

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти на тему:

**«Формування математичних компетентностей учнів в процесі
розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей»**

Виконав:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)З-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (математика)

Курилюк М.Я.

Керівник: канд. екон. наук, доцент

Никифорчин І.В.

Рецензент:

м. Івано-Франківськ – 2023 р.

АНОТАЦІЯ

Магістерська робота викладена на 82 сторінки, вона містить 5 розділів, 58 задач, 20 рисунків, 15 джерел в переліку.

Об'єктом дослідження є процес навчання алгебри та початків аналізу у 10-11 класах.

Мета роботи: розробити методику навчання розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, розробити курс, який допоможе сформувати в учнів вміння підібрати та застосовувати різні методи до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, розглянути різні методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей. Вміння використовувати необхідні прийоми та методи під час розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей дозволить учням вирішувати їх на свідомій основі, обирати найбільш відповідний спосіб розв'язування.

Структура роботи: магістерська робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновку, списку використаної літератури.

Ключові слова: математика, рівняння, нерівність, ірраціональні нерівності, ірраціональні рівняння.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	6
РОЗДІЛ 2. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І СПОСОБИ ЇХ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ	10
2.1 Рівносильні рівняння та рівняння наслідки. Розв’язування ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня.....	10
2.2 Метод заміни змінних при розв’язуванні ірраціональних рівнянь	21
2.3 Інші методи розв’язування ірраціональних рівнянь.....	26
РОЗДІЛ 3. ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ	34
3.1 Ірраціональні нерівності і особливості їх розв’язування.....	34
3.2 Метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня	38
3.3 Метод введення нових змінних	44
3.4 Розв’язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів	46
РОЗДІЛ 4. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ	51
РОЗДІЛ 5. РОЗРОБКА КУРСУ.....	61
ВИСНОВОК	79
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	81

ВСТУП

Математика є одним із основних шкільних предметів. Для досконалої самореалізації особистості у теперішньому житті потрібно хоча б володіти базовими знаннями з математики. А якщо випускник планує тісно пов'язати майбутню професію з даною наукою, то для цього вимагається більш повне засвоєння теорії, законів, понять і застосування інноваційних технологій у процесі навчання та під час дослідницької і проектної діяльності у колі математики.

Математична компетенція школяра допомагає цілком відповідно використовувати математику для вирішення проблем у повсякденному житті. Зокрема, математичну компетентність С.А. Раков позначає як «уміння розуміти метод і зміст математичного моделювання, застосовувати математику в реальному житті».

Проблема активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів – одна із актуальних на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії і практики.

Актуальність дослідження. В даний час йде становлення нової системи освіти, орієнтованої на входження у світовий освітній простір. Відбуваються істотні зміни у педагогічній теорії та практиці навчально-виховного процесу. Зміст освіти збагачується новими процесуальними вміннями, розвитком здібностей оперувати інформацією, творчо вирішувати педагогічні проблеми.

Матеріал, який пов'язаний з рівняннями та нерівностями становить значну частину шкільного курсу математики. Одним із складних розділів алгебри, що вивчається у шкільній програмі є ірраціональні рівняння та нерівності. На вивчення цієї теми у програмі середньої школи відводиться мінімум годин, що не відповідає необхідному обсягу для засвоєння матеріалу. Тема "Ірраціональні рівняння та нерівності" вивчається тільки в ознайомлювальному порядку.

Учні недостатньо володіють умінням вирішувати ірраціональні рівняння та нерівності, часто допускаються помилок при їх вирішенні. Проблеми щодо

такого виду рівнянь і нерівностей пов'язані з відсутністю чіткого алгоритму розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей. У більшості випадків у школі використовують тотожні перетворення, що призводить до виникнення помилок, які зазвичай пов'язані із втратою або появою сторонніх коренів у процесі розв'язання. Тому необхідно розглянути такі ситуації.

Вище викладене зумовило проблему дослідження: навчити школярів розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, при цьому використовуючи основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей різних видів. Переорієнтація методики на формування в учнів відповідних математичних компетентностей є одним із шляхів вирішення даної проблеми.

Завдання дослідження:

1. Провести аналіз наукової та методичної літератури;
2. Розглянути основні теоретичні основи вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей, а також, методи їх розв'язування;
3. Розглянути та розв'язати приклади по заданій темі;
4. Розробити курс для учнів, щоб поглибити знання із даної теми та сформувати в учнів вміння застосовувати правильний метод до відповідного рівняння, чи нерівності.

РОЗДІЛ 1

ПОНЯТТЯ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

З поняттям ірраціональності учні зустрічаються, під час знайомства з коренем числа в рамках теми «Квадратні корені. Дійсні числа», що здебільшого відбувається на уроках алгебри у 8 класі. Звідси, ми розуміємо, що поняття ірраціональності тісно пов'язане з коренем. На цій стадії учні вже розглядають приклади ірраціональних чисел, раціональних чисел. Дають означення раціонального числа, дійсного числа, ірраціонального числа. Розв'язують вправи, які пророкують використання означення арифметичного квадратного кореня з числа. У шкільному курсі математики проблеми ірраціональних чисел не передбачають глибокого вивчення.

Тема «Ірраціональні рівняння та нерівності» не є легкою на засвоєння. Вона вивчається у період з 8 по 11 клас, що дає змогу брати до уваги можливості учнів на момент формування умінь та навичок, але на вивчення даної теми виділяють мало часу. Насамперед, потрібно відзначити, що під час викладання теми реалізуються загальні методичні особливості, притаманні для курсу. У підручниках з алгебри за 8 і 9 клас, під час вивчення квадратного кореня та його властивостей розв'язуються, переважно, рівняння виду $\sqrt{f(x)} = a$, де $f(x)$ – многочлен від x , a – деякі числа.

У підручнику «Алгебра» 8 клас, авторами якого є Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С., рекомендують запроваджувати поняття «ірраціональне число», аналізуючи приклад рівняння

$$x^2 - 2 = 0.$$

Коренями якого є числа: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$. З наведення цього прикладу учні мають зрозуміти, що добуваючи корінь із раціонального числа результат може вивести за межі множини раціональних чисел.

Для засвоєння навчального матеріалу у 8 класі, зручно користуватися схемою, яка наочно продемонструє учням взаємозв'язок між числовими множинами.

