

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого(магістерського) рівня вищої освіти

на тему:

“Способи оптимізації знаходження рівнянь вищих степенів”

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)(З)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта

(Математика)

Джигіта Ірина Андріївна

Керівник: доктор фізико-математичних

наук, професор

Пилипів Володимир Михайлович

Рецензент

Івано-Франківськ – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ 3 - ГО СТЕПЕНЯ	5
1.1 Неповне рівняння 3 – го степеня.....	5
1.2. Повне рівняння 3 – го степеня.....	11
РОЗДІЛ 2. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ОКРЕМИХ ТИПІВ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ.....	23
2.1 Знаходження раціональних коренів.....	23
2.2 Розв’язування окремих типів рівнянь 4 –го степеня.....	30
2.3 Відокремлення кратних множників.....	33
РОЗДІЛ 3. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ	
3.1 Метод Штурма.....	48
3.2 Метод хорд.....	57
3.3 Метод дотичних.....	64
ВИСНОВКИ	70
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	71

ВСТУП

Актуальність теми визначається тим, що у шкільному курсі алгебри рівняння займають чи не найважливіше місце. Вони мають не тільки важливе теоретичне значення. Рівняння застосовують і в практичних цілях. Їх використовують для розв'язування задач з фізики, біології, хімії та інших дисциплін. Задачі про просторові форми і кількість співвідношення нашого часу приходять до розв'язку різних типів рівнянь. Рівняння використовується як у шкільній програмі, так і у конкурсних екзаменах та олімпіадах.

Метою моєї магістерської роботи є пошук найоптимальніших методів розв'язання того чи іншого рівняння вищого степеня, розв'язування рівнянь найоптимальнішими методами

Об'єктом дослідження є рівняння вищих степенів

Предмет дослідження - дослідження різних видів рівнянь вищих степенів та способів оптимізації знаходження розв'язки рівнянь вищих степенів.

Завдання поставлені на магістерську роботу:

- дослідити і вивчити теоретичні відомості з теми
- пошук найоптимальніших методів розв'язків рівнянь вищих степенів
- розв'язування рівнянь вищих степенів найоптимальнішими методами
- зацікавленість учнів до розв'язування рівнянь вищих степенів.

Структура .Магістерська робота складається зі вступу, 3 розділів, підрозділів та загального висновку, списку використаних джерел.

У вступі сформульовані актуальність теми, об'єкт, предмет, мета та завдання дослідження

У 1-му розділі розглядаються розв'язування повних і неповних рівнянь 3-го степеня.

В 2-му розділі наведено приклади розв'язання окремих типів рівнянь вищих степенів і знаходження раціональних степенів розв'язування окремих типів рівнянь 4-го степеня, відокремлення кратних множників.

У 3-му розділі розкрити наближені методи розв'язання рівнянь вищих степенів. У висновку сформульовані результати і висновки проведеної роботи.

1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ 3 - ГО СТЕПЕНЯ

1.1 Неповні рівняння

Неповне кубічне рівняння – це рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$, а один з інших коефіцієнтів дорівнює нулю.

Двочленне кубічне рівняння розв'язується шляхом ділення на коефіцієнт a , який відмінний від нуля. Далі для розв'язку потрібно застосовувати формули скороченого множення суми та різниці кубів.

Приклад 1.1

$$8x^3 - 1 = 0 / 8$$

$$x^3 - \frac{1}{8} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{або} \quad x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad D < 0$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 1.2

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 0; x = 1; x = -1.$$

Відповідь : 0; 1; -1.

Щоб розв'язати деякі неповні рівняння доцільно деякий одночлен замінити сумою чи різницею одночленів. Після цього згрупувати відповідні одночлени та винести за дужки спільні множники.

Приклад 1.3

$$x^3 + 7x - 8 = 0$$

$$x^3 + 8x - x - 8 = 0$$

$$x^3 - x + 8x - 8 = 0$$

$$x(x^2 - 1) + 8(x - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) + 8(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(x(x + 1) + 8) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 8) = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x+8=0 \end{cases}$$

$x^2 + x + 8 = 0$ дане рівняння не має розв'язків

Відповідь: 1.

Для розв'язування неповних кубічних рівнянь так і для повних кубічних рівнянь використовують формулу Кардано і метод Вієта. Дані методи є відомими .

[Замінюючи в рівнянні $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$, x новим невідомим

y , що пов'язано з x рівністю $x = y - \frac{b}{3a}$, кубічне рівняння можна звести до

більш простого(канонічного) вигляду: $y^3 + py + q = 0$, де $p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$,

$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$, розв'язок цього ж рівняння можна отримати за

допомогою формули Кардано:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \text{№11} \quad (1.1)$$

$$\text{Дискримінантом даного рівняння є число } D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (1.2)$$

Коефіцієнтом a, b, c, d кубічного рівняння сталі, то кількість коренів заданого рівняння буде залежати від знаку D в формулі Кардано. Якщо D буде більше нуля, то задане рівняння буде мати три різні корені. Причому один з них буде дійсним, а два інші корені будуть спряжені комплексні.

При D дорівнює нулю дане рівняння буде мати три дійсні корені, причому два з них будуть рівними. Якщо D буде менше нуля, то рівняння буде мати три різні дійсні корені.

Приклад 1.4

$$x^3 - x = 0$$

Знайти корені даного рівняння.

Розв'язання

Очевидно, що коренями даного рівняння є числа $-1; 0$ та 1 . За допомогою формули Кардано

$$D = \frac{0^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27} = -\frac{1}{27} < 0$$

$D < 0$ це означає, що коренями даного рівняння є три різні дійсні числа

Приклад 1.5

$$\text{Знайти корінь рівняння } z^3 + 3z - 4 = 0$$

Розв'язання

Дільниками вільного члена є $\pm 1; \pm 2; \pm 4$:

$$f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$f(-1) = (-1) - 3 - 4 = -8$$

$$f(2) = 8 + 6 - 4 = 10$$

$$f(-2) = -8 - 6 - 4 = -18$$

$$f(4) = 4^3 + 12 - 4 = 72$$

$$f(-4) = (-4)^3 - 12 - 4 = -80$$

За формулою Кардано маємо:

$$D = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27} = 4 + 1 = 5$$

$$z = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$\text{Отже, } \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$

З цього слідує, що фактично при довільному доведенні ми будемо використовувати, що цей вираз і є коренем даного рівняння, якщо не буде вгадано корінь.

Зведено неповне кубічне рівняння виду $x^3 + px + q = 0$ легко розв'язувати універсального підстановкою:

$$\begin{cases} a + b = x \\ ab = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

Формула Кардано для даного рівняння:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Треба розв'язати

$$[\text{Таке рівняння } x^3 - 6x - 6 = 0$$

$$\begin{cases} a + b = x \\ ab = 2 \end{cases}$$

Маємо:

$$(a + b)^3 - 6(a + b) - 6 = 0$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 6a - 6b - 6 = 0$$

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) - 6(a + b) - 6 = 0$$

$$a^3 + b^3 + 3(a + b)(a - 2) - 6 = 0$$

$$a^3 + b^3 = 6$$

Перейдемо до системи: $\begin{cases} a^3 + b^3 = 6 \\ ab = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} a^3 + b^3 = 6 \\ (ab)^3 = 8 \end{cases}$

Підбором визначаємо: $\begin{cases} a^3 = 2 \\ b^3 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} a = \sqrt[3]{2} \\ b = \sqrt[3]{4} \end{cases}$

$$x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

Відповідь : $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.] сайт 12

Також для розв'язків неповних рівнянь використовується метод підбору. Кубічні рівняння мають завжди принаймні один дійсний корінь. Якщо коефіцієнти кубічного рівняння є цілі числа, то коренем цього рівняння є дільник вільного члена. Переважно коефіцієнти цих рівнянь підбираються так, що корінь, який шукаємо, є серед невеликих цілих чисел, тобто $0; \pm 1; \pm 2; \dots$. За допомогою підстановки цих чисел у рівняння ми будемо перевіряти чи є серед цих чисел корінь.

Після того, як буде знайдено такий корінь, потрібно здійснити поділ многочлена $ax^3 + bx^2 + cx + d$ на $x - x_1$, де x_1 – корінь, дільник вільного члена. За теоремою Безу при діленні ми отримаємо многочлен другого степеня. Даний многочлен прирівнюємо до нуля. В результаті вирішення квадратного рівняння знайдено корені.

Приклад 1.6

$$a^3 - 7a + 6 = 0$$

Дільниками вільного члена є числа $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Число 1 є коренем рівняння. Поділимо многочлен $a^3 - 7a + 6 = 0$ на $x - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
 a^3 - 7a + 6 & a - 1 \\
 a^3 - a^2 & a^2 + a - 6 \\
 \hline
 & a^2 - 7a \\
 & a^2 - a \\
 \hline
 & -6a + 6 \\
 & -6a + 6 \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

$$(a - 1)(a^2 + a - 6) = 0$$

$$(a - 1)(a - 2)(a + 3) = 0$$

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -3.$$

Відповідь: 1;2;-3.

1.2 Повні рівняння

Повні кубічні рівняння – це алгебраїчні рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$ і всі інші коефіцієнти не будуть дорівнювати нулю.

Для розв’язування повних кубічних рівнянь можна використовувати метод Кардано

Для того, щоб отримати загальний розв’язок кубічного рівняння, спочатку зводять задане рівняння до канонічного вигляду $y^3 + py + q = 0$. Надалі потрібно скористатися формулами 1.1 та 1.2.

Враховуючи кратність, рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ має завжди три корені. Кожен многочлен непарного степеня має мінімум один дійсний корінь

Приклад 1.7

$$x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$$

$$x = \left(y - \frac{6}{3}\right) = y - 2$$

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 30(y - 2) + 25 = 0$$

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 30y - 60 + 25 = 0$$

$$y^3 + 18y - 19 = 0$$

$$y^3 + py + q = 0$$

$$D = -108\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$$

$$D = -108\left(\frac{19^2}{4} + \frac{18^3}{27}\right) = -108\left(\frac{361}{4} + 6^3\right) = -108\left(\frac{361 + 864}{4}\right) =$$

$$= -108 * \frac{1225}{4} < 0 \Rightarrow \text{один дійсний корінь і два спряжених}$$

Один із способів розв’язування кубічних рівнянь є тригонометрична формула Вієта.

[За теоремою Вієта:

Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена з комплексними коефіцієнтами

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$$

$$\text{тоді й тільки тоді, коли } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases} \text{ [3, ст. 252]}$$

Приклад 1.8

Розв'яжіть рівняння $a^3 + 3a^2 - 3a - 11 = 0$

Розв'язання

Доповнимо перші два члена до формули куб суми:

$$a^3 + 3a^2 + 3a - 6a + 1 - 11 = 0$$

$$(a + 1)^3 - 6a - 12 = 0$$

Нехай $t = a + 1$

Підставимо і отримаємо $t^3 - 6(t - 1) - 12 = 0$

$$t^3 - 6t - 6 = 0$$

Подамо t , як $t = u + v$

Отримаємо $((u + v)^3 - 6(u + v) - 6 = 0$

$$u^3 + v^3 - 3uv(v + u) - 6(v + u) - 6 = 0$$

$$u^3 + v^3 - (3vu - 6)(v + u) - 6 = 0$$

Вираз $3uv - 6 = 0$, якщо :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 6 \\ uv = 2 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{2}{u}, u^3 + \frac{8}{u^3} = 6,$$

$$u^3 - 6u^3 + 8 = 0$$

Звідси $u^3 = 4$ або $u^3 = 2$.

