

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему: “Комбінаторика мультимножин у позакласній роботі з математики”

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
Романів М.З.

Керівник: доктор фізико-математичних наук,
професор Заторський Р. А.

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	2
1 МУЛЬТИМНОЖИНИ ТА СНОВНІ ПОНЯТТЯ , ЩО З НИМИ ПОВ'ЯЗАНІ	3
2 ТРИ ПРИНЦИПИ КОМБІНАТОРИКИ	8
2.1 <i>Принцип рівності</i>	8
2.2 <i>Принцип суми</i>	8
2.3 <i>Принцип добутку</i>	9
3 ДЕЯКІ БАЗОВІ ЗАДАЧІ НА МУЛЬТИМНОЖИНАХ	11
4 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ НА МУЛЬТИМНОЖИНАХ	18
4.1 <i>Методика розв'язування комбінаторних задач на мультимножинах</i>	18
4.2 <i>Комбінаторні методи розв'язування задач</i>	21
4.3 <i>Приклад реалізації кваново-мультимножинної технології</i>	25
4.4 <i>Застосування мультимножинних функцій у біоінформатиці</i>	28
5 СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО КОМБІНАТОРИЦІ МУЛЬТИМНОЖИН	32
ВИСНОВКИ	34
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	35

ВСТУП

На практиці великий інтерес викликають задачі, у яких досліджуються сукупності об'єктів, серед яких можуть бути і однакові. Проте у цих випадках поняттям множини користуватися не зручно, або й зовсім неможливо. Тому у 50-х роках минулого сторіччя було введено поняття мультимножини та інтенсивно досліджувалися її властивості. У шкільному курсі математики практично не зустрічаються задачі пов'язані з мультимножинами. Винятком є лише задачі про перестановки елементів мультимножини та задачі про сполучення повтореннями. Варто відзначити, що комбінаторний аналіз є добре розвиненою галуззю математики і у ньому вже виділено основні принципи, за допомогою яких можна розв'язати багато задач комбінаторного змісту. І варто будувати комбінаторику шкільного курсу математики на цих основних принципах, які значно спрощують розв'язання основних класичних комбінаторних задач на множинах та мультимножинах. Проте, у діючих підручниках ця ідея хоча й використовується, але не в повній мірі. Так, про принцип рівності не згадується у жодному зі шкільних підручників. Така ж доля стосується і важливого принципу включення-виключення.

Метою магістерської роботи є усунення недоліків та заповнення прогалин при вивченні комбінаторики, підготовка практичних і теоретичних матеріалів, які могли б бути використані вчителем у позакласній роботі, зокрема при гуртковій роботі та підготовці учнів до олімпіад і конкурсів різного рівня.

1 МУЛЬТИМНОЖИНИ ТА ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ЩО З НИМИ ПОВ'ЯЗАНІ

Означення 1.1. Мультимножиною A називають довільний неупорядкований набір елементів деякої множини $[A]$. Множину $[A]$ називають *базою (базисом) мультимножини A* .

Якщо мультимножина A складається із k_1 елементів a_1 , k_2 елементів $a_2, \dots, k_n$ елементів a_n , то її записують у канонічному вигляді:

$$A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}. \quad (1.1)$$

Кратності $k_i, i = 1, 2, \dots$ входження елемента a_i до мультимножини A називатимемо *степенями елементів a_i* .

Число всіх елементів мультимножини A називають її потужністю і позначають через $|A|$. Потужність мультимножини (1.1), очевидно, дорівнює

$$|A| = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Мультимножину

$$A' = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \dots, m^{\lambda_m}\}$$

будемо називати *похідною мультимножиною* мультимножини (1.1). Тут $\{1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \dots, m^{\lambda_m}\}$ — канонічний вигляд мультимножини A' , і

$$|A| = 1 \cdot \lambda_1 + 2 \cdot \lambda_2 + \dots + m \lambda_m, \\ m = \max(k_i).$$

Оскільки елементи мультимножини неупорядковані, то, без обмеження загальності, можна вважати, що показники її елементів задовольняють нерівності

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n. \quad (1.2)$$

Якщо $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, то мультимножина (1.1) є звичайною множиною.

На мультимножинах вводять операції, аналогічні до операцій на множинах [2]. При цьому всі позначення, введені для операцій над множинами, зберігають і для аналогічних операцій над мультимножинами. Якщо в мультимножині деякий елемент базової множини відсутній, то вважають, що його кратність в цій мультимножині дорівнює нулю. Виконання нерівності (1.2) при операціях над мультимножинами, не вимагається.

Розглянемо основні операції над мультимножинами [2].

Нехай $k_A(a)$ – число елементів a , що належать мультимножині A .

Мультимножину B називають підмультимножиною мультимножини A , якщо виконується включення $[B] \subseteq [A]$, причому для довільного елемента $a \in [B]$ виконується нерівність

$$k_B(a) \leq k_A(a).$$

Якщо потужність підмультимножини деякої мультимножини дорівнює m , то таку підмультимножину називатимемо m -підмультимножиною цієї мультимножини.

Об'єднанням, перетином, сумою мультимножин A і B називають відповідно таку мультимножину $C = A \cup B$, $C = A \cap B$, $C = A + B$ із базою $[C] = [A] \cup [B]$ що для довільного елемента $a \in [C]$ виконуються відповідно рівності

$$k_C(a) = \max(k_A(a), k_B(a)),$$

$$k_C(a) = \min(k_A(a), k_B(a)),$$

$$k_C(a) = k_A(a) + k_B(a).$$

Відзначимо, що операція суми мультимножин не має аналогу серед операцій над множинами.

Різницею мультимножин A і B називають таку мультимножину $C = A - B$, що для довільного елемента a множини $[A] \cup [B]$ виконується рівність $k_C(a) = \max(k_A(a) - k_B(a), 0)$.