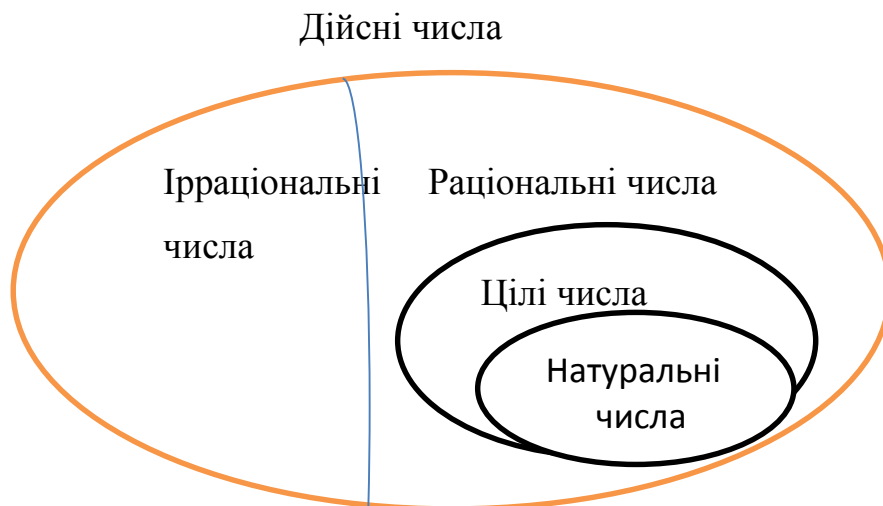


Рисунок 1. Множина дійсних чисел.

В загальному ірраціональні рівняння і нерівності розглядають у 10 класі. На цьому етапі школярі можуть не тільки використовувати означення, які торкаються множини дійсних чисел, а вже вміють розв'язувати ірраціональні рівняння і нерівності, навіть з параметрами, використовують властивості функції під час розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

У підручники включено матеріал, який є важливим для реалізації навчання на всіх трьох рівнях, а також, містять різний додатковий матеріал, запитання для перевірки вивченої теми, вправи різних рівнів складності.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь учні найчастіше користуються двома методами:

- метод піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня;
- метод заміни змінних.

Зазвичай, цими двома методами обмежуються у шкільному курсі математики, вони вважаються стандартними. Та все ж таки, не завжди можна обмежитися цими способами, інколи потрібно застосовувати і інші нестандартні методи для розв'язання ірраціональних рівнянь.

Потрібно відмітити, що здатність учнів вміти розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності є необхідним складником під час складання національного мультипредметного тесту. Через те, вчителю варто вимагати від учнів аргументування виконаних ними всіх дій під час розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей і продемонструвати учням різні методи і способи їх розв'язування.

Під час вивчення теми «Ірраціональні рівняння та нерівності» з'являється безліч труднощів, які пов'язані з особливостями матеріалу:

- зазвичай при розв'язанні ірраціональних рівнянь та нерівностей відсутній чіткий алгоритм;
- під час розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей приходиться виконувати перетворення в результаті яких, отримаємо рівняння (нерівність) не рівносильне даному.

Таким чином виникають помилки, які зв'язані з втратою під час розв'язування чи одержання сторонніх коренів.

Серед найбільш поширених помилок, є те, що учні не беруть до уваги ОДЗ, використовують перетворення без пояснень, таким чином, порушують рівносильність, в результаті чого втрачаються корені або з'являються сторонні.

Через те, потрібно вчити школярів спочатку знаходити ОДЗ і, в окремих випадках, можна отримати висновок, чи існують розв'язки рівняння.

Тому процес навчання розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей має бути напрямлений на формування узагальненого прийому розв'язання ірраціонального рівняння чи нерівності.

Етапи узагальненого прийому розв'язання ірраціонального рівняння, нерівності:

- визначити вид рівняння, нерівності;
- визначити чи стандартне, чи ні;
- розв'язати відповідно до чітких алгоритмів, правил, якщо воно стандартне;

- якщо воно не є стандартне, з'ясувати, які потрібно зробити перетворення, щоб отримати стандартне або використати штучні прийоми для розв'язання;
- зробити перетворення;
- зробити перевірку;
- записати відповідь.

РОЗДІЛ 2

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ І СПОСОБИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1 Рівносильні рівняння та рівняння наслідки. Розв'язування ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня

Означення. Ірраціональними називаються рівняння, у яких змінна (невідома) розташована під знаком кореня.

Означення. Множину $D(f) \cap D(g)$ називають **областю визначення рівняння** $f(x) = g(x)$.

Проілюструємо діаграму Ейлера:



З ілюстрації цієї схеми, учні розуміють, що кожний корінь рівняння належить його області визначення.

Означення. Якщо множини коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ рівні, то їх називають **рівносильними**.

Якщо коренем рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ є який-небудь корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що відноситься до множини M , а коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ є який-небудь корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що відноситься до множини M , то ці два рівняння на множині M називають **рівносильними**.

Приклад. На множині $(-\infty; 0)$ рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ є рівносильними.

Теорема 2.1. Якщо відняти від двох частин заданого рівняння (або додати до двох частин заданого рівняння) одне і те ж саме число, то одержимо рівносильне рівняння даному.

Теорема 2.2. Якщо помножити кожен член рівняння (або поділити) на число, одне і те ж саме, яке відмінне від нуля, то одержимо рівносильне рівняння даному.

Означення. Якщо множина коренів рівняння першого є підмножиною множини коренів рівняння другого, то рівняння друге є наслідком рівняння першого.

На малюнку зображено означення з використанням діаграми Ейлера.



Рисунок 3.

Зауважимо, що кожне з рівнянь є наслідком другого, якщо два рівняння рівносильні.

Сторонніми коренями називають корені рівняння-наслідку, що не є розв'язками даного рівняння.

Можна виявити сторонні корені, як правило, шляхом перевірки, якщо у процесі розв'язування рівняння було порушено рівносильність та здійснився перехід до наслідку рівняння.

Нехай задано функцію $y = x^3$. Функція є зростаючою, значить і оборотною. Тому функція $y = x^3$ лише один раз набуває кожного свого значення. Тобто, $x_1 = x_2$ випливає із рівності $x_1^3 = x_2^3$. Через те що, випливає $x_1^3 = x_2^3$ із рівності $x_1 = x_2$, то можемо засвідчувати таке: для того, щоб отримати рівняння, яке буде рівносильне даному, необхідно піднести до куба дві частини рівняння.

Задача 1. Розв'язати рівняння $\sqrt[5]{x^2 - 25} = \sqrt[5]{2x + 10}$.