Якщо $u^3 = 4$, тоді $v^3 = 2$. Якщо $u^3 = 2$, тоді $v^3 = 4$.

Якщо поміняти доданки, то значення $t = u + v$ не зміниться.

$$\text{Отже, } \begin{cases} u^3 = 4 \\ v^3 = 2 \\ uv = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u^3 = 4 \\ uv = 2 \end{cases}$$

Якщо $u = \sqrt[3]{4}$, $v = \sqrt[3]{2}$, то $t = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$

Відповідь: $a = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1$.

Приклад 1.9

$$2a^3 - 11a^2 + 12a + 9 = 0 \quad (A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + \dots = 0)$$

Розв'язання

Бачимо, що $A_0 = 2, A_1 = -11, A_2 = 12, A_3 = 9$

Знайдемо: B_1, B_2, B_3 .

$$B_1 = \frac{A_1}{A_0} = -\frac{11}{2}$$

$$B_2 = \frac{A_2}{A_0} = \frac{12}{2} = 6$$

$$B_3 = \frac{A_3}{A_0} = \frac{9}{2}$$

Знайдемо значення p та q

$$p = -\frac{B_1^2}{3} + B_2, \quad q = \frac{2B_1^3}{27} - \frac{B_1B_2}{3} + B_3$$

$$p = -\frac{\left(-\frac{11}{2}\right)^2}{3} + 6 = -\frac{121}{12} + 6 = -\frac{49}{12}$$

$$q = \frac{2(-\frac{11}{2})^2}{27} - \frac{-\frac{11}{2} * 6}{3} + \frac{9}{2} = \frac{342}{108}$$

Здійснимо підстановку p та q у формулу Кардано:

Отримаємо:

$$b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{343}{216} + \sqrt{\frac{343^2}{4*108^2} + \frac{49^3}{27*12^3}}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216} - \sqrt{\frac{343^2}{4*108^2} + \frac{p^3}{27*12^3}}} = \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216}}$$

$-\frac{343}{216}$ має три значення при $k = 0; 1; 2$

$$k = 0: \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = \frac{7}{6} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$k = 1: \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = \frac{7}{6} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\frac{7}{6}$$

$$k = 2: \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = \frac{7}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Зробимо розбиття по парах. Одержимо $-\frac{p}{3} = \frac{49}{36}$ та пари:

$$\frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ і } \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ та}$$

$$-\frac{7}{6} \text{ і } \frac{7}{6}, \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ і } \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Зробимо перетворення за допомогою формули Кардано:

$$b_1 = \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{6}$$

$$b_2 = \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = -\frac{7}{6} + \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{14}{6}$$

$$b_3 = \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} + \sqrt[3]{-\frac{343}{216}} = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{6}$$

Перейдемо до a :

$$a_1 = b_1 - \frac{B_1}{3} = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$$

$$a_2 = b_2 - \frac{B_1}{3} = -\frac{14}{6} + \frac{11}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = b_3 - \frac{B_1}{3} = \frac{7}{6} + \frac{11}{6} = 3$$

Відповідь: $a_2 = -\frac{1}{2}, a_{1,3} = 3$.

Розглянемо розв'язування симетричних рівнянь третього степеня.

[Раціональне рівняння третього степеня називається симетричними, якщо воно має вигляд $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, ($a \neq 0$)] [3, ст. 46]

[Дійсно, якщо згрупувати перший з останнім, а другий з третім доданки даного рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= (ax^3 + a) + (bx^2 + bx) = a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x - 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = (x + 1)(a(x^2 - x + 1) + bx) = \\ &= (x + 1)(ax^2 - ax + a + bx) = (x - 1)(ax^2 + (b - a)x + a) \end{aligned} \quad [3, \text{ст. 46}]$$

Звідси отримаємо (слідуює) сукупність $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ ax^2+(b-a)x+a=0 \end{cases}$

Дана сукупність складається з лінійного рівняння і квадратного рівняння. Тому розв'язати отриману сукупність не принесе труднощів.

Повне зворотнє кубічне рівняння виду $Ax^3 + Cx^2 + Cx + A = 0$, A і C – це коефіцієнти доцільно розв’язувати методом групування.

Погрупувавши і винісши спільний множник за дужки за дужки отримаємо:

$$Ax^3 + Cx^2 + Cx + A = A(x^3 + 1) + C(x^2 + x) = A(x + 1)(x^2 - x + 1) + Cx(x + 1) = (x + 1)(Ax^2 + x(C - A) + A)$$

Тоді коренем даного рівняння буде x дорівнює -1 , а корені квадратного рівняння $Ax^2 + x(C - A) + A$ знаходимо через дискримінант.

Приклад 1.10

Дано рівняння $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$. Знайдіть корені рівняння.

Розв’язання

$$x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = (x^3 + 1) + (8x^2 + 8x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 8x(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 + 8x) = (x + 1)(x^2 + 7x + 1)$$

$$\text{Звідси } (x + 1)(x^2 + 7x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \begin{cases} x+1=0 \\ x^2+7x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{-7\pm\sqrt{45}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \left\{-1; \frac{-7\pm\sqrt{45}}{2}\right\}$$

Приклад 1.11

$$3x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

Розв’язання

Задане рівняння є симетричним. Провівши угруповання одержимо:

$$3x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 3(x^3 - 1) - 2x(x + 1) = 3(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2x(x + 1) = (x + 1)(3x^2 - 5x + 3 - 2x) = 3x^2 - 5x + 3$$

$x = -1$ є коренем рівняння.

Знайдемо корінь заданого тричлена:

$$3x^2 - 5x + 3;$$

$$3x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$D = 25 - 4 * 3 * 3 = -11$$

Відповідь: $x = -1$.

Приклад 1.12

$4x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = 0$. Знайти корінь рівняння.

Розв'язання

Дане рівняння є симетричним. Згрупуємо доданки та розкладемо на множники.

$$4(x^3 + 1) + 3x(x + 1) = 0$$

$$4(x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x(x + 1) = 0$$

Винесемо $(x + 1)$ за дужки. Отримаємо:

$$(x + 1)(4x^2 - 4x + 4 + 3x) = 0$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ 4x^2 - x + 4 = 0 \end{cases}$$

Рівняння $4x^2 - x + 4 = 0$ не має дійсних коренів. Отже, $x = -1$.

Відповідь: -1 .

Найбільш поширеним способом вирішення повних кубічних рівнянь є метод підбору. Для початку знаходимо один корінь рівняння шляхом перебору і скористаємося теоремою Бевзу.

Приклад 1.13

$$3a^2 + 8a^2 - 8a - 8 = 0$$

Розв'язання

Домножимо обидві частини на 3^2 і зробимо заміну $3a = b$.

Отримаємо $b^3 + 8b - 24b - 72 = 0$.

Використаємо теорему Бевзу. Дільниками вільного члена є:

$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 9 \dots$ Підставивши по черзі дані числа у рівняння, отримаємо, що $b_1 = -2$ є коренем рівняння.

Поділимо многочлен $b^3 + 8b^2 - 24b - 72$ на $b + 2$

Дістанемо :

$b^3 + 8b^2 - 24b - 72$	$b + 2$
$b^3 + 2b^2$	$b^3 + 6b^2 - 36$
$6b^2 - 24b$	
$6b^2 + 12b$	
$-36b - 72$	
$-36b - 72$	
0	

$$b^3 + 6b^2 - 36 = 0$$

Розв'язавши отримаємо, що $b_2 = -3 - \sqrt{5}$ та $b_3 = -3 + \sqrt{5}$.

Повернемося до змінної a .

$3a = b$, а, отже, $a_1 = -\frac{2}{3}$, $a_2 = -1 - \sqrt{5}$ та $a_3 = -1 + \sqrt{5}$.

Відповідь: $-1 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5}, -\frac{2}{3}$.

Приклад 1.14

$a^3 + 4a^2 + a - 6 = 0$. Знайти корені рівняння

Розв'язання

Дільниками вільного члена є числа $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$.

Нехай ліва частина рівняння $a^3 + 4a^2 + a - 6$ дорівнює $f(a)$. Тоді

$$g(1) = 0, a_1 = 1$$

Поділимо $f(a)$ на $a - 1$.

Отримаємо:

$$a^3 + 4a^2 + a - 6 = (a - 1)(a^2 + 5a + 6)$$

Позначимо останній множник через $Q(a)$, $Q(a = 0)$. Розв'яжемо дане рівняння.

$$a_{2,3} = -2; -3.$$

Відповідь : 1;-2;-3.

Також для розв'язування кубічних рівнянь можна використовувати схему Горнера.

Дана схема дозволяє швидше ніж стовпчиком ділити багаточлен на лінійні двочлени.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Схема Горнера у точці $x = a$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = b_{n-1} * a + a_{n-1}$	b_{n-3} $= b_{n-2} * a$ $+ a_{n-2}$		b_0 $= b_1 * a$ $+ a_1$	r $= b_0 * a$ $+ a_0$

Приклад 1.15

Розв'яжіть рівняння $2z^3 - 7z^2 + 6z - 1 = 0$. Коренем рівняння є число 1 – дільник вільного члена.

	2	-7	6	-1
1	2	-5	1	0

Отже, задане рівняння можна записати $(2x^2 - 5x + 1)(x - 1) = 0$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{5+3}{4} = 2 \end{cases}$$

Відповідь: $1; \frac{1}{2}; 2$.

Можна зауважити, що якщо коефіцієнти многочлена позитивні, то дане рівняння не буде мати додатного кореня. Тому починаємо з розгляду від'ємних дільників.

Приклад 1.16

$z^3 + 9z^2 + 23z + 15 = 0$. Знайти корені даного рівняння.

Розв'язання

Дільниками є: $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15$.

	1	9	23	15
-1	1	8	15	0
-3	1	5	0	
-5	1	0		

Отже, отримаємо:

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = -5.$$

Відповідь: $-1; -3; -5$.

Приклад 1.17

Розв'язати рівняння: $z^3 - z^2 - 21z + 45 = 0$.

Розв'язання

Застосуємо схему Горнера:

Дільником вільного члена є: $\pm 1; \pm 3; \pm 5$.

z_i	Коефіцієнти многочлена			
	1	-1	-21	45
1	1	0	-21	24
-1	1	-2	-18	63
3	1	2	-15	0
-3	1	5	0	
-5	1	0		

$$z^3 - z^2 - 21z + 45 = (z - 3)^2(z + 5)$$

Приклад 1.18

Розв'язати рівняння $2a^3 - 11a^2 + 12a + 9 = 0$ за схемою Горнера .

