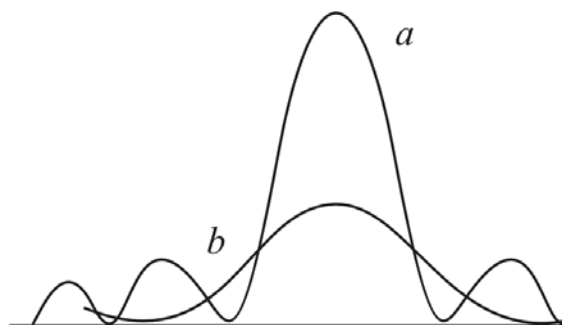


Рис. 3. Дифракція на одній щілині:
a – $w \approx w(B)$ (широка щілина),
b – $w \approx w(A)$ (вузька щілина).

втрату або розмиття дифракційної картини (рис. 3, б). Конкретні розрахунки, зрозуміло, в компетенції квантової механіки, яка автоматично враховує корпускулярно-хвильовий дуалізм мікросвіту на відміну від математичної теорії ймовірностей.

Висновки

При правильному визначенні подій, пов'язаних з дійсним рухом мікрочастинок, класична теорія ймовірностей не суперечить квантовим уявленням про інтерференцію ймовірностей, а узгоджується з

ними.

Рувінський М.А. – д.ф.-м.н., професор кафедри фізики і хімії твердого тіла.

- [1] Р. Фейнман, А. Хібс. *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. Мир. М. 382с. (1968).
- [2] І.Р. Юхновський. *Основи квантової механіки*. Либідь. Київ. 390с. (2002).
- [3] І.О. Вакарчук. *Квантова механіка*. ЛНУ. Львів. 784с. (2004).
- [4] М.А. Рувінський, Б.К. Остафійчук, М.О.Галушак, Д.М.Фреїк, М.М.Яцура. *Курс загальної фізики. Квантова фізика атомів, молекул і конденсованих середовищ*. ПУ. Київ–Івано-Франківськ. 520с. (1998).
- [5] Д. Бом. *Квантовая теория*. Наука. М. 727с. (1965).
- [6] А.А. Боровков. *Курс теории вероятностей*. Наука. М. 287с. (1972).
- [7] Л.И. Мандельштам. *Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике*. Наука. М. 438с. (1972).
- [8] Г.С. Ландсберг. *Оптика*. ГИТТЛ. М. 759с. (1957).
- [9] Б.К. Остафійчук, М.А. Рувінський, М.М. Яцура. *Курс загальної фізики. Оптика: хвилі, промені, кванти*. Гостинець. Івано-Франківськ. 648с. (2003).

М.А. Ruvinskii

About the Addition Rule of Probabilities in Quantum Mechanics

*'Vasyl Stefanyk' Precarpathian National University,
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine, bruvinsky@gmail.com*

As shown, the interference of probabilities in quantum mechanics may be explained on the basis of classical theorem of the probability theory about the addition probability of events related with two different and compatible typies of motions those follow from the wave-particle dualism of microcosm.