Розв'язання. Дві частини рівняння піднесемо до п'ятого степеня. Одержимо рівняння, рівносильне даному:

$$(\sqrt[5]{x^2 - 25})^5 = (\sqrt[5]{2x + 10})^5.$$

Звідси

$$x^2 - 25 = 2x + 10$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 7.$$

Відповідь: $x_1 = 5, x_2 = 7$.

Розглянуте рівняння в задачі 1, містить під знаком кореня змінну. Рівняння такого виду називають ірраціональними.

Для прикладу наведемо ще декілька ірраціональних рівнянь: $\sqrt{x}\sqrt{x-1} = x$, $\sqrt{3x-2} = x$, $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$, $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$.

Через те, що оборотною є функція $y = x^{2k-1}, k \in \mathbb{N}$, то ідеї, які ми використали у задачі 1 у процесі розв'язування узагальнимо теоремою.

Теорема 2.3. Якщо до непарного степеня піднести дві частини рівняння, то одержимо рівносильне рівняння даному.

Доведення. Продemonструємо, що рівносильними є рівняння:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

і

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1}, k \in N. \quad (2)$$

Нехай коренем рівняння (1) є деяке число α . В такому разі отримаємо числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Тому ми можемо звідси записати, що

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Це свідчить про те, що коренем рівняння (2) є число α .

Нехай коренем рівняння (2) буде число β . Отже, одержуємо, що

$$(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}.$$

Через те що оборотною є функція $y = x^{2k-1}, k \in N$, то $f(\beta) = g(\beta)$. Тому коренем рівняння (1) є число β .

Отже, ми продемонстрували, що розв'язком рівняння (1) є кожний розв'язок рівняння (2) і, навпаки, розв'язком рівняння (2) є кожний розв'язок рівняння (1). А це свідчить про те, що ці два рівняння є рівносильними.

Під час розв'язування задачі 1 ми спростили вирази виду $(\sqrt[n]{f(x)})^n$, де n є натуральним непарним числом. Розв'яжемо задачу, де n є натуральним парним числом.

Задача 2. Розв'язати рівняння $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$. (3)

Розв'язання. Можна записати це рівняння так:

$$3x + 4 = x - 2. \quad (4)$$

Отже, отримаємо, що $x = -3$.

Зробивши перевірку, ми виявимо, що розв'язком початкового рівняння не є число -3. Тому, рівняння $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$ коренів не має. Використання формули $(\sqrt{a})^2 = a$ стає причиною збільшення області визначення даного рівняння, що призводить до появи стороннього кореня. В результаті чого, наслідком рівняння $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$ є рівняння

$$3x + 4 = x - 2.$$

Відповідь: рівняння не має коренів.

У процесі розв'язування ірраціональних рівнянь, одною із причин виникнення сторонніх коренів є необоротність функції $y = x^{2k}, k \in N$. Це свідчить про те, що $x_1 = x_2$ не впливає обов'язково із рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$. Наприклад, $(-8)^6 = 8^6$, але $-8 \neq 8$. У той же час рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ впливає із рівності $x_1 = x_2$.

Теорема 2.4. Якщо до парного степеня піднести обидві частини рівняння, отримаємо рівняння-наслідок даного.

Доведення. Продемонструємо, що наслідком рівняння

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

$$\text{є рівняння } (f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, k \in N \quad (5).$$

Нехай коренем рівняння (1) є деяке число α . В такому разі отримаємо числову рівність $f(\alpha) = g(\alpha)$. Тому ми можемо звідси записати, що

$$(f(\alpha))^{2k} = (g(\alpha))^{2k}.$$

Це свідчить про те, що коренем рівняння (5) є число α .

Нехай коренем рівняння (5) буде число β . Отже, одержуємо, що

$$(f(\beta))^{2k} = (g(\beta))^{2k}.$$

Через те що необоротною є функція $y = x^{2k}, k \in N$, то це свідчить про те, що $f(\beta) = g(\beta)$ не впливає обов'язково із рівності $(f(\beta))^{2k} = (g(\beta))^{2k}$. Тому коренем рівняння (1) не завжди є число β .

Отже, ми продемонстрували, що розв'язком рівняння (5) є кожний розв'язок рівняння (1), але не завжди розв'язком рівняння (1) є розв'язок рівняння (5). А це свідчить про те, що наслідком рівняння (5) є рівняння (1).

Задача 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{2-x} = x$.

Розв'язання. Піднесемо до квадрату дві частини рівняння, одержимо рівняння-наслідок даного:

$$2 - x = x^2;$$

$$-x^2 + 2 - x = 0;$$

Помножимо рівняння на (-1) , отримаємо:

$$x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1.$$

Зробивши перевірку даного рівняння, ми виявимо, що число -2 – сторонній корінь рівняння, а розв'язком даного рівняння є число 1 .

Відповідь: $x = 1$.

Далі продемонструємо теореми рівносильності, які полегшують розв'язання ірраціональних рівнянь.

Теорема 2.5. Системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ (6) рівносильне рівняння виду

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad (7).$$

Доведення. Пропонуємо довести, що рівносильними є система

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (6) \text{ і рівняння } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad (7).$$

Нехай коренем рівняння (7) є деяке число α . В такому разі отримаємо числову рівність $\sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{g(\alpha)}$. Тому ми можемо звідси записати, що

$$f(\alpha) = g(\alpha), \text{ якщо } f(\alpha) \geq 0.$$

Це свідчить про те, що коренем системи (6) є число α .

Нехай коренем системи (6) буде число β . Отже, одержуємо, що

$$\begin{cases} f(\beta) = g(\beta) \\ f(\beta) \geq 0 \end{cases}.$$

Через те що оборотною є функція $y = \sqrt{x}$, на множині відмінних від нуля чисел, то це свідчить про те, що $\sqrt{f(\beta)} = \sqrt{g(\beta)}$. Тому коренем рівняння (7) є число β .

Отже, ми продемонстрували, що розв'язком системи (6) є кожний розв'язок рівняння (7) і, навпаки, розв'язком рівняння (7) є кожний розв'язок системи (6). А це свідчить про те, що система (6) і рівняння (7) є рівносильними.

Зауваження. Системі $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ також рівносильне рівняння виду

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}.$$

Як правило, з нерівностей $f(x) \geq 0$ чи $g(x) \geq 0$ робимо вибір системи на користь тієї, яку легше розв'язати.

Задача 4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{2x - 1}$.

Розв'язання. Перепишемо це рівняння у вигляді системи:

$$\begin{cases} x^2 - 36 = 2x - 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Тому що рівняння $\sqrt{x^2 - 36} = \sqrt{2x - 1}$ рівносильне цій системі.