Розв'язання

Помножимо обидві частини рівняння на 2^2 . Отримаємо :

$$2^3 a^3 - 2^2 * 11 * a^2 + 24 * 2a + 36 = 0$$

Зробимо заміну змінної $b = 2a$. Отримаємо рівняння:

$$b^3 - 11b^2 + 24b + 36 = 0$$

Дільниками вільного члена є:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 36.$$

Зробимо підстановку, щоб отримати тотожність

$$1^3 - 11 \cdot 1^2 + 1 \cdot 24 + 36 = 50 \neq 0$$

$$(-1)^3 + 11(-1)^2 + 24(-1) + 36 = 0$$

Бачимо, що при $b = -1$, тотожність вірна. А, отже, це корінь. З даного слідує, що

$$a = \frac{b}{2} = -\frac{1}{2}$$

За схемою Горнера слідує розподіл $2a^3 - 11a^2 + 12a + 9$ на $a + \frac{1}{2}$

a_i				
	2	-11	12	9
$\frac{1}{2}$	2	$-11 + 2 * \left(-\frac{1}{2}\right) = -12$	$12 - 12 * \left(-\frac{1}{2}\right) = 18$	$9 + 18 * \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Отже, маємо:

$$2a^3 - 11a^2 + 12a + 9 = \left(a + \frac{1}{2}\right)(2a^2 - 12a + 18) = 2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a^2 - 6a + 9)$$

Знайдемо корені рівняння $2a^2 - 12a + 18 = 0$

$$(a^2 - 6a + 9) = 0$$

$$(a - 3)^2 = 0$$

$a = 3$ – корінь рівняння

Відповідь: $-\frac{1}{2}; 3$.

РОЗДІЛ 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОКРЕМИХ ТИПІВ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

2.1 Знаходження раціональних коренів.

Розглянемо багаточлен $P(x) = r_0x^n + r_1x^{n-1} + \dots + r_n$, де $r_0 \neq 0$, а $r_0, r_1, r_2 \dots r_n \in \mathbb{Q}$.

Коефіцієнти будь-якого багаточлена можуть бути як дробовими так і цілими числами. Проте, всі дробові коефіцієнти можна звести до спільного знаменника та домножити многочлен на цей знаменник. В результаті ми отримаємо багаточлен уже з цілими коефіцієнтами. Корені отриманого багаточлена збігатимуться з коренями багаточлена $P(x)$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, \text{ де } a_0 \neq 0, \text{ а } a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$$

Багаточлен $f(x)$ може мати цілі та дробові корені.

Раціональним коренем багаточлена $f(x)$ (з цілими коефіцієнтами) є нескоротний дріб $\frac{l}{m}$, тобто числа l і m - взаємoprості, l - дільник вільного члена a_n , m - дільник старшого коефіцієнта a_0 .

Якщо коренем многочлена $f(x)$ є ціле число, то це число є дільником вільного члена, інші корені – це ірраціональні або комплексні числа.

Дільників старшого коефіцієнта та вільного члена може бути багато. Тому, щоб полегшити розв'язок та не перебирати всі дроби, чи вони є коренем, сформулюємо ознаку, за якою ми зможемо відкинути деякі числа.

Такою ознакою для цілих коренів буде:

$$\frac{f(1)}{k-1} \text{ і } \frac{f(-1)}{k+1} \text{ є цілими числами і } k - \text{ ціле число.}$$

Проте, це тільки потрібна, але не достатня умова. Тобто не всі числа, які будуть задовільняти дану умову, будуть коренями $f(x) = 0$. Потрібно здійснити перевірку, наприклад, схемою Горнера.

Для того, щоб дріб $\frac{l}{m}$ ($l \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) був коренем даного багаточлена $f(x)$, потрібно, щоб виконувалась така умова :

$$\frac{f(1)}{l-m}, \frac{f(-1)}{l+m} - \text{цілі числа.}$$

Приклад 2.1

Знайти раціональні корені рівняння $4x^3 + x - 1 = 0$.

Розв'язання

$$f(x) = 4x^3 + x - 1$$

Дільниками вільного члена є: $-1 : \pm 1$

Дільниками старшого коефіцієнта є числа : $4 : 1, 2, 4$.

Перевіримо чи є коренями рівняння раціональні числа $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}$.

Скористаємося схемою Горнера.

Таблиця 2.1

	4	0	1	-1
1	4	4	5	4
-1	4	-4	5	-6
$\frac{1}{2}$	4	2	2	0

$$4x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 2x + 2)$$

$$4x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$D = -7 < 0$$

Отже, $x = \frac{1}{2}$ є коренем

Відповідь: раціональним коренем рівняння є число $\frac{1}{2}$.

Приклад 2.2

Знайдіть раціональні корені рівняння : $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36 = 0$

Розв'язання

$$f(x) = x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$$

Оскільки $a_0 = 1$, то рівняння має цілі корені, які є дільниками вільного члена 36.

Решту коренів даного рівняння є або ірраціональними числами або комплексними числами.

$$36: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 18; \pm 36$$

$$f(1) = 1 - 7 - 12 + 6 + 36 = 24$$

$$f(-1) = -1 + 7 - 12 - 6 + 36 = 24$$

Перевіримо чи виконується умова $\frac{f(1)}{l-m}, \frac{f(-1)}{l+m}$ – цілі числа.

$$\text{Тобто } \frac{24}{k-1} \text{ і } \frac{24}{k+1} \in \mathbb{Z}$$

$$2: \frac{24}{2-1} = 24 \in \mathbb{Z}, \frac{24}{2+1} = 8 \in \mathbb{Z}$$

$$-2: \frac{24}{-2-1} = -8 \in \mathbb{Z}, \frac{24}{-2+1} = -24 \in \mathbb{Z}$$

Перевіряючи усі дільники, отримаємо, що можливими коренями даного рівняння будуть числа 2; -2; 3 та -3.

За допомогою схеми Горнера перевіримо чи справді ці числа будуть коренями рівняння. (таб. 2.2)

Таблиця 2.2

	1	0	-7	-12	6	36
2	1	2	-3	-18	-30	-24
-2	1	-2	-3	-6	18	0
3	1	1	0	-6	0	

-3	1	-2	6	-24		
----	---	----	---	-----	--	--

$$x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36 = (x + 2)(x - 3)(x^3 + x^2 - 6)$$

$$x^3 + x^2 - 6 = 0$$

Дане рівняння не має раціональних коренів.

Відповідь : раціональними коренями є числа -2 та 3.

Приклад 2.3

Знайдіть раціональні корені рівняння $6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8 = 0$.

Розв'язання

$$f(x) = 6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8$$

Оскільки $a_0 = 8$, то раціональні корені знаходяться серед дробів, де чисельник дільник вільного члена, а знаменник – дільник старшого коефіцієнта.

$$8: \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8$$

$$6: 1; 2; 3; 6$$

Можливими коренями рівняння будуть числа $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm 2; \pm \frac{2}{3}; \pm 4; \pm \frac{4}{3}; \pm 8$

Перевіримо чи дані числа є коренями та чи $\frac{f(1)}{l-m}, \frac{f(-1)}{l+m}$ є цілими числами.

$$f(1) = 6 + 13 - 24 - 8 + 8 = -5$$

$$f(-1) = 6 - 13 + 24 - 8 + 8 = 17$$

$$13 - 24 + 8 + 8 = -5$$

$$\frac{1}{2}: \frac{-5}{1-2} = 5 \in Z; \frac{-15}{1+2} = -5 \in Z$$

$$-\frac{1}{2}: \frac{-5}{-1-2} = \frac{5}{3} \notin Z$$

$$\frac{1}{3}: \frac{-5}{1-3} = -\frac{5}{2} \notin Z$$

$$-\frac{1}{3}: \frac{-5}{-1-3} = \frac{5}{4} \notin Z$$

Перевірючи усі дільники, отримаємо, що можливими коренями будуть числа $\frac{1}{2}$; 2 ; $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; -4 . Використавши схему Горнера, перевіримо чи дані числа є коренями.

Таблиця 2.3

	6	13	-24	-8	8
2	6	25	26	44	96
$\frac{2}{3}$	6	17	$-\frac{38}{3}$	$-\frac{148}{9}$	$-\frac{80}{27}$
$-\frac{2}{3}$	6	9	-30	12	0
-4	6	-15	30	-108	
$\frac{1}{2}$	6	12	-24	0	

$$6x^4 + 13x^3 - 24x^2 - 8x + 8 = (x + \frac{2}{3})(6x^3 + 9x^2 - 30x + 12) = 3(x + \frac{2}{3})(2x^3 + 3x^2 - 10x + 4) = 3(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{2})(x^2 + 2x - 4)$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$D=20$$

Отже, раціональними коренями рівняння будуть числа $\frac{1}{2}$ та $-\frac{2}{3}$.

Приклад 2.4

$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = 0$. Знайдіть раціональні корені.

Розв'язання

$$f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$$

$$12: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$$

$$6: 1; 2; 3; 6$$

Можливими коренями є: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{4}{3}$.

Перевіримо чи дані числа є коренями.

$$f(1) = 6 + 19 - 7 - 26 + 12 = 4$$

$$f(-1) = 6 - 19 - 7 + 26 + 12 = 18$$

$$2: \frac{4}{2-1} = 4 \in Z; \frac{18}{2-1} = 18 \in Z$$

$$-2: \frac{4}{-2-1} = -\frac{4}{3} \notin Z$$

$$3: \frac{4}{3-1} = 2 \in Z; \frac{18}{3+1} = \frac{9}{2} \notin Z$$

$$-3: \frac{4}{-3-1} = -1 \in Z; \frac{18}{-3+1} = -9 \in Z$$

Перевіривши, отримаємо, що числа $2; -3; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}$ можуть бути раціональними коренями цього рівняння. Скористаємося схемою Горнера та перевіримо чи це так.

Таблиця 2.4

	6	19	-7	-26	12
2	6	31	55	84	180
-3	6	1	-10	4	0
$\frac{1}{2}$	6	4	-8	0	
$-\frac{1}{3}$	6	2	$-\frac{26}{3}$		

$$6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12 = (x + 3) \left(x - \frac{1}{2}\right) (6x^2 + 4x - 8) = 2(x + 3) \left(x - \frac{1}{2}\right) (3x^2 + 2x - 4)$$

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$D=52$$

Отже, раціональними коренями рівняння є числа -3 та $\frac{1}{2}$, всі інші корені ірраціональні або комплексні числа.

Дробові корені багаточлена $f(x)$ можна знайти наступним чином:

1. домножимо наш многочлен на a_0^{n-1}
2. зробимо заміну $a_0 x = y$
3. позначимо $a_0^{n-1} f(x) = g(y)$
4. знаходимо цілі корені
5. обчислюємо дробові корені за формулою $x = \frac{y}{a_0}$

Проте, у випадку коли $a_0 \geq 3$ та $n \geq 5$, то суттєво збільшуються коефіцієнти. Збільшується кількість дільників вільного члена.

Приклад 2.5

Задано рівняння $2x^4 - 6x^3 - x^2 + 5x - 6 = 0$. Знайти раціональні корені.

Розв'язання.

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 5x - 6$$

Домножимо обидві частини на 2^3 . Отримаємо:

$$2^3 \times 2x^4 - 2^3 \times 6x^3 - 2^3 \times x^2 + 2^3 \times 5x - 2^3 \times 6 = 2^3 \times f(x)$$

$$\text{Нехай } y = 2x. \text{ Тоді } g(y) = y^4 - 6y^3 - 2y^2 + 20y - 48$$

Знайдемо цілі корені.

$$48: \pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 3; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 16; \pm 24; \pm 48$$

$$g(1) = 1 - 6 - 2 + 20 - 48 = -35$$

$$g(-1) = 1 + 6 - 2 - 20 - 48 = -63$$

Перевіримо чи задовільняють корені умову:

$$\frac{g(1)}{k-1}, \frac{g(-1)}{k+1} \in Z$$

$$2: \frac{-35}{2-1} = -35 \in Z; \frac{-63}{2+1} = -21 \in Z$$

$$-2: \frac{-35}{-2-1} = -\frac{35}{3} \notin Z$$

Підставивши всі дільники вільного члена отримаємо можливі корені : 2; -4; 6; 8. Перевіримо дані корені за схемою Горнера.