Легко довести, що для довільних мультимножин A_1 і A_2 виконується рівність

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 + A_2) - A_1 \cap A_2.$$

Узагальнюючи цю рівність, за допомогою індукції можна довести

Твердження 1. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – довільні мультимножини. Тоді справедлива рівність

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \bigcap_{j=1}^r A_{i_j} \quad (1.3)$$

Оскільки множини є частинним випадком мультимножин, то для них мала б виконуватися аналогічна рівність. Але для множин операція суми не коректна. Тому множини нормують при допомозі поняття потужності і записують аналогічну рівність у вигляді, що виражає відомий комбінаторний принцип включення-виключення

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |\bigcap_{j=1}^r A_{i_j}| \quad (1.4)$$

Аналогічна рівність, із зрозумілих причин, також зустрічається у теорії ймовірностей. Нехай Ω – множина елементів ω , які називають елементарними подіями, 2^Ω – булеан множини Ω ;

$$A_i \in 2^\Omega, i = 1, \dots, n$$

– випадкові події. Кожній події A поставимо у відповідність дійсне число $p(A)$, яке називають ймовірністю події A , $p(\Omega) = 1$. Тоді справедлива рівність

$$p(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} p(\cap_{j=1}^r A_{i_j}) \quad (1.5)$$

Розглянемо приклади мультимножин. Відомо, що важливими прикладами мультимножин є різноманітні розбиття.

Означення 1.2. Під m -розбиттям елемента ω , що належить множині Ω , на якій визначена асоціативна операція $\oplus$, назовемо мультимножину $(\omega, \oplus) = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $\omega_i \in \Omega$, елементи якої задовольняють рівність

$$\omega = \omega_1 \oplus \omega_2 \oplus \dots \oplus \omega_m. \quad (1.6)$$

Якщо мультимножина (ω, θ) впорядкована так, що порядок її елементів збігається з порядком цих елементів у рівності (1.6), то таке m -розбиття називають впорядкованим розбиттям елемента ω .

Позначимо множини всіх m -розбиттів та всіх впорядкованих m -розбиттів об'єкта ω відповідно через $P_\omega(\omega, \oplus)$ і $\tilde{P}_\omega(\omega, \oplus)$.

Наведемо приклади деяких розбиттів.

Приклад 1.1. Якщо $\Omega = N_0$ і $\oplus$ — операція додавання, то $P_m(n, +)$ і $\tilde{P}_m(n, +)$ - відповідно множини так званих неупорядкованих і впорядкованих m -розбиттів натурального числа n .

Означення 1.3. m -розбиття $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ деякого числа k назвемо підрозбиттям m -розбиття $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ числа n , $k \leq n$, якщо виконуються нерівності $0 \leq \mu_i \leq \lambda_i$, $i = 1, \dots, m$.

Впорядковані розбиття натуральних чисел іноді називають композиціями.

Приклад 1.2. Якщо $\Omega = N$ і $\oplus$ – операція множення, то $P_m(n, \times)$ і $\tilde{P}_m(n, \times)$ є множинами розкладів натурального числа n на m натуральних множників врахування чи із врахуванням порядку множників відповідно.

Приклад 1.3. Якщо Ω є скінченною множиною X потужності n і $\oplus$ – операція об'єднання множин, то $P_m(n, \times)$ і $\tilde{P}_m(n, \times)$, де $m \leq n$, - це множини так званих неупорядкованих і упорядкованих m -розбиттів множини X .

2 ТРИ ПРИНЦИПИ КОМБІНАТОРИКИ

2.1 Принцип рівності

Перш за все пригадаємо, що дві множини називають еквівалентними, якщо між їхніми елементами існує бієкція, тобто взаємно однозначна відповідність. Отже, принцип рівності полягає в тому, що якщо потрібно обчислити потужність деякої множини, але перелічувати елементи цієї множини не зручно, то вишукують нову, еквівалентну до даної множини множину, елементи якої перелічити легше. Формалізація цього принципу виглядає так:

$$(A \sim B) \Rightarrow (|A| = |B|) \quad (2.1)$$

Використання цього принципу вимагає певної винахідливості. Проілюструємо використання принципу рівності на наступному прикладі.

Приклад 2.1. Нехай потрібно полічити потужність множини всіх підмножин множини $\{a, b, c\}$. Поставимо кожній підмножині цієї множини у відповідність кортеж (α, β, γ) де компоненти цього кортежу приймають лише два значення 0 або 1: Причому компонента дорівнює одиниці лише тоді, коли відповідний елемент заданої множини належить цій підмножині. Отже, підмножині $\{a, b\}$ відповідатиме кортеж $(1, 1, 0)$ підмножині $\{a, b, c\}$ – кортеж $(0, 0, 1)$ порожній підмножині – кортеж $(0, 0, 0)$ і т.д.

З іншої сторони: кортежу $(1, 1, 1)$ відповідатиме сама множина $\{a, b, c\}$ а кортежу $(1, 0, 1)$ – підмножина $\{a, c\}$: Виявляється, що кортежі легше перелічити ніж підмножини.

2.2 Принцип суми.

Якщо множину X можна розбити в об'єднання двох підмножин множин A і B без спільних елементів, то

$$|X| = |A| + |B| \quad (2.2)$$

Або формально:

$$(X = A \cup B) \cap (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (|X| = |A| + |B|). \quad (2.3)$$

Примітка 2.1. Вище принцип суми сформульовано на випадок двох множин, але його легко перефразувати на випадок більшого числа множин.

Приклад 2.2. Полічимо число слів довжини 4 з алфавітом $\{a, b\}$ у яких буква a зустрічається принаймні три рази. Позначимо множину таких слів через X та розіб'ємо цю множину на дві підмножини: множину A слів у яких буква a зустрічається рівно три рази і множину B слів з чотирма буквами a : Очевидно, що $|A| = 4$; і $|B| = 1$, тому за правилом суми маємо

$$|X| = |A| + |B| = 4 + 1 = 5.$$

2.3 Принцип добутку.

Якщо потрібно виконати послідовність двох операцій, причому першу операцію можна виконати m способами, а другу – n способами, то послідовність цих операцій можна виконати $m \Delta n$ способами.

Цей принцип можна сформулювати ще й так: якщо

$$X = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}, \quad (2.4)$$

причому $|A| = m$, $|B| = n$, то $|X| = m \Delta n$. Остаточна формалізація принципу добутку виглядає так:

$$|A \times B| = |A| \Delta |B|. \quad (2.5)$$

Примітка 2.2. Принцип добутку також легко перефразувати на випадок більшого числа множин

Приклад 2.4. Полічимо число різних чотирицифрових автомобільних номерів, що містять принаймні три однакові цифри. Перш за все відзначимо, що автомобільні номери можуть починатися нулями. Позначимо множину всіх автомобільних номерів, що мають зазначені властивості через X . Цю множину можна розбити на дві множини: множину A автомобільних номерів, що мають лише три однакові цифри і множину B автомобільних номерів, що мають чотири однакові цифри. Очевидно, що множини A і B не перетинаються, тому за принципом суми маємо:

$$|X| = |A| + |B| = 4 \cdot 9 \cdot 10 + 10.$$

Полічимо потужність множини A . Можливі такі чотири різні набори автомобільних номерів у яких рівно три однакові цифри:

aaab

aaba

abaa

baaa

тут a і b – цифри десяткової системи числення. Кожен такий набір на основі принципу добутку може бути заповнений $10 \cdot 9$ способами, тому $|A| = 4 \cdot 10 \cdot 9$ способами. Заповнити чотирицифрові автомобільні номери чотирма однаковими цифрами можна лише одним набором – *aaaa*, тому $|B| = 10$. Таким чином,

$$|X| = 4 \cdot 10 \cdot 9 + 10.$$

3 ДЕЯКІ БАЗОВІ ЗАДАЧІ НА МУЛЬТИМНОЖИНАХ

У цьому пункті розглянемо деякі базові комбінаторні задачі та алгоритми на мультимножинах, які можуть розглядатися у шкільному курсі математики на позаурочних заняттях.