Звідси,
$$\begin{cases} x = -5 - \text{сторонній корінь;} \\ x = 7 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $x = 7$.

Теорема 2.6. Системі $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, (8) рівносильне рівняння виду

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \quad (9).$$

Доведення. Продемонструємо, що рівносильними є система

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}, (8) \text{ і рівняння } \sqrt{f(x)} = g(x) \quad (9).$$

Нехай коренем рівняння (9) є деяке число α . В такому разі отримаємо числову рівність $\sqrt{f(\alpha)} = g(\alpha)$. Тому ми можемо звідси записати, що

$$f(\alpha) = (g(\alpha))^2 \text{ якщо } g(\alpha) \geq 0.$$

Це свідчить про те, що коренем системи (8) є число α .

Нехай коренем системи (8) буде число β . Отже, одержуємо, що

$$\begin{cases} f(\beta) = (g(\beta))^2 \\ g(\beta) \geq 0 \end{cases}.$$

Через те що оборотною є функція $y = x^2$ і $x \geq 0$, то це свідчить про те, що $\sqrt{f(\beta)} = g(\beta)$. Тому коренем рівняння (9) є число β .

Отже, ми продемонстрували, що розв'язком системи (8) є кожний розв'язок рівняння (9) і, навпаки, розв'язком рівняння (9) є кожний розв'язок системи (8). А це свідчить про те, що система (8) і рівняння (9) є рівносильними.

Задача 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+1} = x-1$.

Розв'язання. Рівняння є рівносильним системі $\begin{cases} x+1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$.

Звідси $\begin{cases} x^2 + 3x = 0; \\ x \geq 1 \end{cases}; \begin{cases} x_1 = 0 - \text{сторонній корінь,} \\ x_2 = 3; \\ x \geq 1. \end{cases}$

Відповідь: $x = 3$.

Узагальнимо теореми 1.5 і 1.6: $a = b$ випливає з рівності $a^{2k} = b^{2k}, k \in N$, якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$.

Теорема 2.7. На множині M рівносильними є рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, k \in N$, якщо нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$ виконуються для будь-якого $x \in M$.

Задача 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1} = 1$.

Розв'язання. Відшукаємо область визначення цього рівняння:

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Отже, множина $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Бачимо, що дві частини заданого рівняння на множині M набувають тільки додатних значень. Тому задане рівняння рівносильне рівнянню $(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-1})^2 = 1^2$ на множині M . Звідси $2x - 3 - 2\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} + x - 1 = 1$; $\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} = \frac{-3x+5}{-2}$. На множині M частина ліва рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} = \frac{-3x+5}{-2}$ набуває додатних значень, $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Через те додатною також має бути і права частина даного рівняння. Отже $\frac{-3x+5}{-2} \geq 0$; $x \geq \frac{5}{3}$. Тоді дві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} = \frac{-3x+5}{-2}$ на множині $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ набувають тільки додатних значень. Тому рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{x-1} = \frac{-3x+5}{-2}$ за теоремою 1.7 є рівносильним системі:

$$\begin{cases} (2x-3)(x-1) = \left(\frac{-3x+5}{-2}\right)^2, \\ x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = \frac{25-30x+9x^2}{4}, \\ x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^2 - 20x + 12 - 25 + 30x - 9x^2 = 0, \\ x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 10x + 13 = 0, \\ x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 5 + 2\sqrt{3}, \\ x_2 = 5 - 2\sqrt{3}, \end{cases} ; \quad x = 5 + 2\sqrt{3}. \\ x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases}$$

Відповідь: $x = 5 + 2\sqrt{3}$.

Задача 7. Розв'язати рівняння $\sqrt{6x-11} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3}$.

Розв'язання. Відшукаємо область визначення цього рівняння:

$$\begin{cases} 6x-11 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{11}{6} \\ x \geq 2 \\ x \geq -3 \end{cases}.$$

Отже, множина $M = [2; +\infty)$. Бачимо, що дві частини заданого рівняння на множині M набувають тільки додатних значень. Тому задане рівняння рівносильне рівнянню $(\sqrt{6x-11} - \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{x+3})^2$ на множині M .

$$\text{Звідси } 2\sqrt{6x-11}\sqrt{x-2} = 6x-16.$$

$$\text{Використавши теорему 2.7, одержуємо: } \begin{cases} 4(6x-11)(x-2) = (6x-16)^2 \\ x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right) \end{cases}.$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} 3x^2 - 25x + 42 = 0 \\ x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}, \\ x_2 = 6, \end{cases} \\ x \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right). \end{cases}$$

Відповідь: $x = 6$.

Задача 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2+2x-8} = \sqrt{x^2-6x+8}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники, квадратні тричлени, які заходяться під радикалами:

$$\sqrt{(x-2)(x+2)} - \sqrt{(x+4)(x-2)} = \sqrt{(x-2)(x-4)}.$$

На цьому етапі учні часто роблять помилку, використавши теорему про корінь з добутку, а саме: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Але має місце ця формула тільки для $a \geq 0$ і $b \geq 0$, а коли $a \leq 0$ і $b \leq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

Знайдемо ОДЗ цього рівняння:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 2] \cup [4; +\infty) \end{cases}$$

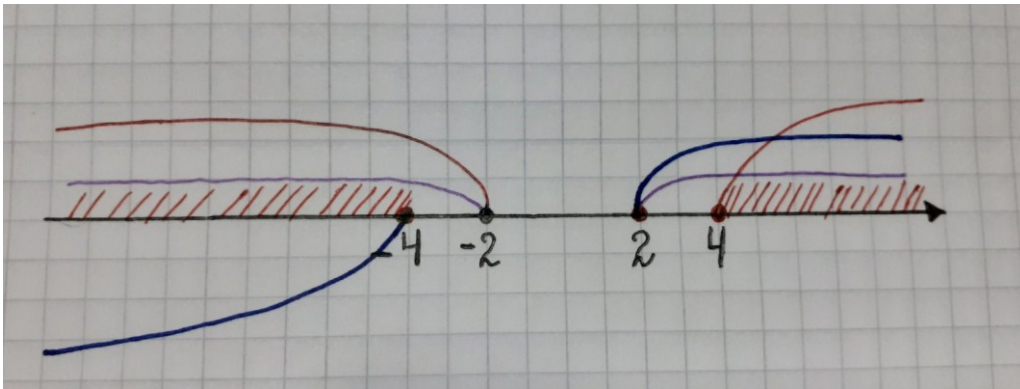


Рисунок 4.