Таблиця 2.5

	1	-6	-2	20	-48
2	1	-4	-10	0	-48
-4	1	-10	38	-132	480
6	1	0	-2	8	0
8	1	8	62	504	

Значить $a_1 = 6$. Цілими коренями $g(x) \in y_1 = 6$. Звідси дробовими коренями $f(x) \in x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Всі інші корені будуть ірраціональні або комплексні числа.

Відповідь: 3.

2.2 Роз'язування окремих типів рівнянь четвертого степенів і зворотні рівняння.

Деякі види рівнянь четвертого степеня доцільно розв'язувати певними методами. До таких рівнянь відносять зворотні та симетричні рівняння.

Зворотне рівняння четвертого степеня – це рівняння виду : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = 0, a \neq 0$, при чому $\frac{a}{m} = \frac{b^2}{d^2}; m \neq 0, a \neq 0$ – не є розв'язком даного рівняння.

Тому, щоб розв'язати рівняння такого типу потрібно поділити обидві частини рівняння на x^2 . Далі, зробивши заміну змінної, одержимо квадратне рівняння:

$$ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{m}{x^2} = 0$$

Згрупуємо і виносимо за дужки множники a і b . Одержимо:

$$a\left(x^2 + \frac{m}{ax^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$$

Оскільки $\frac{m}{a} = \frac{d^2}{b^2}$, то зробимо підстановку. Отримаємо:

$$a\left(x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2}\right) + b\left(x + \frac{d}{bx}\right) + c = 0$$

Зробимо заміну змінної, нехай $t = x + \frac{d}{bx}$. Піднесемо обидві частини до квадрату і отримаємо: $x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2} = t^2 - \frac{2d}{b}$.

Виконавши підстановку, отримаємо наступне рівняння:

$$a\left(t^2 - \frac{2d}{b}\right) + bt + c = 0$$

Розв'язуємо дане рівняння. Повертаємось до змінної x і одержуємо корені початкового рівняння.

Приклад 2.6

$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$. Розв'яжіть рівняння.

Розв'язання

$x = 0$ — не є коренем даного рівняння. Тому поділимо обидві частини рівняння на x^2 . Отримаємо :

$$x^2 + 2x + 5 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

Згрунтувавши і винісши за дужки, отримаємо таке рівняння:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 5 = 0$$

Зробимо заміну змінної $z = x + \frac{2}{x}$

$$z^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = z^2 - 4$$

Підставимо у рівняння і одержимо:

$$z^2 - 4 + 2z + 5 = 0$$

$$z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$z = -1$$

Повернемося до змінної x :

$$z = x + \frac{2}{x};$$

$$x + \frac{2}{x} = 1; \quad x^2 - x + 2 = 0, \quad D < 0.$$

Відповідь: рівняння не має коренів.

Приклад 2

Розв'язати рівняння $4y^4 - 16y^3 + 7y^2 - 32y + 16 = 0$

Поділимо дане рівняння на y^2 ($y = 0$ – не є розв'язком рівняння).

$$4\left(y^2 + \frac{4}{y^2}\right) - 16\left(y + \frac{2}{y}\right) + 7 = 0$$

Зробимо заміну змінної: $z = y + \frac{2}{y}$.

$$z^2 = y^2 + 4 + \frac{4}{y}; \quad y^2 + \frac{4}{y} = z^2 - 4$$

Підставивши у рівняння отримаємо таке рівняння:

$$4(z^2 - 4) - 16z + 7 = 0$$

$$4z^2 - 16 - 16z + 7 = 0$$

$$4z^2 - 16z - 9 = 0$$

$$D = \sqrt{256 - 4 * 4 * (-9)} = \sqrt{400} = 20$$

$$z_1 = \frac{16 - 20}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{16 + 20}{8} = \frac{9}{2}$$

Повернемося до змінної y

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y + \frac{2}{y} \\ \frac{9}{2} = y + \frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + y + 4 = 0 \\ 2y^2 - 9y + 4 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему отримаємо : $\begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases}$.

Відповідь: $x = 4, x = \frac{1}{2}$.

Приклад 2.7

$2x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$. Розв'яжіть дане рівняння.

Поділимо на x^2 , $x \neq 0$. Отримаємо $2x^2 + x - 7 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$.

Згрупуємо доданки:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0$$

Нехай $t = x - \frac{1}{x}$, тоді $t^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

Підставивши у рівняння отримаємо:

$$2(t^2 + 2) + t - 7 = 0$$

$$2t^2 + 4 + t - 7 = 0$$

$$2t^2 + t - 3 = 0$$

$$D = 1 - 4 * 2 * (-3) = 25$$

$$t_1 = \frac{-1 - 5}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$t_2 = \frac{-1 + 5}{4} = 1$$

Повернемося до заміни і отримаємо:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = -\frac{3}{2} \\ x - \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} = -\frac{3}{2} \\ \frac{x^2 - 1}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2 = -3x \\ x^2 - 1 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \\ x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}; -2; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Симетричні рівняння четвертого степеня – це рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + a = 0$, де $a \neq 0$. Коефіцієнти рівняння симетричні та рівні відносно середини многочлена. Алгоритм розв'язування таких рівнянь ідентичний розв'язку зворотніх рівнянь:

- 1) ділимо обидві частини на x^2 ;
- 2) групуємо доданки з однаковими коефіцієнтами;

3) ділимо на x^2 ($x = 0$ — не є розв'язком рівняння);

4) вводимо заміну змінної t ($t = x + \frac{1}{x}$): розв'язуємо рівняння відносно t ;

5) повертаємось до змінної x

Приклад. Розв'язати рівняння $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0$

Для даного рівняння $z = 0$ не є коренем. Тому поділимо дане рівняння на z^2 .

Отримаємо:

$$z^2 - 4z + 6 - \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 4\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$$

Нехай $t = z + \frac{1}{z}$

$$t^2 - z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$$

Підставимо дану заміну у наше рівняння:

$$t^2 - 2 - 4t + 6 = 0$$

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$D = 0, t = 2$$

Повертаємось до змінної z :

$$z + \frac{1}{z} = 2$$

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$D = 0, z = 1$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.8

Розв'язати рівняння $2z^4 + z^3 - 11z^2 + z + 2 = 0$

Розв'язання

Поділивши обидві частини рівняння на z^3 ($z = 0$ – не є коренем даного рівняння). Отримаємо:

$$2z^2 + z - 11 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} = 0$$

$$2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 11 = 0$$

Нехай $t = z + \frac{1}{z}$; $t^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$; $z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$

Підставивши у рівняння отримаємо:

$$2(t^2 - 2) + t - 11 = 0$$

$$2t^2 - 4 + t - 11 = 0$$

$$2t^2 + t - 15 = 0$$

$$t_1 = \frac{5}{2}; \quad t_2 = -3$$

Повертаючись до змінної x :

$$\begin{cases} z + \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \\ z + \frac{1}{z} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z^2 - 5z + 2 = 0 \\ z^2 + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ z = \frac{1}{2} \\ z = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, 2, \frac{1}{2}$.

Усі біквадратні рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x - змінна, a, b, c – числа, розв'язуються заміною змінної $x^2 = t$.

Приклад 2.9

Розв'язати рівняння:

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

Нехай $x^2 = t$, тоді матимемо рівняння

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 5 = 16$$

$$t_1 = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

Повернувшись до x отримаємо:

$$\begin{cases} x^2=1 \\ x^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Відповідь: $x \in \{-\sqrt{5}, -1; 1, \sqrt{5}\}$.

В деяких рівняннях візуально помітно, що деякі елементи цього рівняння можуть повторюватись декілька разів. Такі рівняння також розв'язуються методом заміни змінних.

Приклад 2.10

Розв'яжіть рівняння:

$$(2a - 1)^4 - 10(2a - 1)^2 + 16 = 0$$

В даному рівнянні вираз $2a - 1$ повторюється. Тому дане рівняння є біквадратним по відношенню до цього виразу.

Зробимо заміну $(2a - 1)^2 = t$. Тоді матимемо:

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$D = 100 - 64 = 36$$

$$t_1 = \frac{10 - 6}{2} = 2$$

$$t_2 = \frac{10 + 6}{2} = 8$$

Повернемо́сь до заміни:

$$\begin{cases} 2a-1=\sqrt{2} \\ 2a-1=-\sqrt{2} \\ 2a-1=\sqrt{8} \\ 2a-1=-\sqrt{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ a=-\frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ a=\frac{\sqrt{8}+1}{2} \\ a=-\frac{\sqrt{8}+1}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}+1}{2}, -\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{8}+1}{2}, -\frac{\sqrt{8}+1}{2}$.

2.3 Відокремлення кратних множників.

Будь –який многочлен можна подати у вигляді добутку многочленів нижчих степенів над деяким полем P , які будуть незвідними у полі $f(x) = [P_1(x)]^{k_1} \times [P_2(x)]^{k_2} \times [P_3(x)]^{k_3} \times \dots \times [P_m(x)]^{k_m}$. Для цього потрібно здійснити скінчене число раціональних дій над деякими многочленами.

Не всі незвідні множники , які будуть входити у це розкладання, мають бути різними. Незвідний многочлен може зустрічатися в розкладанні k разів. Такий многочлен називають k -кратним множником многочлена.

Число a в полі $P(x)$ тоді, коли $f(x)$ ділитиметься на $(x - a)^k$ і не буде ділитися на $(x - a)^{k+1}$. Тобто , необхідною і достатньою умовою, щоб число a було коренем кратності k потрібно, щоб $f(a) = f'(a) = \dots = f^{k-1}(a) = 0$, $f^k(a) \neq 0$.

Нехай канонічний розклад многочлена $f(x) \in P[x] = a_0 P_1^{k_1}(x) \times P_2^{k_2}(x) \times \dots \times P_m^{k_m}(x)$. Найбільша кратність множників нехай дорівнює s .

[В даному розкладі виберемо усі множники $P_1(x)$ кратність яких k_1 рівна одиниці. Добуток цих усіх множників ми позначимо символом $\varphi_1(x)$. Множники многочлена , кратність яких $k_1 = 2$ та взятих у першому степені, позначимо $\varphi_2(x)$ і так далі. А добуток множників, узятих по одному разу, які мають кратність s , позначимо через $\varphi_s(x)$.

Якщо ж даний многочлен $f(x)$ не матиме множників з кратністю k , то $\varphi_k(x)$.

Отже, многочлен $f(x)$ можна записати у вигляді $f(x) = a_0 \varphi_1(x) \times \varphi_2^2(x) \times \varphi_3^3(x) \times \dots \times \varphi_s^s(x)$. Процес відшукування такого розкладу- це відокремлення кратних множників.

Загальний алгоритм відокремлення кратних множників:

1. Знаходимо $f'(x)$.
2. Знаходимо найбільший спільний дільник.

$$\text{НСД}(f, f') = \frac{f(x)}{f'(x)} = d_1 \quad] \quad [1]$$

[При цьому оперуємо тим, що якщо многочлен $f(x)$ і похідна $f'(x)$ є взаємно простими, то многочлен не має кратних розв'язків, тобто $d_1=1$.

3. Поділимо даний многочлен $f(x)$ на $d_1(x)$. Позначимо V_1 .

$$V_1 = \frac{f(x)}{d_1(x)} \quad] \quad [2]$$

4. Записуємо отриману відповідь.