Твердження 4.1. Число всіх підмультимножин мультимножини (1.1) дорівнює $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$.

Доведення. Доведення цього твердження можна провести методом заповнення комірок.

Розглядаємо n комірок. У i -ту комірку будемо записувати число елементів $a_i, i = 1, 2, \dots, n$, які належать до підмультимножини мультимножини (1.1). Очевидно, що ця комірка може бути заповнена $(k_i + 1)$ способом. Тому за комбінаторним принципом добутку число всіх підмультимножин мультимножини (1.1) дорівнює $\prod_{i=1}^n (k_i + 1)$.

Твердження 4.2. Число всіх упорядкувань мультимножини (1.1) дорівнює

$$P(a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Доведення. Позначимо число всіх упорядкувань мультимножини A через $P(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Перенумеруємо елементи цієї мультимножини, приєднуючи другий індекс так, щоб для елемента a_{ij} перший індекс вказував його номер у базовій множині $[A]$ мультимножини A , а другий – його номер серед k_i однакових елементів a_i . Тоді всі елементи з A стають різними, а отже вона містить $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ елементів, то після такого пере нумерування число її упорядкувань дорівнює $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$.

Зафіксуємо індекс i і вилучимо в елементах a_{ij} перенумерованої мультимножини другий індекс.

Тоді серед цих $(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!$ упорядкувань виявиться по $k_i!$ однакових, які можна “склеїти” в одне. Оскільки для різних i вилучення другого індекса можна робити незалежно, то після вилучення усіх других індексів отримуємо по $k_1!k_2!\dots k_n!$ однакових упорядкувань початкової мультимножини A .

Твердження 4.3. Потужність множини всіх m -підмультимножин мультимножини $A = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_n^{k_n}\}$, де $m \leq k$, дорівнює

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{n^m}{m!}.$$

Примітка 4.1. Якщо у твердженні 4.3 поставити $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, то число m -підмножин дорівнює $\frac{n^m}{m!}$.

Примітка 4.2. Бієкція (6), по суті, є бієкцією між множиною цілих невід’ємних розв’язків рівняння $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$ та множиною $(0,1)$ -кортежів довжини $n+m-1$, до складу кожного з яких входить m одиниць, тому число цілих невід’ємних розв’язків цього рівняння також дорівнює m .

Наведемо алгоритм обчислення числа m -сполучень (m -підмультимножин) мультимножини (1.1). Цей алгоритм побудований методом генератрис в роботі [2].

Алгоритм 4.1.

$$A = \{a_1 k^1, a_2 k^2, \dots, a_n k^n\}.$$

Обчислимо $St(A)$.

Алгоритм формуємо у вигляді таблиці елементів $A(i, j)$, де i – номер рядка, а j – номер стовпця таблиці. Елементи невід’ємних стовпців називатимемо значущими елементами.

1. $s := 0, i := 1, j := 0$;
2. Задаємо значущий елемент першого рядка: $A(i, j) := 1$;
3. Поки $i < n + 1$ переходити до п.4, у інакшому випадку видати результат $Cm(A) = A(i, m)$ та зупинити роботу.
4. Допишуємо зліва та справа значущих елементів i -того рядка по k^i нулів: для j від $-k^i$ до -1 виконати $A(i, j) := 0$; для j від $s + 1$ до $s + k^i$ виконати $A(i, j) := 0$; Σp
5. Знаходимо значущі елементи $(i + 1)$ -го рядка: для p від 0 до $s + k^i$ виконати $A(i + 1, p) := j = -k^i + pA(i, j)$;
6. $s := s + k^i : i := i + 1$ та перейти до п.3;

Реалізуємо даний алгоритму середовищі Maple для мультимножини $A = \{a_1^3, a_2^2, a_3^2\}$. Знайдемо число всіх 5-підмультимножин цієї мультимножини, тобто знайдемо $C5(A)$.

```
restart:
n :=3:
m:=5:
k[1] :=3:
k[2] :=2:
k[3] :=2:
s :=0:
i :=1:
j :=0:
A[i,j] :=1:
while i<n+1 do
  for j from -k[i] to -1 do
    A[i,j]:=0
  end do:
  for j from s+1 to s+k[i] do
    A[i,j]:=0
  end do:
  for p from 0 to s+k[i] do
    A[i+1,p]:=0:
    for j from -k[i]+p to p do
```

```

        A[i+1,p]:=A[i+1,p]+A[i,j]
    end do
end do:
s :=s+k[i]:
i :=i+1
end do:
A[i,m]

```

Проілюструємо цей алгоритм у вигляді таблиці 3.

Попри те, що у комбінаторному аналізі, при можливості, всі формули стараються виразити через біноміальні коефіцієнти, ми схильні вважати, що факторіальні степені, у багатьох випадках, є більш зручними та більш атомарними частками для побудови таких формул.

Приклад 4.1. Нехай задана мультимножина $A = \{a_1^3, a_2^2, a_3^2\}$, тоді, користуючись, описаним вище алгоритмом, отримаємо таблицю:

			C0(A)	C1(A)	C2(A)	C3(A)	C4(A)	C5(A)	C6(A)	C7(A)
0	0	0	1	0	0	0				
	0	0	1	1	1	1	0	0		
	0	0	1	2	3	3	2	1	0	0
			1	3	6	8	8	6	3	1

Результати читаємо у останньому рядку таблиці: $C0(A) = 1$, $C1(A) = 3$, $C2(A) = 6$, $C3(A) = 8$, ...

Алгоритм 4.2.