ОДЗ: $x \in (-\infty; -4] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$. Тоді дане рівняння рівносильне сукупності, що складається з одного рівняння та двох систем:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4}\sqrt{x-2} = \sqrt{x-2}\sqrt{x-4} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 4 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} = \sqrt{x-4} \end{cases}; \begin{cases} x \geq 4 \\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+4} = -x-10 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \geq 4 \\ -x-10 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq 4 \\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+4} = -x-10 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Очевидно, що система розв'язків не має.

$$\begin{aligned} 2) & \begin{cases} x \leq -4 \\ \sqrt{-x+2}\sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-4}\sqrt{-x+2} = \sqrt{-x+4}\sqrt{-x+2} \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq -4 \\ \sqrt{-x-2} + \sqrt{-x-4} = \sqrt{-x-4} \end{cases}; \begin{cases} x \leq -4 \\ 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+4} = x+10 \end{cases} \\ & \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq -10 \end{cases}; \begin{cases} x \in [-10; -4] \\ 3x^2 + 4x - 68 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x \in [-10; -4] \\ \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4\sqrt{13}}{3} \\ x_2 = \frac{-2-2\sqrt{13}}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2-2\sqrt{13}}{3}.$$

3) $x - 2 = 0$; $x = 2$ – є коренем рівняння.

Відповідь: $x = \frac{-2-2\sqrt{13}}{3}$, $x = 2$.

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь, які містять корені парного степеня, слід пам'ятати, що значення таких коренів не можуть бути від'ємними.

Задача 9. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = -1$.

Розв'язання. Ми відразу можемо встановити, що рівняння розв'язків не має, оскільки сума парних степенів не може бути від'ємною. Отже, $x \in \emptyset$.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

2.2 Метод заміни змінних при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Метод заміни змінних доцільно використовувати при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, коли громіздкі перетворення виникають під час піднесення двох частин заданого рівняння до одного і того ж степеня.

Використовуючи метод заміни підкореневого виразу ірраціональних рівнянь, розв'язок можна провести за таким алгоритмом:

1. Знайти область допустимих значень заданого рівняння.
2. Виконати перехід від рівняння до заміни.
3. Відшукати корені рівняння, яке отримали.
4. Виконати перевірку, чи є коренями заданого рівняння, знайдені корені.

Перевірку виконуємо наступним чином:

- а) перевірити, чи знайдені корені належать області допустимих значень заданого рівняння. Якщо корені не належать ОДЗ, то вони є сторонніми коренями для заданого рівняння;
- б) якщо корені належать області допустимих значень заданого рівняння, то для кожного кореня, перевірити, чи обидві частини містять однакові знаки кожного з рівнянь, які виникли під час розв'язку заданого рівняння. Якщо обидві частини містять різні знаки, то такі корені для заданого рівняння є сторонніми коренями;
- в) за умови, що корені належать області допустимих значень і однакові знаки містять дві частини кожного з рівнянь, під час розв'язування заданого рівняння, перевірити відразу ж, підставивши у задане рівняння.

Скориставшись заміною підкореневого виразу, ми полегшуємо зведення рівняння ірраціонального до раціонального.

Задача 10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 3 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: $x \geq 0$. Заміна: $\sqrt[4]{x} = t$. Отримаємо рівняння:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}. \quad \text{Повернемося до заміни: } \sqrt[4]{x} = 1 \text{ або } \sqrt[4]{x} = 3.$$

Піднесемо обидві частини рівнянь до 4-го степеня:

$$(\sqrt[4]{x})^4 = (1)^4 \Rightarrow x = 1;$$

$$(\sqrt[4]{x})^4 = (3)^4 \Rightarrow x = 81.$$

Отже, $x = 1$ і $x = 81$ є коренями рівняння.

Відповідь: $x = 1$, $x = 81$.

Задача 11. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x.$$

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = -2\sqrt{(x-1)(x+3)} + 4 - 2x$$

Заміна: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння

$(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})^2 = t^2$ і тоді отримаємо:

$$x - 1 + x + 3 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = t^2.$$

Звідси, $2\sqrt{(x-1)(x+3)} = t^2 - 2x - 2$. Тоді запишемо задане рівняння у вигляді: $t + t^2 - 2x - 2 - 4 + 2x = 0$; $t^2 + t - 6 = 0$. Скориставшись теоремою Вієта знайдемо корені: $t_1 = -3$, $t_2 = 2$.

Підставимо знайдені корені у заміну: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = -3$. Оскільки, нам відомо, що сума двох підкореневих виразів більша або рівна нулю, то

$t_1 = -3$ — сторонній корінь. Перевіримо, чи підходить $t_2 = 2$, підставивши у

заміну: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$. Далі, $\begin{cases} x \leq 1 \\ x - 1 + x + 3 + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2 - 2x \end{cases}; \begin{cases} x \leq 1 \\ (x-1)(x+3) = 1 - 2x + x^2 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$$x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$.

Методом заміни змінних, також, доречно користуватися під час розв'язування системи ірраціональних рівнянь.

Задача 12. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2 - 8y^2 = 18 - 18y \end{cases}.$$

Розв'язання. Насамперед, розглянемо рівняння $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2$.

Нехай $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = t$, $t \geq 0$. Тоді $\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = \frac{1}{t}$. Звідси отримаємо рівняння:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Rightarrow t + \frac{1}{t} - 2 = 0.$$

Помножимо отримане рівняння на t і отримаємо квадратне рівняння:

$$t^2 - 2t + 1 = 0, \quad (t - 1)^2 = 0, \text{ звідси } t = 1. \quad \text{Повернемося до заміни і}$$

підставимо отримане значення: $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1$. Піднесемо рівняння $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} = 1$ до

квадрату і помножимо на $2x$, в результаті отримаємо:

$$3x - 2y = 2x, \text{ звідси } x = 2y.$$

Розглянемо рівняння $x^2 - 8y^2 = 18 - 18y$ і підставимо значення $x = 2y$:

$$\begin{aligned} (2y)^2 - 8y^2 - 18 + 18y &= 0, & 4y^2 - 8y^2 + 18y - 18 &= 0, \\ -4y^2 + 18y - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Рівняння $-4y^2 + 18y - 18 = 0$ поділимо на (-2) і отримаємо:

$$2y^2 - 9y + 9 = 0.$$

За теоремою Вієта $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{3}{2}$.

Відшукаємо x_1 і x_2 : якщо $y_1 = 3$, то $x_1 = 2y \Rightarrow x_1 = 2 \cdot 3 \Rightarrow x_1 = 6$;

якщо $y_2 = \frac{3}{2}$, то $x_2 = 2y \Rightarrow x_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 3$.