Якщо $f(x)$ має дійсні коефіцієнти, то і $f'(x)$ та $\text{НСД}(f, f')$ також матимуть дійсні коефіцієнти. Всі обчислення будемо виконувати в полі дійсних чисел. Проте, неявно використовується розклад над полем C .

Приклад 2.11

Відокремити кратні множники даного многочлена.

$$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$$

Розв'язання

1) Знайдемо похідну $f'(x)$:

$$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12$$

2) Знайдемо $\text{НСД}(f, f')$ многочленів $f(x)$ та $f'(x)$.

$$\frac{1}{6}f'(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

$$\text{НСД}(f, f') = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$	$x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
$x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x$	x
$-2x^2 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 \quad /(-2)$	
$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$	

$$\begin{array}{r|l}
x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 & x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\
x^5 + x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 2x & x - 1 \\
\hline
-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \\
-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Ми отримали НСД $(f, f') = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = d_1$.

Знаходимо $d_1': d_1' = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$.

Знайдемо d_2 НСД(d, d_1). Для цього поділимо d_1 на d_1' :

$$4x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 20x - 8 = 4d_1$$

$$4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 = d_1'$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 20x - 8 & 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\
4x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 5x & x \\
\hline
x^3 - 6x^2 - 15x - 8 & \\
4x^3 - 20x^2 - 60x - 32 & \\
\hline
4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 & \\
-27x^2 - 54x - 27 / 27 &
\end{array}$$

$$d_2 = x^2 + 2x + 1$$

Знайдемо d_3 НСД (d_2, d_2')

$$d_2' = 2x + 2$$

Поділимо d_2 на d_2' :

$$\begin{array}{r|l}
2d_2 = 2x^2 + 4x + 2 & \\
2x^2 + 4x + 2 & 2x + 2 \\
2x^2 + 2x & x + 1 \\
\hline
2x + 2 & \\
2x + 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Знайдемо $d_4 = \text{НСД}(d_3, d_3')$

$$d_4 = 1$$

Обчислюємо

$$V_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4}{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2} = \widetilde{o^2} - \tilde{0} - 2$$

$$V_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 4}{x^2 + 2x + 1} = \widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2$$

$$V_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \tilde{o} + 1$$

$$V_4(x) = \frac{d_3(x)}{d_4(x)} = \frac{x + 1}{1} = \tilde{o} + 1$$

Знаходимо шуканий многочлен:

$$F_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} = \frac{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2}{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2} = 1$$

$$F_2(x) = \frac{V_2(x)}{V_3(x)} = \frac{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2}{\tilde{o} + 1} = \tilde{o} - 2$$

$$F_3(x) = \frac{V_3(x)}{V_4(x)} = \frac{\tilde{o} + 1}{\tilde{o} + 1} = 1$$

$$F_4(x) = V_4(x) = \tilde{o} + 1$$

$$\uparrow \tilde{o} \text{ ce } \tilde{a}, F(x) = (\tilde{o} - 2)^2(\tilde{o} + 1)^4$$

Приклад 2.12

Знайти цілі кратні корені многочлена $x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$.

Розв'язання : $f(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8$

Знайдемо похідну $f'(x) = 5x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 20x - 4$

Знайдемо НСД(f, f') = d_1 . Для цього поділимо $f(x)$ на $f'(x)$

$$5f = 5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x^2 - 20x - 40$$

$\begin{array}{r} 5x^5 - 20x^4 + 5x^3 + 50x^2 - 20x - 40 \\ 5x^5 - 16x^4 + 3x^3 + 20x^2 - 4x \\ \hline -4x^4 + 2x^3 + 30x^2 - 16x - 40/2 \\ -2x^4 + x^3 + 15x^2 - 8x - 20/*(-5) \\ \hline 10x^4 - 5x^3 - 75x^2 + 40x + 100 \\ 10x^4 - 32x^3 + 6x^2 + 40x - 8 \\ \hline -27x^3 + 81x^2 - 108 /(-27) \end{array}$	$\begin{array}{r} 5x^4 + 16x^3 + 3x^2 + 20x - 4 \\ \hline x \end{array}$
---	--

$$d_1 = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$d_1' = 3x^2 - 6x$$

Поділимо d_1 на d_1' :

$$3d_1 = 3x^3 - 9x^2 + 12$$

$\begin{array}{r} 3x^3 - 9x^2 + 12 \\ 3x^3 - 6x^2 \\ \hline -3x^2 + 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3x^2 - 6x \\ \hline x \end{array}$
---	--

$$d_2 = x - 2$$

$$d_2' = 1$$

$$V_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4} = \widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2$$

$$V_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^2 - 6x} = \widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2$$

$$V_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x - 2}{1} = \tilde{o} - 2$$

$$F_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} = \frac{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2}{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2} = 1$$

$$F_2(x) = \frac{V_2(x)}{V_3(x)} = \frac{\widetilde{o^2} - \tilde{o} - 2}{\tilde{o} - 2} = \tilde{o} + 1$$

$$F_3(x) = V_3(x) = \tilde{o} - 2$$

Відповідь: $(x + 1)^2(x - 2)^3$.

Приклад 2.13

Відокремити кратні корені $x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 = 0$

Розв'язання

$$f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$$

$$\text{Знайдемо похідну } f'(x) = 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12$$

$$\text{Знайдемо НСД } (f, f') = d_1$$

Для цього поділимо $f(x)$ на $f'(x)$

$$5 * f(x) = 5x^5 + 30x^4 + 65x^3 + 70x^2 + 60x + 40$$

$\begin{array}{r} 5x^5 + 30x^4 + 65x^3 + 70x^2 + 60x + 40 \\ 5x^5 + 24x^4 + 39x^3 + 28x^2 + 12x \\ \hline 6x^4 + 26x^3 + 42x^2 + 48x + 40 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12 \\ \hline x + 1 \end{array}$
--	--

$$\frac{5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 20x + 28/* 5}$$

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12 \\ 5x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 100x + 140 \\ \hline 14x^3 + 24x^2 - 72x - 128/* 2 \\ 7x^3 + 12x^2 - 36x - 64 \end{array}$$

Поділимо знову:

$$\begin{array}{r} 5x^4 + 24x^3 + 39x^2 + 28x + 12/* 7 \quad 7x^3 + 12x^2 - 36x - 64/* 5 \\ 35x^4 + 168x^3 + 273x^2 + 196x + 84 \\ 35x^4 + 60x^3 - 180x^2 - 320x \\ \hline 108x^3 + 453x^2 + 516x + 84/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36x^3 + 151x^2 + 172x + 28 \\ 35x^3 + 60x^2 - 180x - 320 \\ \hline x^3 + 91x^2 + 352x + 348 \end{array}$$

Знову ділимо:

$$\begin{array}{r} x^3 + 91x^2 + 321x + 378/* 7 \quad 7x^3 + 12x^2 - 36x - 64 \\ 7x^3 + 627x^2 + 2464x + 2436 \\ 7x^3 + 12x^2 - 36x - 64 \\ \hline 625x^2 + 2500x + 2500/625 \end{array}$$

$$x^2 + 4x + 4 = d_1$$

Знайдемо НСД $(d, d_1') = d_2(x)$

$$d_1'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$$

Поділимо $d_1(x)$ на $d_1'(x)$

$x^2 + 4x + 4$	$x + 2$
$x^2 + 2x$	$x + 2$
$2x + 4$	
$2x + 4$	

$$d_2 = x + 2$$

$$d_3 = 1$$

Знаходимо $V_1(x), V_2(x), V_3(x)$:

$$V_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8}{x^2 + 4x + 4} = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

$$V_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x + 2$$

$$V_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x + 2}{1} = x + 2$$

Знаходимо $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$

$$F_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{x + 2} = x^2 + 2$$

$$F_2(x) = \frac{V_2(x)}{V_3(x)} = \frac{x + 2}{x + 2} = 1$$

$$F_3(x) = V_3(x) = x + 2$$

Даний многочлен $f(x) = (x^2 + 1)(x + 2)^3$

Відповідь: 3-х кратним коренем є число -2.

Приклад 2.14

Знайдіть кратні многочлени:

$$x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8 = 0$$

$$f(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$$

$$f(x)' = 5x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 48x + 20$$

Знайдемо НСД $(f, f') = d_1$

Поділимо $f(x)$ на $f'(x)$:

$$5f(x) = 5x^5 - 30x^4 + 80x^3 - 120x^2 + 100x - 40$$

$$5x^5 - 30x^4 + 80x^3 - 120x^2 + 100x - 40 \quad \left| \quad 5x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 48x + 20 \right.$$

$5x^5 - 24x^4 + 48x^3 - 48x^2 + 20x$	$x - 1$
$-6x^4 + 32x^3 - 72x^2 + 80x - 40$	
$-5x^4 + 24x^3 - 48x^2 + 48x - 20$	
$-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 20$	

Поділимо ще раз:

$$\begin{array}{r}
 -x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 32x - 20 : 5 \\
 5x^4 + 40x^3 + 120x^2 - 160x + 100 \\
 \hline
 5x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 48x + 20 \\
 \hline
 -16x^3 + 72x^2 - 112x + 80 : 8 \\
 \hline
 -2x^3 + 9x^2 - 14x + 10
 \end{array}$$

Поділимо:

$2x^3 + 9x^2 + 14x - 10 : 5$	$5x^4 - 24x^3 + 48x^2 - 48x + 20 : 2$
$10x^4 - 45x^3 + 70x^2 - 50x$	
$10x^4 - 48x^3 + 96x^2 - 96x + 40$	
$3x^3 - 26x^2 + 46x - 40$	

$3x^3 - 26x^2 + 46x - 40 : 10$	$10x^3 - 45x^2 + 70x - 50 : 3$
$30x^3 - 135x^2 + 210x - 150$	
$30x^3 - 260x^2 + 460x - 400$	
$125x^2 - 250x + 250$	

$$d_1 = x^2 - 2x + 2$$

$$d_1' = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

Знайдемо НСД $(d, d_1') = d_2(x)$

$x^2 - 2x + 2$	$x - 1$
$x^2 - x$	x
$-x + 2$	

$$d_2 = x - 2, d_2' = 1.$$

Знайдемо НСД $(d, d_1') = d_3(x)$

$$d_3 = x - 2$$

$$V_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = \frac{x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8}{x^2 - 2x + 2} = x^3 - 4x^2 + 6x - 2$$

$$V_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x(x - 2) + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$V_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$F_1(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}{x^2 - 2x + x} = x - 2$$

$$F_2(x) = \frac{V_2(x)}{V_3(x)} = \frac{x^2 - 2x + x}{1} = x^2 - 2x + x$$

$$f(x) = (x^2 - 2x + x)^2(x - 2)$$

Відповідь:

РОЗДІЛ 3. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

3.1 Метод Штурма

Існує кілька методів, для знаходження точного числа дійсних коренів. Усі методи доволі громіздкі. Найбільш зручним являється метод Штурма.

Даний спосіб використовують, для того щоб виокремити дійсні корені многочленів. Метод Штурма дозволяє знайти інтервали, яким належить рівно по одному кореню заданого рівняння. Надалі дану інформацію використовують для знаходження коренів чисельними методами.

В методі Штурму основну роль відіграє система багатьох многочленів Штурму – ряд Штурму.