1. Записуємо рядок із $k_1 + 1$ одиниць, що є числами i -перестановок на i мультимножині $A = \{a_1^{k_1}\}$, $i = 0, \dots, k_1$. Цей рядок назвемо базовим.

2. Під базовим рядком будуємо таблицю, що містить $k_1 + 1$ стовпців $k_1 + k_2 + 1$ рядків.

Рядки таблиці нумеруємо згори до низу числами від 0 до $k_1 + k_2$.

3. У i -тий рядок таблиці записуємо перші $k_1 + 1$ елементів i -того рядка трикутника Паскаля (якщо i -тий рядок трикутника Паскаля містить менше, ніж $k_1 + 1$ елементів, то дописуємо потрібну кількість нулів).

4. У лівому нижньому куті таблиці замінюємо записані числа нулями так, щоб нулі утворили прямокутний рівнобедрений трикутник з катетом k_1 .

5. Обчислюємо суму добутків елементів i -того ($i = 0, \dots, k_1 + k_2$) рядка таблиці на відповідні елементи базового рядка. Отримане число перестановок дописуємо до i -того рядка справа.

6. Якщо кількість рядків останньої таблиці більша від потужності мультимножини, то обчислення закінчуємо і вважаємо результатом алгоритму стовпчик чисел, дописаний до таблиці справа. Інакше стовпчик чисел, дописаний до таблиці справа, транспонуємо, розглядаємо як базовий рядок нової таблиці та переходимо до п.2. При цьому параметри таблиці збільшуються на величину кратності наступного елемента мультимножини.

Таким чином, якщо мультимножина A має базу потужності n , то виконання алгоритму вимагає побудови $(n - 1)$ -ї таблиці.

Приклад 4.2. Знайдемо число всіх m -перестановок мультимножини $A = \{a_1^2, a_2^4, a_3^5\}$, $m = 0, 1, \dots, 11$.

З цією метою будуємо наступні таблиці:

	1	1	1	
0	1	0	0	1
1	1	1	0	2
2	1	2	1	4
3	1	3	3	7
4	1	4	6	11
5	0	5	10	15

6	0	0	15	15				
	1	2	4	7	11	15	15	
0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	3
2	1	2	1	0	0	0	0	9
3	1	3	3	1	0	0	0	26
4	1	4	6	4	1	0	0	72
5	1	5	10	10	5	1	0	191
6	0	6	15	20	15	6	1	482
7	0	0	21	35	35	21	7	1134
8	0	0	0	56	70	56	28	2422
9	0	0	0	0	126	126	34	4536
10	0	0	0	0	0	252	210	6930
11	0	0	0	0	0	0	462	6930

Таким чином,

$$P_0(A) = 1, \quad P_1(A) = 3, \quad P_2(A) = 9, \quad P_3(A) = 26, \quad P_4(A) = 72,$$

$$P_5(A) = 191, \quad P_6(A) = 482, \quad P_7(A) = 1134, \quad P_8(A) = 2422,$$

$$P_9(A) = 4536, \quad P_{10}(A) = 6930, \quad P_{11}(A) = 6930.$$

Наведений алгоритм ефективний для мультимножин порівняно великої потужності, але з невеликою базою. Наприклад, для обчислення числа 20-

перестановок на мультимножині $A = \{a_1^3, a_2^9, a_3^{31}\}$ даний алгоритм вимагає складання двох таблиць розмірів 4×13 і 13×26 відповідно.

Приклад 4.3. Для мультимножини

$$A = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^2, a_5^2, a_6^2, a_7^2, a_8^3, a_9^3, a_{10}^5\}$$

маємо:

$$\begin{aligned} P_0(A) &= 1, P_1(A) = 10, P_2(A) = 97, P_3(A) = 912, \\ P_4(A) &= 8299, P_5(A) = 72946, P_6(A) = 617874, \\ P_7(A) &= 5029948, P_8(A) = 39237380, P_9(A) = 292327224, \\ P_{10}(A) &= 2072330400, P_{11}(A) = 13920355680, \\ P_{12}(A) &= 88179787080, P_{13}(A) = 523856052720, \\ P_{14}(A) &= 2899520704080, P_{15}(A) = 14831963546400, \\ P_{16}(A) &= 6938695764000, P_{17}(A) = 292608485769600, \\ P_{18}(A) &= 1088829613872000, P_{19}(A) = 3456466684070400, \\ P_{20}(A) &= 8834757003072000, P_{21}(A) = 162615846032640000, \\ P_{22}(A) &= 162615846032640000. \end{aligned}$$

4 МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ НА МУЛЬТИМНОЖИНАХ

4.1 Методика розв'язування комбінаторних задач на мультимножинах

Задача 5.1. Цікавою нетривіальною комбінаторною задачею є задача підрахунку числа всіх траєкторій, з дозволеними рухами вгору, вліво, вниз на діаграмах Ферре від крайньої південно-східної точки цієї діаграми до крайньої північно західної точки цієї діаграми. Тут, при допомозі комбінаторного принципу рівності її можна звести до обчислення числа всіх підмультимножин даної мультимножини. При цьому кожній підмультимножині мультимножини ставиться у відповідність траєкторія між вказаними вище точками. Цю задачу можна розглянути із учнями старших класів на після урочних заняттях з математики.

Задача 5.2. Випишіть всі підмультимножини мультимножини

$$\{a^2, b^1, c^1\}.$$

Розв'язання. Перш за все, полічимо число всіх таких підмультимножин, використовуючи твердження 4.1. Маємо

$$(2+1)(1+1)(1+1)=12.$$

Ці обчислення ми зробили з метою не пропустити жодної підмультимножини.

$$\emptyset$$

$$\begin{aligned} &\{a\}, \{b\}, \{c\} \\ &\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \\ &\{a, a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, a, c\} \\ &\{a, a, b, c\} \end{aligned}$$

Задача 5.3. Проведіть спостереження над усіма підмультимножинами із задачі 5.1. та зробіть висновки. За потреби проведіть новий експеримент.

Розв'язання. Учні помічають, що число підмультимножин потужності 0 та 4 і 1 та 3 однакові.

З цього можна висловити гіпотезу про те, що для мультимножини потужності k , число підмультимножин потужності i та $k-i$, де $i = 0, 1, \dots, k-1$ завжди будуть однакові. Для того, щоб гіпотеза була більш правдоподібною, можна провести ще один експеримент з мультимножиною $\{a^2, b^2, c\}$.

Задача 5.4. Під словом будемо розуміти довільну послідовність букв із деякого алфавіту, а під довжиною слова – число букв, з яких воно побудоване. Полічіть число всіх можливих слів, які можна побудувати із букв слова "математика".