Відповідь: $x_1 = 6, y_1 = 3; x_2 = 3, y_2 = \frac{3}{2}$.

Задача 13. Розв'язати рівняння $6x^2 - 5x\sqrt{x+3} + x + 3 = 0$.

Розв'язання. Оскільки, корінь даного рівняння не дорівнює 0, то йому рівносильне рівняння: $6 - \frac{5\sqrt{x+3}}{x} + \frac{x+3}{x^2} = 0$. Нехай $\frac{\sqrt{x+3}}{x} = t$, тоді

$t^2 - 5t + 6 = 0$. За теоремою Вієта отримаємо корені: $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 2, \\ \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 3; \end{cases} \begin{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 = 4x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ x + 3 = 9x^2 \end{cases} \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1+\sqrt{109}}{18} \end{cases}$$

Відповідь: $1; \frac{1+\sqrt{109}}{18}$.

Задача 14. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(6-x)^2} - \sqrt[3]{(x+3)(6-x)} = 3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{x+3} = a, \sqrt[3]{6-x} = b$. Тоді $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ a^3 + b^3 = 9 \end{cases}$,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3 \\ (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 3, \\ a+b = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \cdot b = 2, \\ a+b = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Звідси запишемо:
$$\begin{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{x+3} = 1, \\ \sqrt[3]{6-x} = 2, \\ \sqrt[3]{x+3} = 2, \\ \sqrt[3]{6-x} = 1; \end{cases} & \begin{cases} x = -2, \\ x = 5. \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь: $-2, 5$.

Задача 15. Розв'язати рівняння $(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7) = x$.

Розв'язання. Дві частини рівняння помножимо на вираз $\sqrt{x+1} - 1$. В результаті одержимо рівняння-наслідок:

$$x(\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7) = x(\sqrt{x+1} - 1).$$

Рівняння, яке ми отримали, буде рівносильним сукупності

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \sqrt{x+1} + x^2 + x - 7 = \sqrt{x+1} - 1. \end{cases}$$

Перейдемо до розв'язку рівняння $\sqrt{x+1} + x^2 + x - 7 = \sqrt{x+1} - 1$.

Наслідком даного рівняння буде рівняння $x^2 + x - 7 = -1$. Звідси

$x^2 + x - 6 = 0$. За теоремою Вієта $x_2 = -3; x_3 = 2$.

Виконаємо перевірку, підставивши корені у початкове рівняння:

$x_1 = 0, (\sqrt{0+1} + 1)(\sqrt{0+1} + 0^2 + 0 - 7) = 0, -12 = 0$. Отже число 0 не є коренем рівняння;

$x_2 = -3, (\sqrt{-3+1} + 1)(\sqrt{-3+1} + (-3)^2 + (-3) - 7) = -3$. Бачимо, що число -3 не є коренем рівняння, оскільки підкореневий вираз завжди більший або дорівнює нулю;

$x_3 = 2: (\sqrt{2+1} + 1)(\sqrt{2+1} + 2^2 + 2 - 7) = 2, 2 = 2$. Отже, число 2 є коренем даного рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

2.4 Інші методи розв'язування ірраціональних рівнянь.

Множення на спряжений вираз

Під час розв'язування ірраціональних рівнянь деяких типів, доречно використовувати спряжені вирази (наприклад, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ і $\sqrt{a} - \sqrt{b}$). Такий спосіб полегшує розв'язування рівнянь виду

$$\sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1} \pm \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2} = mx + n,$$

коли дріб $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1 - (a_2x^2 + b_2x + c_2)}{mx + n}$

є двочленом першого степеня.

Розглянемо приклад, де $m = 0$.

Задача 16. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 4$. (1)

Розв'язання. Щоб розв'язати дане рівняння, відшукаємо різницю радикалів, заданих в умові задачі, тобто $\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = a$. (2)

Перемножимо обидві частини рівнянь (1) і (2) та отримаємо:

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+x+x^2})^2 - (\sqrt{1-x+x^2})^2 &= 4a; \\ 1+x+x^2 - (1-x+x^2) &= 4a; \\ 2x &= 4a; \quad a = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = \frac{x}{2}. \quad (3)$$

Щоб знайти корені заданого рівняння, почленно додамо рівняння (1) і (3).

Отримаємо: $2\sqrt{1+x+x^2} = 4 + \frac{x}{2}$, звідси $4(1+x+x^2) = 16 + 4x + \frac{x^2}{4}$;
 $15x^2 = 48$; $x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Виконавши перевірку, підставляючи знайдені корені $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ і $x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ у задане рівняння, бачимо, що вони його задовольняють.

Відповідь: $x_1 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Задача 17. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x^2 + x + 4} - \sqrt{2x^2 - 8} = \sqrt{x^2 - 3x - 10} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Розв'язання. Помножимо та поділимо ліву частину рівняння на спряжений вираз $(\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8})$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{2x^2 + x + 4} - \sqrt{2x^2 - 8}) \cdot (\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8})}{\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8}} = \\ & = \sqrt{x^2 - 3x - 10} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}. \end{aligned}$$

Помножимо та поділимо праву частину рівняння на спряжений вираз $(\sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{2x^2 + x + 4} - \sqrt{2x^2 - 8}) \cdot (\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8})}{\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8}} = \\ & = \frac{(\sqrt{x^2 - 3x - 10} - \sqrt{x^2 - 2x + 2}) \cdot (\sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 2})}{\sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}. \end{aligned}$$

Виконавши обчислення чисельників у лівій та правій частині рівняння, отримаємо:

$$\frac{(x + 12)}{\sqrt{2x^2 + x + 4} + \sqrt{2x^2 - 8}} = \frac{-(x + 12)}{\sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

В результаті отримали загальний множник $(x + 12) = 0$, звідси $x = -12$.

Зробивши перевірку, бачимо, що корінь $x = -12$ задовольняє рівняння.

Відповідь: $x = -12$.

Задача 18. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{(9-x)^2} + \sqrt[3]{(9-x)(2-x)} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 7.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на спряжений вираз $(\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x})$:

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{(9-x)^2} + \sqrt[3]{(9-x)(2-x)} + \sqrt[3]{(2-x)^2}) \cdot (\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x}) = \\ & = 7(\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x}). \end{aligned}$$

Отримаємо різницю кубів: $\sqrt[3]{(9-x)^3} - \sqrt[3]{(2-x)^3} = 7(\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x})$.