[Послідовність многочленів з дійсними коефіцієнтами

$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ називається рядом Штурма на відрізку $[a, b]$, якщо ці многочлени мають такі властивості:

1. Останній многочлен $f_m(x)$ цього ряду не обертається на нуль на відрізку $[a, b]$.
2. Жодні два сусідні многочлени цього ряду не мають спільних дійсних коренів.
3. Якщо λ – дійсний корінь якого – небудь проміжного многочлена $f_k(x)$ (тобто $k \neq 0$ і $k \neq m$), тоді $f_{k-1}(\lambda)$ і проміжного многочлена $f_{k+1}(\lambda)$ мають протилежні знаки.
4. Якщо x , зростаючи, проходить через дійсний корінь многочлена $f_0(x)$, тоді добуток $f_0(x)$, тоді добуток $f_0(x)f_1(x)$ змінює знак з мінуса на плюс.] ст. 74 чарін

Візьмемо $\forall a \in R$. Визначимо знак значення кожної функції Штурма в точці a :

$$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)$$

та підрахуємо кількість $S(a)$ змін знаків у цьому ряді .

За теоремою Штурма кількість дійсних коренів p многочлена $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ дорівнює $p = S(a) - S(b)$ за умови, що a та b – дійсні числа, $a < b$, b не є коренями даного многочлена.

Якщо многочлен $P(x)$ не має кратних коренів, то для побудови ряду Штурма можна скористатися таким алгоритмом :

$$f_0(x) = P(x)$$

$$-f_1(x) = P'(x)$$

$-f_{k-1} = f_k(x)g_k(x) - f_{k+1}(x)$, $\deg f_{k+1} < \deg f_k$ – це остача відділення f_{k-1} на f_k , яка береться з протилежним знаком .

Останню дію треба повторювати до того часу поки не отримаємо нульовий многочлен. Ряд Штурма будуть утворювати всі не нульові многочлени f_k .

Приклад 3.1

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 1$ на проміжку $[0; 1]$. Знайти кількість коренів.

Для розв'язку потрібно буде скласти ряд поліномів із залишку від ділення $n - 2$ в цьому ряду $(n - 1)$ поліном .

Знайдемо першу похідну :

$$P'(x) = 6x^2 + 6x + 1$$

Наступний буде залишком від ділення $P(x)$ на $P'(x)$ і взятий з мінусом.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 + x - 1 & 6x^2 + 6x + 1 \\ 2x^3 + 2x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \\ \hline x^2 + \frac{2}{3}x - 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x + \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{1}{3}x - \frac{7}{6} \end{array}$$

Отже, $P_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 6x + 1 & \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \\ \hline 6x^2 + 21x & 18x - 45 \\ \hline -15x + 1 & \\ -15x - \frac{105}{2} & \\ \hline \frac{107}{2} & \end{array}$$

Отже, останній $P_2(x) = -\frac{107}{2}$

Знайдемо значення кожного з поліномів у лівій границі

$$P(0) = -1;$$

$$P'(0) = 1;$$

$$P_1(0) = \frac{7}{6};$$

$$P_2(0) = -\frac{107}{2}.$$

Підрахуємо скільки разів переходить плюс в мінус і мінус в плюс. В даному випадку два рази.

Знайдемо значення поліномів у правій границі $P(1) = 5; P'(1) = 13; P_1 = \frac{3}{2};$

$$P_2 = -\frac{107}{2}.$$

Кількість змін знаку один раз. За теоремою Штурма кількість коренів на заданому проміжку буде $N = 2 - 1 = 1$.

Приклад 3.2

Відокремити дійсні корені многочлена $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$, $f_0(x) = f(x)$.

Розв'язання

Межі дійсних коренів многочлена $f(x) \in l$:

$$l = 1 + \frac{10}{1} = 11$$

Отже, дійсні корені многочлена знаходяться в інтервалі $(-11; 11)$.

Знайдемо похідну:

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^3 - 20x$$

Оскільки функції Штурма визначаються з точністю до сталого додатнього множника, то

$$f'(x) = x^4 - 3x^3 - 4x$$

Поділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$. Отримаємо :

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2 & x^4 - 3x^2 - 4x \\ x^5 - 3x^3 - 4x^2 & x \\ \hline -2x^3 - 6x^2 + 2 & \end{array}$$

Отримаємо : $f_2(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

Поділимо $f_1(x)$ на $f_2(x)$. Отримаємо :

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^2 - 4x & x^3 + 3x^2 - 1 \\ x^4 + 3x^2 - x & x - 3 \\ \hline -3x^3 - 3x^2 - 3x & \\ -3x^3 - 9x^2 + 3 & \\ \hline 6x^2 - 3x - 3 & \end{array}$$

$$f_3(x) = -2x^2 + x + 1$$

Поділивши $f_2(x)$ на $f_3(x)$ одержимо значення $9x + 3$. Тоді $f_4(x) = -3x - 1$.

Поділивши $f_3(x)$ на $f_4(x)$ ми отримаємо $f_5(x) = -1$.

Ми побудували ряд функцій Штурма, а тепер дослідимо зміни знаків в ряді при різних значеннях x .

Таблиця 3.1

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$f_4(a)$	$f_5(a)$	$S(a)$
-11	-	+	-	-	+	-	4
11	+	+	+	-	-	-	1

Підставивши -11 в наше значення ми побачимо, що знак змінюється 4 рази.

Підставивши 11 – знак змінюється 1 раз $S(-11) - S(11) = 1$. Отже, на інтервалі $(-11; 11)$ многочлен має три дійсні корені.

Розбивши інтервал навпіл, ми обчислимо $S(0)$. Обчисливши ми побачимо, що знак змінюється три рази.

$S(-11) - S(0) = 4 - 3 = 1$. Це означає, що на проміжку $(-11; 0)$ многочлен $f(x)$ має один дійсний корінь.

$S(0) - S(11) = 3 - 1 = 2$, а це означає, що на інтервалі $(0; 11)$ даний многочлен має 2 дійсні корені.

Проте, ці інтервали ще зavelикі. Тому знайдемо більш точні.

Для цього поділимо навпіл інтервали, які утворились. Обчислимо число змін знаків в цих точках. Візьмемо точку $a = 5$ та $a = -5$. Підставивши та обчисливши ми отримаємо, що у точці $a = -5$ зміна знаків відбувалася 4 рази, а у точці $a = 5 - 1$ раз. Бачимо, що $S(-11) - S(5) = 4 - 4 = 0$ та $S(5) - S(11) = 0$, тому на інтервалах $(-11; -5)$ і $(5; 11)$ дійсних коренів нема.

Тому нам не потрібно далі їх досліджувати. Продовживши процес “звужування” проміжків, які містять дійсні корені отримаємо таку таблицю:

Таблиця 3.2

a	$f_0(a)$	$f_1(a)$	$f_2(a)$	$f_3(a)$	$f_4(a)$	$f_5(a)$	$S(a)$
-11	-	+	-	-	+	-	4
-5	-	+	-	-	+	-	4
-3	-	+	-	-	+	-	4
-1	-	-	+	-	+	-	4
0	+	0	-	+	-	-	3
1	-	-	+	0	-	-	2
2	-	-	+	-	-	-	2
3	+	+	+	-	-	-	1
5	+	+	+	-	-	-	1
11	+	+	+	-	-	-	1

Таким чином даний многочлен буде мати три дійсні корені, які будуть знаходитись в проміжках $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(2; 3)$.

Приклад 3.3

Скласти ряд Штурма та виділити дійсні корені з точністю до 10.

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$$

Розв'язання

$$f_0(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 14x + 8$$

$$f'(x) = f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4$$

Домножимо $f_0(x)$ на число 2

Поділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$. Отримаємо:

$$2x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 2 \quad \Bigg| \quad 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4$$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 4x \quad \bigg| \quad x - \frac{1}{2} \\
 \hline
 -x^3 - 7x^2 + 12x + 2 \\
 -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \\
 \hline
 -\frac{17}{2}x^2 + \frac{17}{2}x + 4 \\
 \hline
 -17x^2 + 17x + 8
 \end{array}$$

В систему Штурма записуємо остачу з протилежним знаком:

$$f_2 = 17x^2 - 17x - 8$$

Продовжимо ділення:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4 \quad \bigg| \quad 17x^2 - 17x - 8 \\
 2x^3 - 2x^2 - \frac{16}{17}x \\
 \hline
 -x^2 - \frac{103}{17}x + 4 \\
 -x^2 - \frac{103}{17}x + 4 \\
 \hline
 -x^2 + x + \frac{8}{17} \\
 \hline
 -\frac{120}{17}x + \frac{60}{17} \\
 \hline
 -2x + 1
 \end{array}$$

В систему Штурма візьмемо остачу з протилежним знаком .

$$f_3 = 2x + 1$$

Поділивши f_2 на f_3 отримаємо $f_4 = 1$

Знайдемо знаки ряду Штурма на $(-\infty; +\infty)$ включивши одразу точку 0.

Таблиця 3.3

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	S
--	-------	-------	-------	-------	-------	-----

$-\infty$	+	-	+	-	+	4
0	+	+	-	-	+	2
$+\infty$	+	+	+	+	+	0

Отже, на проміжку від $(-\infty; 0)$ многочлен буде мати два дійсні корені, і на проміжку $(0; +\infty)$ – також два дійсні корені.

Знаходимо границі коренів многочлена :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$$

$N = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, де B - найбільший модуль від'ємного коефіцієнта, k – номер першого від'ємного коефіцієнта, а a_0 – старший коефіцієнт .

Верхня границя додатніх коренів:

$$N = 1 + \frac{7}{1} = 8$$

$$\varphi(x) = f(-x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 1$$

$$N_1 = 1 + \sqrt{\frac{8}{1}} = 1 + 2\sqrt{2} < 4$$

Отже -4 – нижня границя від'ємних коренів

Таблиця 3.4

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	S
-4						
-3	+	-	+	-	+	4
-2	-	-	+	-	+	3
-1	-	+	+	-	+	3
0	+	+	-	-	+	2

1	+	−	−	+	+	1
2	−	−	+	+	+	1
3	−	+	+	+	+	1
4	+	+	+	+	+	0

Отже, рівняння має три корені, кожен з яких міститься у проміжку $(-3; 2)$,
 $(-1; 0)$, $(1; 2)$.

Відповідь: $x \in (-3; 2), (-1; 0), (1; 2)$.

3.2 Метод січних (метод хорд).

Ідея методу хорд розв'язання рівняння полягає в тому, що для початку ми вибираємо досить малий відрізок-дугу кривої $[a; b]$ і замінюємо його стягуючою хордою. Наближеним розв'язком нелінійного рівняння буде точка перетину цієї хорди з віссю абсцис.

Потрібно розглядати два випадки: коли перша похідна і друга похідна рівняння мають однакові знаки та коли перша похідна і друга похідна мають різні знаки.

Розглянемо перший випадок, коли $f'(x)f''(x) > 0$

Нехай шукане приближене значення кореня є x_1 точка перетину хорди з віссю OX , $f(a) < 0$ і $f(b) > 0$ точки $A[a; f(a)]$ і $B[b; f(b)]$ – точки перетину хорди AB з віссю OX . Для того, щоб знайти дійсний корінь рівняння $f = 0$, ізолюваного на відрізку $[a; b]$, скористаємося формулою

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \quad (3.1)$$

Якщо знайдене значення нас не влаштовує, то його можна покращити. Для цього ми застосовуємо метод хорд уже до відрізка $[x_1; b]$ і знаходимо x_2 – точка перетину хорди A_1B з віссю OX ($A_1(x_1; f(x_1))$, $B(b; f(b))$)

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} * f(x_1) \quad (3.2)$$

Такі дії ми можемо продовжувати далі, поки не отримаємо послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots$, яка буде найбільше збігатися до точного розв'язку рівняння (поки не буде досягнуто завдання степеня точності).