Розв'язання. Запишемо мультимножину букв слова "математика":

$$A = \{a^3, m^2, t^2, e^1, n^1, k^1\}.$$

Далі скористаємося твердженням 4.2. Маємо:

$$P(A) = \frac{(3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1)!}{3! 2! 2! 1! 1! 1!} = \frac{10!}{3! \cdot 4} = 151200.$$

Задача 5.5. В кондитерському магазині продаються 4 сорти пиріжків. Скількома способами можна купити 7 пиріжків?

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі скористаємося твердженням 4.3. У нашому випадку $n = 4$, $m = 7$, тому маємо:

$$P = \frac{n^m}{m!} = \frac{4^7}{7!} = \frac{1024}{315} \approx 3.$$

Задача 5.6. Полічити всі підмультимножини потужності 6 мультимножини $\{a^3, b^3, c^2, d^1\}$.

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом 4.1. Побудуємо наступну таблицю:

			C0(A)	C1(A)	C2(A)	C3(A)	C4(A)	C5(A)	C6(A)	C7(A)	C8	C9
0	0	0	1	0	0	0	0					
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			

	0	0	1	2	3	4	3	2	1	0	0	
		0	1	3	6	9	10	9	6	3	1	0
			1	4	9	15	19	19	15	9	4	1

Навпроти $S_6(A)$ читаємо – 15.

Задача 5.7. Полічити число всіх 5-перестановок елементів мультимножини $A = \{a_1^3, a_2^5, a_3^6\}$.

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом 4.2 Побудуємо наступні таблиці:

	1	1	1	1		
0	1	0	0	0		1
1	1	1	0	0		2
2	1	2	1	0		4
3	1	3	3	1		8
4	1	4	6	4		15
5	1	5	10	10		26
6	0	6	15	20		41
7	0	0	21	35		56
8	0	0	0	56		56

	1	2	4	8	15	26	41	56	56	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	9
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	27
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	80

5	1	5	10	10	5	1	0	0	0		232
6	0	6	15	20	15	6	1	0	0		654
7	0	0	21	35	35	21	7	1	0		1778
8	0	0	0	56	70	56	28	8	1		4606
9	0	0	0	0	126	126	34	36	9		9080
10	0	0	0	0	0	252	210	70	45		24738
11	0	0	0	0	0	0	462	280	115		41062
11	0	0	0	0	0	0	0	722	395		62552
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1117		62552

У другій таблиці, у шостому занумерованому рядку читаємо – 654.

4.2 Комбінаторні методи розв'язування задач

Теорема 3.1 (методом включень і виключень). Якщо $A_1, \dots, A_n$ – деякі скінченні множини, то

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [1,n] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Генератрисою числової послідовності $\{a_n\}$ називається формальна сума

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n. \quad (3.2)$$

У розгорнутому вигляді генератрису числової послідовності записують $A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n + \dots$.

У літературі генератрису часто називають продуктивною функцією [4].

Означення 3.2. Многочленом генератрисы называется генератриса, у якої всі члени, починаючи з деякого, дорівнюють нулю.

Метод генератрис – математичний прийом, що дозволяє зводити завдання з теорії чисел, теорії ймовірностей і комбінаторики до завдань з математичного аналізу.

Ідея методу генератрис полягає в тому, що для знаходження всіх членів деякої послідовності $\{a_n\}$ використовують таку процедуру: за допомогою рекурентних співвідношень для членів послідовності $\{a_n\}$ обчислюють генератрису $A(s)$, а потім, розкладаючи формальну суму, знаходять коефіцієнти при s^n , які є a_n [4].

Теорема 3.2. За генератрисою $A(s)$ однозначно відновлюються коефіцієнти a_n .

У комбінаториці використовуються такі типи генератрис:

- степеневая $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;
- експоненціальна $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

Означення 3.3. $(1 + s)^n = 1 + \frac{n}{1!}s + \frac{n(n-1)}{2!}s^2 + \dots$.

Коефіцієнт при s^m в генератрисі $(1 + s)^n$ називається комбінацією із n елементів по m без повторень.

Означення 3.4. $(1 - s)^{-n} = (1 + s + s^2 + s^3 + \dots)^n = 1 + C_n^1 s + C_{n+1}^2 s^2 + C_{n+m-1}^m s^m + \dots$.

Коефіцієнт при s^m в генератрисі $(1 + s)^{-n}$ називається комбінацією із n елементів по m з повтореннями.

Означення 3.5. Композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ називається послідовність $\{c_n\}$:

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} . \quad (3.3)$$

Теорема 3.3. Нехай генератрисы послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ дорівнюють відповідно $A(s)$ і $B(s)$, а послідовність $\{c_n\}$ є композицією послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$. Тоді генератриса $\{c_n\}$ дорівнює $C(s) = A(s) \cdot B(s)$.

Теорема 3.4. Нехай генератрисы послідовностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ і $\{c_n\}$ відповідно дорівнюють $A(s)$, $B(s)$ і $C(s)$, причому члени послідовності $\{c_n\}$ обчислюються за формулою $c_n = \alpha a_k \pm \beta b_k$. Тоді має місце рівність:

$$C(s) = \alpha A(s) \pm \beta B(s) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j \pm \beta \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j \quad (3.4)$$

Наведемо декілька прикладів, які ілюструють використання даних теорем та означень.

Задача 3.1. У туристичній групі, що їде до Африки, 30 людей. Із них 15 знають англійську мову, 10 – французьку, 6 – німецьку, 5 – англійську і французьку, 3 – англійську і німецьку, 3 – французьку і німецьку, 2 – англійську, французьку і німецьку мови. Скільки людей в групі не зможуть спілкуватися іноземною мовою?

Розв'язання. Нехай A – множина туристів, що знає англійську мову, F – множина туристів, що знає французьку мову, N – множина туристів, що знає німецьку мову, а X – множина туристів, які не знають іноземних мов. За умовою задачі маємо: $|A| = 15$, $|F| = 10$, $|N| = 6$, $|A \cap F| = 5$, $|A \cap N| = 3$, $|F \cap N| = 3$, $|A \cap F \cap N| = 2$, $|A \cup F \cup N \cup X| = 30$.