Виконавши обчислення лівої частини рівняння одержимо:

$$7 = 7(\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x}); \sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x} = 1.$$

Нехай $\sqrt[3]{2-x} = t$, тоді $x = 2 - t^3$. Підставимо значення $x = 2 - t^3$ у рівняння $\sqrt[3]{9-x} - \sqrt[3]{2-x} = 1$: $\sqrt[3]{9-(2-t^3)} - t = 1$; $\sqrt[3]{t^3+7} = t+1$. Звідси

$$t_1 = -2, \quad t_2 = 1.$$

Повернемося до заміни: $\sqrt[3]{2-x} = -2$, $x_1 = 10$;

$$\sqrt[3]{2-x} = 1, \quad x_2 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = 10$, $x_2 = 1$.

Однорідні ірраціональні рівняння

Однорідним називається рівняння виду

$$Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0.$$

Це рівняння зводиться заміною $\frac{f(x)}{g(x)} = t$ або $\frac{g(x)}{f(x)} = t$ до квадратного рівняння.

Задача 19. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + 4\sqrt[4]{x(x^2 - x + 1)} - 5\sqrt{x} = 0.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{x}} = t$, тоді одержимо рівняння:

$$t^2 + 4t - 5 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 5.$$

Повернемося до заміни:

$\sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{x}} = 1$. Піднесемо обидві частини рівняння до 4-го степеня та помножимо на x :

$$\frac{x^2-x+1}{x} = 1, \quad x^2 - x + 1 = x;$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0. \quad \text{Звідси } x_1 = 1.$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^2-x+1}{x}} = 5, \quad \frac{x^2-x+1}{x} = 625, \quad x^2 - 626x + 1 = 0. \quad \text{Звідси } x_2 = 313 - 4\sqrt{6123},$$

$$x_3 = 313 + 4\sqrt{6123}.$$

Зробивши перевірку, легко побачити, що корені $x_2 = 313 - 4\sqrt{6123}$ та $x_3 = 313 + 4\sqrt{6123}$ є сторонніми коренями, а корінь $x_1 = 1$ задовольняє умову задачі.

Відповідь: $x = 1$.

Задача 20. Розв'язати рівняння $\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}} + \sqrt{2x+15} = 2x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x :

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} + \frac{\sqrt{2x+15}}{x} = 2.$$

Нехай $\frac{x}{\sqrt{2x+15}} = t$, тоді $\frac{\sqrt{2x+15}}{x} = \frac{1}{t}$. Отримаємо рівняння: $t + \frac{1}{t} - 2 = 0$,

звідси $t = 1$.

Повернемося до заміни: $\frac{x}{\sqrt{2x+15}} = 1$, $x^2 - 2x - 15 = 0$. Звідси $x_1 = -3$,

$x_2 = 5$.

Виконавши перевірку, можна побачити, що корінь $x_1 = -3$ не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $x = 5$.

Введення спряжених виразів

Використавши спряжені вирази, наприклад $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ і $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, можна полегшити розв'язання деяких ірраціональних рівнянь. Такий спосіб застосовують до рівнянь виду

$$\sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1} \pm \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2} = mx + n,$$

якщо двочленом першого степеня є дріб $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1 - (a_2x^2 + b_2x + c_2)}{mx + n}$.

Для початку розглянемо приклад, де $m = 0$.

Задача 21. Розв'язати рівняння $\sqrt{4 + x + x^2} + \sqrt{4 - x + x^2} = 6$. (1)

Розв'язання. Щоб отримати простіше рівняння ніж дане, відшукаємо різницю радикалів, тобто: $\sqrt{4 + x + x^2} - \sqrt{4 - x + x^2} = A$. (2)

Перемножимо обидві частини рівняння (1) на рівняння (2) і отримаємо:

$$(\sqrt{4 + x + x^2})^2 - (\sqrt{4 - x + x^2})^2 = 6A \quad \text{або} \quad 4 + x + x^2 - (4 - x + x^2) = 6A,$$

звідси $2x = 6A$, $A = \frac{x}{3}$.

$$\text{Отже, } \sqrt{4+x+x^2} - \sqrt{4-x+x^2} = \frac{x}{3}. \quad (3)$$

В результаті ми отримали різницю і суму радикалів заданого рівняння. На цьому етапі можна отримати простіші рівняння. Почленно додамо рівняння (1) і (3), маємо

$$2\sqrt{4+x+x^2} = 6 + \frac{x}{3},$$

$$\text{звідки } 6\sqrt{4+x+x^2} = 18+x, \quad 36(4+x+x^2) = 324+36x+x^2,$$

$$35x^2 = 180, \quad x^2 = \frac{36}{7}, \quad \text{звідси } x_1 = -\frac{6\sqrt{7}}{7}, \quad x_2 = \frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

Підставивши отримані корені у початкове рівняння, переконуємось, що вони задовільняють рівняння.

$$\text{Відповідь: } x_1 = -\frac{6\sqrt{7}}{7}, \quad x_2 = \frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

Метод "геометричної" підстановки

Задача 22. Розв'язати рівняння

$$(x-1)\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+22} = \sqrt{2x+26}\sqrt{x^2-2x+5}.$$

$$\text{Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: } \begin{cases} x+4 \geq 0, \\ x+22 \geq 0, \\ 2x+26 \geq 0, \\ x^2-2x+5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -4, \\ x \geq -22, \\ x \geq -13, \\ x \in (-\infty; +\infty); \end{cases} \quad x \geq$$

-4.

Для розв'язання заданого рівняння застосуємо метод "геометричної" підстановки, тобто розглянемо вектори:

$$\vec{a}(x-1; 2), \quad \vec{b}(\sqrt{x+4}; \sqrt{x+22}).$$

Тоді скалярний добуток отриманих векторів

$$(x-1)\sqrt{x+4} + 2\sqrt{x+22},$$

тобто, це ліва частина заданого рівняння, добуток модулів

$$\sqrt{(x-1)^2 + 2^2} \sqrt{(\sqrt{x+4})^2 + (\sqrt{x+22})^2} = \sqrt{x^2-2x+5} \sqrt{2x+26},$$

тобто, це права частина заданого рівняння.

Якщо два вектори колінеарні, то скалярний добуток цих векторів дорівнює добутку модулів цих векторів.

Якщо два вектори колінеарні, то їх координати пропорційні.