Тепер розглянемо другий випадок, коли $f'(x)f''(x) < 0$

У цьому випадку знаходження наближеного значення до кореня здійснюється з правого боку межі відрізка $[a; b]$ і обчислюється за формулою

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1-a}{f(x_1)-f(a)} * f(x_1) \quad (3.3)$$

Вибір формули для розв'язку залежить від того, яка з точок A або B є нерухома

Нерухомим кінцем відрізка $[a ; b]$, для якого знак функції $f(x)$ і другої похідної збігаються . При цьому другий кінець відрізка ми приймаємо за початкове x_0 наближення до кореня .

Весь процес методу січних продовжується до того часу , поки модуль різниці двох сусідніх наближених значень не стане меншим за задану похибку обчислення .

Приклад 3.4

Знайти розв'язок рівняння $x^3 + x - 5 = 0$ на проміжку $[0,5;2]$ з точністю до 0,01.

Знаходимо знаки першої та другої похідної в точці $x = 0,5$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f'(0,5) = 3 * 0,5^2 + 1 - 1,75 > 0$$

$$f''(x) = 6 * x$$

$$f''(0,5) = 3 > 0$$

Оскільки $f'(x)f''(x) > 0$, то в якості нерухомої точки вибирається точка

$a = 0,5$. Обчислення будемо виконувати за формулою (3.1)

$$x_1 = 0,5 - \frac{2 - 0,5}{5 + 4,375} * (4,375) = 1,2$$

$$|x_1 - a| = |1,2 - 0,5| = 0,7$$

Ми бачимо, що умова задачі не виконується. Тому переходимо до ітерації номер два:

$$f(1,2) = (1,2)^3 + 1,2 - 5 = -2,072$$

$$x_2 = x_1 - \frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} * f(x_1) = 1,2 - \frac{2 - 1,2}{5 + 2,072} * (-2,072) = 1,434$$

$$|x_2 - x_1| = 0,234$$

Як бачимо , умова не виконується. Тому продовжимо ітераційні процеси далі.

$$f(1,434) = - 0,416$$

$$x_3 = 1,434 - \frac{2-1,434}{5+0,416} * (-0,416) = 1,496$$

$$|x_3 - x_2| = |1,496 - 1,434| = 0,062$$

$$f(1,496) = -0,156$$

$$x_4 = 1,496 - \frac{2-1,496}{5+0,156} * (-0,156) = 1,511$$

$$|x_4 - x_3| = 0,015$$

$$f(1,511) = -0,039$$

$$x_5 = 1,511 - \frac{2-1,511}{5+0,039} * (-0,039) = 1,515$$

$$|x_5 - x_4| = 0,004$$

Отже, корінь даного рівняння з точністю до 0,01 буде 1.52.

Відповідь: $x=1,52$.

Приклад 3.5

Знайти наближене значення дійсного кореня рівняння $x^3 - 10x + 5 = 0$ ізольованого на проміжку $[0; 0,6]$ з точністю до 0,01. Оцінити похибку наближеного значення x .

Розв'язання.

Знайдемо першу та другу похідну:

$$f'(x) = 3x^2 - 10$$

$$f''(x) = 6x$$

Знайдемо значення $f(x)$ в точці $x=0$ та $x=0,6$.

$$f(0) = 0 - 10 * 0 + 5 = 5$$

$$f(0,6) = (0,6)^3 - 10 * (0,6) + 5 = -0,784$$

Скористаємося формулою (3.1) і знайдемо перше наближене значення дійсного кореня рівняння:

$$x_1 = 0 - \frac{(0,6 - 0)}{-0,784 - 5} * 5 = 0,52$$

Знайдемо $f(x)$ в точці $x_1=0,52$:

$$f(0,52) = -0,059 < 0$$

Новим інтервалом ізоляції буде $(0;0,52)$. Знайдемо другий наближений корінь:

$$x_2 = 0 - \frac{(0,52 - 0)}{-0,059 - 5} * 5 = \frac{2,6}{5,059} = 0,51$$

Знайдемо похибку цього наближеного значення за формулою:

$$|\bar{x} - x_2| < -\frac{1}{2} f(a) * f(b) \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{f''(x)}{(f''(x))^3} \right|,$$

$$a=0, b=0,52$$

$$|\bar{x} - x_2| < \frac{5*0,059}{2} \max_{0 < x < 0,52} \left| \frac{6*x}{(3x^2-10)^3} \right|$$

На заданому інтервалі $\left| \frac{6*x}{(3x^2-10)^3} \right| - \frac{6*x}{(10-3x^2)^3}$ ця функція має найбільше значення при $x=0,52$. Таким чином :

$$|\bar{x} - x_2| < 0,1475 * \frac{3,12}{(10-0,8112)^3}$$

$$|\bar{x} - 0,51| < 0,0006$$

Звідси слідує, що в наближеному значенні кореня $x_2=0,51$ обидва знаки будуть вірними.

Приклад 3.6

Методом хорд знайти додатній корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01

Розв'язання.

$$f(1) = -5 < 0$$

$$f(1,7) = 0,952 > 0$$

Отже, додатній корінь буде знаходитись на проміжку $(1;1,7)$, $x_0 = 1$

Знайдемо перше наближене значення кореня за формулою (3.1).

$$x_1 = 1 - \frac{(1,7-1)*f(1)}{f(1,7)-f(1)} = 1 - \frac{0,7*(-5)}{0,9521-(-5)} = 1,588$$

Обчислимо значення $f(x)$ в точці $x_1 = 1,588$.

$f(1,588) = -0,817 < 0$, тому застосуємо повторно метод хорд уже на проміжку $(1,588; 1,7)$.

Отримаємо:

$$x_2 = 1,588 - \frac{(1,7-1,588)*f(1,588)}{f(1,7)-f(1,588)} = 1,639$$

Знайдемо значення $f(x)$ в точці $x_2 = 1,639$.

$$f(1,639) = -0,062 < 0$$

Як бачимо значення менше нуля, Тому застосуємо ще раз метод хорд і знайдемо наближене значення x_3 .

$$x_3 = 1,639 - \frac{(1,7-1,639)*f(1,639)}{f(1,7)-f(1,639)} = 1,642$$

Обчислимо $f(x)$ в точці $x_3 = 1,642$: $f(1,642) = -0,01$

Шукаємо четверте наближене значення:

$$x_4 = 1,642 - \frac{(1,7-1,642)*f(1,642)}{f(1,7)-f(1,642)} = 1,643$$

Обчислимо значення функції $f(x)$ в точці $x_4 = 1,643$: $f(1,643) = 0,004 > 0$

Отже, корінь даного рівняння з точністю до 0,01 буде 1,64.

Відповідь: 1,64

Приклад 3.7

Методом хорд знайти наближене значення кореня рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$ похибкою до 0,01.

Розв'язання.

Знайдемо інтервал якому буде належати корінь рівняння:

$$f(0) = -5 < 0$$

$$f(1) = -6 < 0$$

$$f(2) = -1 < 0$$

$$f(3) = 16 > 0$$

Шукати наближене значення кореня будемо на проміжку $[2;3]$.

Знайдемо похідну другого порядку та обчислимо її значення у точці $x = 2$ та $x = 3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f(2) = 2^3 - 2 * 2 - 5 = 8 - 9 = -1 < 0$$

$$f''(2) = 6 * 2 = 12 > 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2 * 3 - 5 = 16 > 0$$

$$f''(3) = 6 * 3 = 18 > 0$$

Нерухомий кінець є у точці $b = 3$, тому за $x_0 = a$ ми приймамо 2. Знаходимо x_1 за формулою (3.1):

$$x_1 = 2 - \frac{(3-2)*f(2)}{f(3)-f(2)} = 2 + \frac{1}{17} = 2,06$$

$$|x_1 - x_0| = |2,06 - 2| = 0,06 > \varepsilon$$

Знайдемо x_2 та x_3 :

$$f(2,06) = (2,06)^2 - 2 * 2,06 - 5 = -0,38$$

$$x_2 = 2,06 - \frac{(3-2,06)*f(2,06)}{f(3)-f(2,06)} = 2,082$$

$$|x_2 - x_1| = |2,082 - 2,06| = 0,022 > \varepsilon$$

$$f(2,082) = -0,139$$

$$x_3 = 2,082 - \frac{(3-2,082)*f(2,082)}{f(3)-f(2,082)} = 2,09$$

$$|x_3 - x_2| = |2,09 - 2,082| = 0,008 < \varepsilon$$

Відповідь: наближене значення кореня на проміжку $[2;3]$ з точністю до 0,01 є число 2,09.

Приклад 3.8

Скориставшись методом хорд відшукайте наближений корінь рівняння:

$$x^4 + 3x - 20 = 0, \varepsilon = 0,01.$$

Розв'язання.

Згідно попередніх обчислень наближене значення кореня будемо шукати на проміжку $[1; 2]$. Знайдемо першу і другу похідну:

$$f'(x) = 4x^3 + 3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$f(2) = 2 > 0$ і $f''(x)$ - завжди більше нуля при будь-якому значенні x . Тому точка $b = 2$ є не рухомим кінцем, а $x_0 = a$ ми приймаємо за 1.

Обчислимо x_1 за формулою (3.1):

$$x_1 = 1 - \frac{(2-1)*(-16)}{2-(-16)} = 1 + \frac{16}{18} = 1,889$$

$$|x_1 - x_0| = |1 - 1,889| = 0,889 > \varepsilon$$

Застосуємо повторно метод дотичних.

$$f(1,889) = -1,6$$

$$x_2 = 1,889 - \frac{(2-1,889)*f(1,889)}{f(2)-f(1,889)} = 1,889 - \frac{0,111*(-1,6)}{2-(-1,6)} = 1,938$$

$$|x_2 - x_1| = |1,938 - 1,889| = 0,049 > \varepsilon$$

Продовжимо обчислення.

$$f(1,938) = (1,938)^4 - 3 * (1,938) - 20 = -0,08$$

Використаємо формулу (3.2).

$$x_3 = 1,938 - \frac{(2-1,938)*f(1,938)}{f(2)-f(1,938)} = 1,938 - \frac{(-0,00496)}{2-(-0,08)} = 1,938$$

$$|x_3 - x_2| = |1,938 - 1,938| = 0 < \varepsilon$$

Відповідь : наближеним коренем рівняння з похибкою 0,01 є число 1,94.

3.3 Метод дотичних (метод Ньютона).

Метод дотичних геометрично тотожний заміні невеликої дуги кривої дотичною, проведеною до деякої точки кривої. Точка перетину дотичної з віссю OX буде перше наближення кореня.

Нехай дійсний корінь рівняння $f(x)=0$ ізольований на відрізку $[a; b]$. Візьмемо на даному відрізку таке число x_0 , при якому $f(x_0)$ має такий же знак як і $f''(x)$, тобто $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

За x_0 також може бути прийнятий той кінець відрізка $[a; b]$, на якому виконується ця умова.

В точці $M_0[x_0; f(x_0)]$ проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$. За наближене значення кореня приймаємо точку перетину цієї дотичної з віссю OX . Для знаходження наближеного значення кореня використовується формула:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.4)$$

Застосувавши цей прийом повторно в точці $M_1(x_1, f(x_1))$ знайдемо:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (3.5)$$

і так далі. Процес потрібно здійснювати до тих пір, поки не отримаємо значення кореня із ступенем точності, який нам заданий.