За теоремою 3.1 маємо:

$$|A \cup F \cup N \cup X| = |A| + |F| + |N| + |X| - |A \cap F| -$$

$$\begin{aligned}
& - |A \cap N| - |F \cap N| + |A \cap F \cap N|. \\
30 &= 15 + 10 + 6 + |X| - 5 - 3 - 3 + 2; \\
|X| &= 30 - 22 = 8.
\end{aligned}$$

Задача 3.2. Підрахувати кількість різних перестановок цифр даного числа 3744753, при яких жодні 2 однакові цифри не йдуть одна за одною.

Розв'язання. Загальна кількість різних перестановок цифр числа 3744753 дорівнює $P_7(2,2,2,1) = \frac{7!}{2!2!2!1!} = 630$.

Якщо деякі дві однакові цифри стоять поруч, то можна вважати їх єдиним символом. Тоді кількість перестановок, що містять цей символ, дорівнює $P_6(2,2,1,1) = \frac{6!}{2!2!1!1!} = 180$. Зауважимо, що кількість таких випадків дорівнює $C_3^1 = 3$.

Аналогічно, кількість перестановок, в яких присутні два подвійні символи, дорівнює $P_5(2,1,1,1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$, а кількість таких випадків дорівнює $C_3^2 = 3$.

У разі перестановок всіх пар подвійних цифр загальна кількість дорівнює $P_4 = 4! = 24$.

За теоремою 1 маємо:

$$630 - 3 \cdot 180 + 3 \cdot 60 - 24 = 296.$$

Задача 3.3. Знайти генератрису числової послідовності $\{a_n\}$, де

$$a_n = 4(n - 3) + 3^{n+2}.$$

Розв'язання. За означенням 3.1 генератриси маємо

$$\begin{aligned}
A(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (4(n - 3) + 3^{n+2}) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4n s^n - \sum_{n=0}^{\infty} 12s^n + \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 3^n \cdot s^n = \\
&= 4 \sum_{n=0}^{\infty} n s^n - 12 \sum_{n=0}^{\infty} s^n + 9 \sum_{n=0}^{\infty} (3s)^n.
\end{aligned}$$

Оскільки $\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}$ – нескінченно спадна геометрична прогресія для $|s| < 1$, а перший доданок – звичайна геометрична прогресія, то маємо:

$$A(s) = \frac{4s}{(1-s)^2} - \frac{12}{1-s} + \frac{9}{1-3s}.$$

4.3 Приклад реалізації квантово-мультимножинної технології

Реалізацію описаної технології розглянемо на прикладі вивчення теми "Бази даних". Під час засвоєння лекції "Моделі даних та концептуальне моделювання" навчальний матеріал було розбито на кванти $k_1, k_2, \dots, k_{10}$, кожному з яких відповідав окремий параграф лекції [2].

Для перевірки рівня засвоєння даної лекції в навчальній системі було розроблено 50 тестових завдань. Окремий тестовий набір, за яким проводилося тестування, складався з 15 запитань, кожне з яких було прив'язане до відповідного кванта k_i .

Подальше налаштування навчальної траєкторії адаптивна система здійснює за результатами проведених трьох тестувань:

- 1) початкове тестування (проводиться після вивчення лекційного матеріалу);
- 2) проміжне тестування (після виконання додаткових практичних завдань);
- 3) підсумкове завершальне тестування.

Під час тестування студента А навчальною системою було сформовано три набори тестових завдань t_i , кожному з яких відповідає мультимножина T_i квантів k_i , знання яких перевіряється відповідним тестовим питанням:

$$t_1 \rightarrow T_1 = \{k_1^1, k_2^2, k_3^1, k_4^1, k_5^2, k_6^1, k_7^2, k_8^1, k_9^3, k_{10}^1\},$$

$$t_2 \rightarrow T_2 = \{k_1^3, k_2^3, k_3^1, k_5^3, k_6^2, k_7^1, k_9^1, k_{10}^1\},$$

$$t_3 \rightarrow T_3 = \{k_1^2, k_2^2, k_3^1, k_4^2, k_5^2, k_7^2, k_8^2, k_9^1, k_{10}^1\}.$$

Індекси над квантами визначають кількість повторень відповідного кванта в окремому тестовому наборі.

Оскільки, як було показано вище, на мультимножинах зберігається операція додавання, то, застосувавши сумування до мультимножин T_i , визначимо максимально можливу кількість повторень кванта k_i в усіх наборах тестових завдань:

$$\sum_{i=1}^3 T_i = \{k_1^1, k_2^2, k_3^1, k_4^1, k_5^2, k_6^1, k_7^2, k_8^1, k_9^3, k_{10}^1\} + \{k_1^3, k_2^3, k_3^1, k_5^3, k_6^2, k_7^1, k_9^1, k_{10}^1\} + \{k_1^2, k_2^2, k_3^1, k_4^2, k_5^2, k_7^2, k_8^2, k_9^1, k_{10}^1\} = \{k_1^6, k_2^7, k_3^3, k_4^3, k_5^7, k_6^3, k_7^5, k_8^3, k_9^5, k_{10}^3\} \quad (6.1)$$

Після завершення тестування для кожного студента системою формуються результуючі мультимножини T_{ci} , побудовані на основі квантів, що стосуються тестових питань, по яких було отримано негативні відповіді.

Зокрема, для студента А, який брав участь у дослідженні, в системі було отримано такі результуючі мультимножини T_{c1}, T_{c2}, T_{c3} (табл.6.1):

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7	K8	K9	K10
T_{c1}	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1
T_{c2}	0	1	0	0	2	0	1	0	0	0
T_{c3}	1	0	1	1	1	0	1	2	1	1
Сума	1	2	1	1	3	1	3	2	2	2

Таблиця 6.1.

$$T_{c1} = \{k_2^1, k_6^1, k_7^1, k_9^1, k_{10}^1\},$$

$$T_{c2} = \{k_2^1, k_5^2, k_7^1\},$$

$$T_{c3} = \{k_1^1, k_3^1, k_4^1, k_5^1, k_7^1, k_8^2, k_9^1, k_{10}^1\},$$

в кожній з яких індекс над квантом ik вказує на кількість тестових питань, по яких було отримано негативну відповідь стосовно кванта k_i в окремому тестовому наборі.

Підсумувавши індекси при однакових номерах квантів, можна зробити висновок, які кванти є найбільш суттєвими для повторного їх вивчення:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 T_{ci} &= \{k_2^1, k_6^1, k_7^1, k_9^1, k_{10}^1\} + \{k_2^1, k_5^2, k_7^1\} + \{k_1^1, k_3^1, k_4^1, k_5^1, k_7^1, k_8^2, k_9^1, k_{10}^1\} = \\ &= \{k_1^1, k_2^2, k_3^1, k_4^1, k_5^3, k_6^1, k_7^3, k_8^2, k_9^2, k_{10}^2\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

На заключному етапі адаптивна система проводить нормування сум (6.1) та (6.2) за методом ділення на максимум серед компонент.

Виходячи, наприклад, з норми 50 % незасвоєння навчального матеріалу, очевидно, що в описаному прикладі для студента А системою формується матеріал для повторного вивчення, побудований на основі квантів k_7 , k_8 та k_{10} .

У загальному випадку сума $\sum_{i=1}^n T_i = \{k_1^{\mu_1}, k_2^{\mu_2}, \dots, k_m^{\mu_m}\}$ всіх мультимножин T_i є мультимножиною, в якій показники її елементів визначаються рівностями:

$$\mu_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}, j = 1, \dots, m.$$

Залучення мультимножин до формування тестових завдань дає змогу також проаналізувати правильність складання тестових завдань та оцінити їх якість.

Для визначення оцінки якості тестів використовується стала $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i$. Чим більшою є ця стала для даного набору тестів, тим якіснішим, з точки зору перевірки знань, є такий набір.

Важливим показником при складанні тестових завдань є незалежність тестів. Якщо перетин двох мультимножин $T_i \cap T_j = \emptyset$, то тестові завдання t_i та t_j , яким відповідають мультимножини T_i та T_j , вважаються незалежними, тобто вони спираються на різні кванти.

Якщо $T_i \cup T_j = T_i$, то тестовий набір t_j є несуттєвим, оскільки він аналогічний до t_i .

Для визначення повноти набору тестових наборів проводять аналіз множини

$$P = \{k_1, \dots, k_m\} - \bigcup_{i=1}^n T_i.$$

Якщо множина P порожня, то тестовий набір наповнено правильно, оскільки для його складання залучені всі кванти інформації. В іншому випадку успішне проходження всіх тестових завдань не перевіряє знання деяких квантів інформації.

4.4 Застосування мультимножинних функцій у біоінформатиці

Частково рекурсивні мультимножинні функції є моделями ДНК-обчислень у біоінформатиці.

ДНК-обчислення – це форма обчислень, яка використовує ДНК, біохімію та молекулярну біологію натомість традиційним комп'ютерним технологіям, які побудовано на кремнію [7]. Відповідно, ДНК-комп'ютер – обчислювальна система, що використовує обчислювальні можливості молекул ДНК.

Розвиток цієї предметної області було розпочато у 1994 р. роботою Леонарда Адлемана (Leonard Adleman), в якій було показано як, за допомогою пробірки з ДНК, можна досить ефективно вирішити класичну задачу комівояжера. Також відомі роботи Еуди Шапіро (Ehud Shapiro) із реалізації скінченних автоматів, Ерика Вінфрі (Erik Winfree) із синтезу різноманітних поверхонь (зокрема, такої відомої фрактальної структури як килима Серпинського) [7].

Молекулу ДНК формально можна подати у вигляді пари слів у чотирьохлітерному алфавіті $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{A, T, C, G\}$, кожний символ якого позначає відповідну основу нуклеотидів – аденін, тимін, цитозин та гуанін:

$(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$, де $\xi_1, \dots, \xi_n \in \aleph$, $\eta_1, \dots, \eta_n \in \aleph$. Якщо компліментарність уточнити у вигляді бієкції $\psi: \aleph \rightarrow \aleph$, $\psi(A) = T$, $\psi(T) = A$, $\psi(\Gamma) = \Pi$, $\psi(\Pi) = \Gamma$, тоді мають виконуватися рівності $\psi(\xi_i) = \eta_i$ для усіх $i = 1, \dots, n$. Таким чином, друге слово пари однозначно відновлюється за першим словом. Тому, обчислення на ДНК уточнюються як обчислення над словами у вказаному алфавіті.

Розглянемо більш складний випадок, коли, по-перше, ланцюжки ДНК мають, взагалі кажучи, різну довжину, та, по-друге, враховується “зсув” одного ланцюжка відносно іншого (зсуви можуть виникають із-за подовження, доповнення, вкорочення, розрізу, модифікації або зшивки ланцюжків). Тоді, моделлю ДНК є трійка вигляду $(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m, k)$, де $k \leq \min(n, m)$ – кількість пар (нуклеотидів), пов’язаних між собою.

Формально кажучи, повинні виконуватися твердження: для усіх $i = 1, \dots, k$, $\xi_i = \psi(\eta_i(m - k + 1))$ або $\eta_i = \psi(\xi_i(n - k + 1))$.

В частковому випадку при $n = m = k$ отримуємо розглянутий раніше випадок ланцюжків однакової довжини без зсувів. Вирішення питання обчислюваної повноти для такого загального випадку в термінах ППА потребує окремого розгляду.

Очевидно, що виникає необхідність у загальних моделях молекулярних обчислень, які б дозволяли планувати нові експерименти та узагальнювати існуючі. Однією з таких моделей є модель паралельної фільтрації (Parallel Filtering Model). Основою цієї моделі виступає “пробірка”, формальною моделлю якої, у свою чергу, виступає мультимножина рядків над алфавітом $\aleph = \{A, T, \Pi, \Gamma\}$.

Відповідно до цієї моделі над “пробіркою” визначаються операції злиття, розмноження, виявлення, добування, розділення за довжиною та розділення за префіксом. Перелічені операції можна отримати із системи породжуючих мультимножинної ППА. Цей факт дає підставу стверджувати,

що частково рекурсивні мультимножинні функції виступають формальними моделями ДНК-обчислень.

Крім цього, як визначалося в попередніх двох розділах, мультимножини рядків виступають уточненнями таблиць з дублікатами рядків в табличних базах даних. Отже, частково рекурсивні мультимножинні функції є також моделями алгоритмічних маніпуляцій над таблицями в сучасних СУБД.

Обчислюваність мультимножин вводиться як нумераційна обчислюваність за А.І. Мальцевим.

Апаратом для задання класу обчислюваних функцій виступають примітивні програмні алгебри, введені В.Н. Редьком.

Вводяться основні означення теорії ППА та будується нова, більш зручна в технічному плані, система породжуючих арифметичної ППА.