Метод Ньютона зручно застосовувати коли графік даної функції має велику крутість в околі цього кореня. Оскільки чим більше значення похідної $f'(x)$ в околі даного кореня, тим меншою буде поправка, яку потрібно буде врахувати.

Якщо ж числове значення похідної біля кореня мале, то поправки будуть великими. Процес уточнення кореня у цьому випадку буде тривалим.

У випадку, коли крива поблизу точки перетину з віссю абсцис майже горизонтальна, використовувати даний метод не рекомендується.

Якщо похідна $f'(x)$ на відрізку $[a; b]$ мало що змінюється, то достатньо обчислити значення похідної $f'(x_0)$ один раз і для обчислень використовувати формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (3.6)$$

Приклад 3.9

Методом дотичних знайти наближене значення кореня рівняння $x^4 - 8x + 1 = 0$ ізольованого на проміжку $[1,6; 2]$ з точністю до 0.01. Оцінити похибку наближеного значення x .

Розв'язання.

Знайдемо першу та другу похідну рівняння:

$$f'(x) = 4 * x^3 - 8$$

$$f''(x) = 12 * x^2$$

Знайдемо значення $f(x)$ в точці $x=1,6$ та $x=2$

$$f(1,6) = (1,6)^4 - 8 * 1,6 + 1 = -5,246 < 0$$

$$f(2) = 2^4 - 8 * 2 + 1 = 1 > 0$$

$f''(x)$ при будь-якому значенні x буде більше нуля, $f(2) * f''(2) > 0$, тому за x_0 приймаємо 2.

Скористаємося формулою (3.4).

$$x_1 = 2 - \frac{1}{4 * 2^3 - 8} = 2 - \frac{1}{24} = 1,96$$

Знайдемо друге наближене значення:

$$f(1,96) = (1,96)^4 - 8 * 1,96 + 1 = 0,08$$

$$f'(1,96) = 4 * (1,96)^3 - 8 = 22,12$$

$$x_2 = 1,96 - \frac{0,08}{22,12} = 1,96 - 0,0036 = 1,9564 \approx 1,96$$

Оцінимо похибку знайденого наближеного значення кореня:

$$|\bar{x} - x_2| = \frac{(f(x_2))^2}{2} \max_{1,6 \leq x \leq 2} \left| \frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \right|$$

В інтервалі (1,6;2) маємо:

$$\left| \frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \right| = \left| \frac{12x^2}{(4x^3 - 8)^3} \right| = \frac{3x^2}{16(x^3 - 2)^3}$$

В середині проміжка [1,6; 2] функція $\frac{x^2}{(x^3 - 2)^3}$ не має екстремумів. При $x=1,6$ дана функція досягає найбільшого значення.

$$|\bar{x} - 1,96| < \frac{(0,08)^2}{2} * \frac{3 * (1,6)^2}{16 * ((1,6)^3 - 2)^3}$$

$$|\bar{x} - 1,96| < \frac{(0,08)^2}{2} * \frac{7,68}{147,33}$$

$$|\bar{x} - 1,96| < 0,0002$$

З цього слідує, що в найближчому значенні кореня 1,96 всі цифри вірні.

Приклад 3.10

Знайти наближене значення кореня рівняння $x^4 - 16x - 64 = 0$ з похибкою $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання.

Знаходимо інтервал на якому буде знаходитись наближений корінь рівняння.

$$f(0) = 0 - 16 * 0 - 64 = -64 < 0$$

$$f(1) = 1 - 16 * 1 - 64 = -79 < 0$$

$$f(2) = 2^4 - 16 * 2 - 64 = -80 < 0$$

$$f(3) = 3^4 - 16 * 3 - 64 = -31 < 0$$

$$f(4) = 4^4 - 16 * 4 - 64 = 128 > 0$$

Зміна знаку відбувається на проміжку [3; 4]. Тому проміжком в якому лежить корінь- це проміжок [3; 4].

За x_0 ми беремо 4. Знайдемо $f'(x)$ і обчислимо в точці $x = 4$.

$$f'(x) = 4x^3 - 16$$

$$f'(4) = 4 \cdot 4^3 - 16 = 240$$

$$\text{Знайдемо } x_1: x_1 = 4 - \frac{128}{240} = 3,466$$

$$|x_1 - x_0| = |3,466 - 4| = 0,534 > \varepsilon$$

Аналогічно знаходимо x_2 та x_3 .

$$f(3,466) = (3,466)^4 - 16 \cdot 3,466 - 64 = 24,86$$

$$f'(3,466) = 4 \cdot (3,466)^3 - 16 = 150,5504$$

$$x_2 = 3,466 - \frac{24,86}{150,5504} = 3,301$$

$$|x_2 - x_1| = |3,301 - 3,466| = 0,17 > \varepsilon$$

$$x_3 = 3,301 - \frac{(3,301)^4 - 16 \cdot (3,301) - 64}{4 \cdot (3,301)^3 - 16} = 3,286$$

$$|x_3 - x_2| = 0,015 > \varepsilon$$

$$\text{Знайдемо } x_4: x_4 = 3,286 - \frac{(3,286)^4 - 16 \cdot (3,286) - 64}{4 \cdot (3,286)^3 - 16} = 3,286$$

$$|x_4 - x_3| = 0 < \varepsilon$$

Отже, виконується умова похибки, тому наближеним коренем є 3,286.

Приклад 3.11

Використавши метод дотичних знайдіть розв'язок рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання

$$f(x) = x^4 - 2x - 4$$

Знайдемо $f'(x)$ та $f''(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 2$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Обчислимо $f(x)$ та $f''(x)$ при $x_0 = 1,7$:

$$f(1,7) = 0,952 > 0$$

$$f''(1,7) = 34,68 > 0$$

Оскільки $f(1,7) > 0$ та $f''(1,7) > 0$, то скористаємося формулою (3.4):
 $f'(1,7) = 17,652$

$$x_1 = 1,7 - \frac{0,952}{17,652} = 1,646$$

Застосуємо ще раз метод дотичних:

$$f(1,646) = 0,048$$

$$f'(1,646) = 4 * (1,646)^3 - 2 = 15,838$$

Знайдемо x_2 за формулою(3.5):

$$x_2 = 1,646 - \frac{0,048}{15,838} = 1,643$$

Застосовуємо метод дотичних знову і знаходимо x_3 .

$$f(1,643) = 0,004$$

$$f'(1,643) = 4 * (1,643)^3 - 2 = 15,74$$

$$x_3 = 1,643 - \frac{0,004}{15,74} = 1,6427$$

Оскільки за умовою нам потрібно знайти корінь з точністю до 0.01, то цим коренем є число 1,64.

Відповідь: 1,64.

Приклад 3.12

За допомогою методу дотичних знайти наближений розв'язок рівняння $x^4 + 3x - 20 = 0$, $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання.

Знайдемо інтервал в якому буде знаходитись наближене значення кореня.

$$f(0) = -20 < 0$$

$$f(1) = 1 + 3 - 20 = -16 < 0$$

$$f(2) = 16 + 6 - 20 = 2 > 0$$

Оскільки $f(1) < 0$, а $f(2) > 0$, то інтервал, який потрібно розглядати, є $[1; 2]$.

За x_0 ми беремо число 2. Знайдемо $f'(x)$ та обчислимо в точці $x_0 = 2$.

$$f'(x) = 4x^3 + 3$$

$$f'(2) = 4 * 2^3 + 3 = 35$$

Використаємо формулу (3.4):

$$x_1 = 2 - \frac{2}{35} = 1,94$$

$$|x_1 - x_0| = |1,94 - 2| = 0,06 > \varepsilon$$

Застосуємо ще раз метод дотичних і знайдемо x_2 .

$$f(1,94) = (1,94)^4 + 3 * (1,94) - 20 = -0,015$$

$$f'(1,94) = 4 * (1,94)^3 + 3 = 32,2$$

$$x_2 = 1,94 - \frac{-0,015}{32,2} = 1,94$$

$$|x_2 - x_1| = |1,94 - 1,94| = 0 < \varepsilon$$

Відповідь: шуканий корінь з точністю 0,01 на проміжку $[1; 2]$ є $x = 1,94$.

ВИСНОВОК

Методи розв'язування рівнянь в основній школи відіграє велике методичне значення.

Актуальність моєї теми визначається тим, що не кожне рівняння можна розв'язати здійснивши певні перетворення чи за допомогою вдалої заміни змінної привести дане рівняння до такого, яке вже має певний алгоритм розв'язку. При розв'язуванні рівнянь інколи слід знайти зачіпку, яка допоможе обійти складні заміни та обчислення.

Дана робота містить багато розв'язаних прикладів розв'язування кубічних рівнянь, а також рівнянь вищих степенів.

У першому розділі подано загальні відомості про поняття кубічного рівняння, повне і не повне рівняння.

У другому розділі наведено приклади розв'язування рівнянь вищих степенів, зокрема Схема Горнера, відокремлення кратних множників.

У третьому розділі показано наближені методи розв'язування рівнянь вищих степенів.

Отже, дана робота є цікавою для учнів, які цікавляться темою "Рівняння" або готуються до самостійних чи контрольних робіт, а також для підготовки до олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- 1 Алгебра . Основи алгебраїчних структур . Навчальний посібник /Т. В. Авдєєва, В. М. Горбачук.- К.: НТУУ « КПП», 2015.- 79 с.- Бібліогр,; с. 79.-100 пр.
- 2 Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір. Алгебра : підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти, 2-ге видання, перероблене, Харків «Гімназія» 2021р.-383с.
- 3 Збірник задач з теорії многочленів.[Навчальний посібник для студентів фізико- математичного факультету]. За редакцією І. О. Рокіцького , Вінниця, 2004 р.-139 с.
- 4 Математика : довідник для абітурієнтів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів/О.Г. Гайштут, Р. П. Ушаков, О.А. Шамович.-2-е вид., випр.-Київ : Літера ЛТД ,2018.-624 с.
- 5 Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень : підруч . Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти /А. Г. Мерзляк , Д. А. Номіровський , В. Б. Полонський та ін.-Х.: Гімназія , 2019.-304 с.: іл.
- 6 Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А. Г. мерзляк, Д. А. Номіровський , В. Б. Полонський, М. С. Якір.- Х.: Гімназія , 2018.-400 с.: іл.
- 7 Михалевич В. М. Елементарна математика. Алгебра. Новітні інформаційні технології навчання (Maple). Ч.1: практикум./ В.М.Михалевич , А.Ф. Дода.- Вінниця: ВНТУ, 2010.-130 с.
- 8 Нелін С. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), підруч. для 10 кл. закл. Загал. Серед. Освіти /С. П. Нелін – Харків: Вид-во «Ранок» ,2018 – 272 с.; іл.
- 9 Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Посібник для учнів серед. Закладів освіти/ За ред. М. Й. Ядренка.- К.:Техніка, 1999.- 504 с.
- 10 Чарін В. С. Лінійна алгебра.- К.:Техніка, 2004.- 416 с.
- 11 <https://uk.wikipedia.org>
- 12 <https://disted.edu.m/courses/learn/6338>
- 13 <https://zachnik-com.com/spravochnik/matematika/systems/reshenie-kubicheskikh-uravnenij/>
- 14 <https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/24252>
- 15 <https://s5e6b6deda89eb439.jimcontent.com>n>