На основі побудованої системи породжуючих арифметичної ППА будуються системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА. Системи породжуючих множинної та мультимножинної ППА містять предикат рівності та селектори. Специфічність множинної (мультимножинної) ППА проявляється в тому, що її система породжуючих, крім вказаних елементів, містить функції об'єднання множин, додавання множин, різниці множин та константні функції, що фіксують порожню множину та сінглтон $\{1\}$ (відповідно функції об'єднання мультимножин, додавання мультимножин, різниці мультимножин, константні функції, що фіксують порожню мультимножину та мультимножинний сінглтон $\{1^1\}$, а також специфічну функцію, таку, що $\{n_1^1\}, \{k_1^1\} \xrightarrow{\varphi} \{n_1^{k_1}\}$.

Отриманий алгебраїчний опис класу обчислюваних функцій над мультимножинами застосовано для моделювання ДНК-обчислень у біоінформатиці та алгоритмічних маніпуляцій над таблицями у сучасних СУБД.

Конкретний вигляд отриманих систем породжуючих множинної та мультимножинної ППА дозволяє зробити висновок про їхню природність та спорідненість. Зокрема, вони містять предикат рівності, а їхні бінарні операції виникають із стандартних арифметичних операцій додавання та зрізаної різниці шляхом їх розповсюдження за допомогою конструкції повного образу.

Модель ППА продемонструвала свою адекватність для предметних областей: ДНК-обчислення та табличні маніпуляції. Отримані результати доповнюють низку результатів школи В.Н. Редька щодо обчислюваності в різноманітних предметних областях: натуральні, цілі, раціональні числа, слова в скінченному та зліченному алфавітах, вектори, матриці, реляції та таблиці.

5 СИСТЕМА ЗАДАЧ ПО КОМБІНАТОРИЦІ МУЛЬТИМНОЖИН

1. Випишіть усі підмультимножини мультимножини $\{a^3, m^1, c^2\}$
2. Скільки рішень $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ має в невід'ємних цілих числах? Тобто скільки 4-кортежів (m_1, m_2, m_3, m_4) невід'ємних цілих чисел є розв'язками рівняння?
3. Під словом будемо розуміти довільну послідовність букв із деякого алфавіту, а під довжиною слова – число букв, з яких воно побудоване. Порахуйте число всіх можливих слів, які можна побудувати із букв слова «комбінаторика».
4. Електропоїзд має 7 вагонів. Скількома способами можна розподілити 8 провідників ?
5. У магазин завезли 4 сорти вареників. Якою кількістю способів можна купити 7 вареників?
6. Скільки семи цифрових чисел можна записати, використовуючи сім різних цифр, окрім нуля?
7. У тарілці 7 жовтих і 5 чорних цукерок лежать. Скількома способами навімання з тарілки можна обрати : 1) 3 цукерки; 2) 2 жовті і 1 чорну цукерку?
8. Полічити усі підмультимножини потужності 4 мультимножини $\{a^2, m^1, c^2, k^3\}$.
9. На колі 9 точок. Скільки може існувати трикутників , у яких вершинами є ці точки?
10. Випишіть усі підмультимножини мультимножини $\{b^1, k^3, l^3\}$.
11. Із міста Калуш до міста П'ятихатки вирушає 9 маршруток, 5 поїздів та 7 автобусів. Скількома способами можна дістатися із Калуша до П'ятихатків?
12. Підрахуйте кількість 8-цифрових чисел, котрі : 1) мають різні цифри; 2) мають тільки парні цифри; 3) мають одну цифру 4, дві цифри 1 і жодної цифри 0.
13. Для нагороди у конкурсі придбано 4 комп'ютера, 2 — смартфони і 10 — навушників. Скількома способами можна поділити нагороди між 26 учасниками, якщо будь-якому з них вручають тільки одну нагороду?

14. Для нагороди з математики на олімпіаді придбано 2 примірника першої книжки, 5 — другої і 7 — третьої. Скількома способами можна розділити ці призи між 27 учасниками, якщо будь-якому вручають лише один приз?
15. На майданчику грають 40 дітей, то скількома способами можна вибрати тільки 10 для гри у хованки?

ВИСНОВКИ

У даній роботі був зроблений огляд такого математичного об'єкту, як мультимножини, основні поняття що з ними пов'язані, властивості. Також розглядалися принципи комбінаторики, наводилися приклади їх застосування. А також розроблені методи розв'язування задач комбінаторного характеру. Висвітлені і описані два алгоритми про знаходження числа m -сполучення на мультимножинах та m -перестановок на мультимножинах. Був виконаний моніторинг наявної літератури з цієї теми та отримані певні висновки.

Незважаючи на те, що теорія мультимножин набуває все більшої популярності у математичних колах, для рядового слухача вона все одно залишається непізнаною.

У повсякденному житті теорія мультимножин широко використовується у комбінаторних розрахунках, програмуванні, комбінаторних задачах, які вимагають знань певних алгоритмів.

Незважаючи на абстрактність цієї теми, у роботі були розглянуті приклади, які широко використовуються під час уроків математики у школі та задачі, які потрібно використовувати у позакласній роботі, на факультативах. А це означає, що є можливість інтегрувати нові методи у шкільну програму. Також розроблена система задач по комбінаториці мультимножини, які слід використовувати на факультативах чи позакласній роботі. Отже у результаті роботи було усунено недоліки та заповнення прогалин при вивченні комбінаторики і підготовлено теоретичні та практичні матеріали для роботи у позаурочний час.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Р.А. Заторський. Про один алгоритм підрахунку числа m -перестановок на довільних мультимножинах // Математичні Студії. – 2002. – Т.17 №2. – с. 215-219.
- [2] М.В. Пікуляк. Застосування теорії мультимножин для формування індивідуального квантового набору навчального контенту. – ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені В.Стефаника», Івано-Франківськ, Україна, 2014.
- [3] В.В. Гоцуленко. Комбинаторные числа для подсчёта разбиений конечных мультимножеств. – ПДМ, № 4 2013 – с. 67-72.
- [4] Харченко В. М. Практикум з дискретної математики / В.М. Харченко. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2022. – 148 с.
- [5] Богатирьова Ю.О. Мультимножини: означення, характеристики, операції, властивості операцій / Ю.О. Богатирьова // Матеріали VI Всеукраїнської конференції молодих науковців “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” (ІТОНТ-2008, Черкаси, 5–7 травня, 2008 р.). – Черкаси: ЧНУ, 2008. – С. 140.
- [6] Богатирьова Ю.О. Обчислюваність на скінченних множинах та мультимножинах / Ю.О. Богатирьова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – №4. – С. 88–96.
- [7] Буй Д.Б. Сучасний стан теорії мультимножин / Д.Б. Буй, Ю.О. Богатирьова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – №1. – С. 51–58.