Отже, отримаємо відношення:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x+4}} = \frac{2}{\sqrt{x+22}}, \quad (x-1)\sqrt{x+22} = 2\sqrt{x+4}.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння і отримаємо:

$$(x-1)^2(x+22) = 4(x+4),$$

$$(x^2 - 2x + 1)(x + 22) = 4x + 16,$$

$$x^3 + 20x^2 - 47x + 6 = 0.$$

Підставивши $x_1 = 2$, легко побачити, що цей корінь є розв'язком.

$$x^3 + 20x^2 - 47x + 6 = (x^2 + 22x - 3)(x - 2),$$

$x_2 = -11 - 2\sqrt{31}$ – не є розв'язком, $x_3 = -11 + 2\sqrt{31}$ – не є розв'язком,

Відповідь: $x_1 = 2$.

Тригонометричні заміни у ірраціональних рівняннях

Тригонометричні заміни у ірраціональних рівняннях є одними із прийомів реалізації методу заміни змінних і застосовуються тоді, коли область визначення початкового рівняння сходиться з областю значення тригонометричної функції або міститься в цій області.

Задача 23. Розв'язати рівняння $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 1-x^2 \geq 0, \end{cases}$ звідси $x \in [-1; 1]$. Заміна: $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Тепер запишемо дане рівняння у вигляді:

$$\sqrt{1-\cos \alpha} = 2\cos^2 \alpha - 1 + 2\cos \alpha \sqrt{1-\cos^2 \alpha}.$$

$$\text{Звідси } \sqrt{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos 2\alpha + 2\cos \alpha \sin \alpha, \quad \sin \alpha \geq 0;$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}; \quad \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) + \sin 2\alpha;$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha + 2\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha - 2\alpha}{2} \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}; \\ \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right); \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right); \\ \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) &= 0; \quad -2 \sin \frac{2\alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2} \cdot \sin \frac{2\alpha - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} = 0; \\ \sin \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \sin \left(\frac{5}{4}\alpha - \frac{3\pi}{8} \right) &= 0;\end{aligned}$$

Отримаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{8} \right) = 0, \\ \sin \left(\frac{5}{4}\alpha - \frac{3\pi}{8} \right) = 0; \end{cases} \text{ звідси } \begin{cases} \frac{3}{4}\alpha - \frac{\pi}{8} = \pi, \\ \frac{5}{4}\alpha = \frac{3\pi}{8}; \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{2} \\ \alpha = \frac{3\pi}{10}. \end{cases}$$

Оскільки, $\alpha \in [0; \pi]$ і $\sin \alpha \neq 1$, то розв'язком буде $x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Відповідь: $x = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Задача 24. Розв'язати рівняння $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in [-1; 1]$.

Тепер можна виконати заміну: $x = \sin \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha(\sqrt{1-\sin^2\alpha})}{2}} + 2\sin^2\alpha - 1 = 0; \quad \sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}} + (2\sin^2\alpha - 1) = 0;$$

$$\sqrt{\frac{1+\sin 2\alpha}{2}} - \cos 2\alpha = 0; \quad \frac{1+\sin 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha; \quad 2 \cdot (1 + \sin 2\alpha) - 1 - \sin 2\alpha = 0;$$

$-2\sin^2 2\alpha + 2 - 1 - \sin 2\alpha = 0; \quad -2\sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha + 1 = 0$. Зробимо заміну $\sin 2\alpha = t$ та отримаємо квадратне рівняння:

$$2t^2 + t - 1 = 0, \text{ звідси } t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Повернемося до заміни:

$$\sin 2\alpha = -1, \quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки, $x \in [-1; 1]$, то $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

РОЗДІЛ 3.

ОСНОВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

3.1 Ірраціональні нерівності і особливості їх розв'язування.

Опанувавши шкільну програму, я дізналася, що тільки протягом 2-3 уроків вивчають ірраціональні нерівності. Але для учнів, які планують вступити до ВНЗ цього недостатньо, оскільки у завданнях, які пропонуються на ЗНО, часто можна зустріти завдання, де потрібно розв'язати ірраціональну нерівність, наприклад:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}, \quad \sqrt{x - 6} - \sqrt{x + 10} \leq 1, \quad \sqrt{(3x - 2)^2} > x + 6.$$

Ірраціональними нерівностями називаються нерівності, які містять змінну під знаком радикала і при цьому, розглядаються тільки арифметичні корені, якщо корені парного степеня.

До основних методів розв'язування ірраціональних нерівностей належать такі методи, як:

1. Метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня (цей метод ще називають методом рівносильних перетворень);

2. Метод введення нових змінних;

3. Метод інтервалів.

Детальніше ці методи ми опрацюємо у даному розділі.

Розглянемо найпростіші ірраціональні нерівності.

Задача 25. Розв'язати нерівність $\sqrt[4]{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x + 6} \leq -3$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \geq 0, \\ x + 6 \geq 0. \end{cases}$ З ОДЗ бачимо, що ліва

частина заданої нерівності буде завжди додатною при всіх x , а права частина нерівності від'ємна. Тому неможливо задовольнити дану нерівність. Отже, задача розв'язків не має.

Відповідь: нерівність не має розв'язків.

Задача 26. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{24-10x-x^2}}{x+5} > 0$.

Розв'язання. Областю допустимих значень чисельника є нерівність

$$24 - 10x - x^2 \geq 0, \text{ тобто } x \in [-12; 2].$$

Оскільки, при всіх x чисельник даної нерівності завжди додатний, тому знаменник, також, має бути додатним.

Отже, для розв'язання заданої нерівності, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x \in [-12; 2], \\ x + 5 > 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (-5; 2)$.

Задача 27. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{8-x}}{(\sqrt{x-16}\sqrt{x+2})} \leq \frac{6-x^2}{(x-6)(x+8)}$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ:
$$\begin{cases} 8 - x \geq 0, \\ x - 16 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x \neq 6, \\ x \neq -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 8, \\ x > 16, \\ x \geq 0, \\ x \neq 6 \\ x \neq -8. \end{cases}$$

Оскільки, областю допустимих значень є порожня множина, то дана система не має розв'язків. Тому задана нерівність теж не має розв'язків.

Відповідь: нерівність не має розв'язків.

Задача 28. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x} > -6$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $x \geq 0$. Твердження справедливе для будь-якого значення x , оскільки функція кореня парного степеня завжди додатна або рівна нулю.

Отже, $x \in R, x \geq 0. x \in [0; +\infty)$.

Відповідь: $x \in [0; +\infty) x \geq 0$.

Задача 29. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень: $2 - x > 0, x < 2$ звідси $x \in (-\infty; -2)$ та $x - 1 > 0, x > 1$, звідси $x \in (1; +\infty)$. Знайдемо перетин: $x \in \emptyset$.

ОДЗ: $x \in \emptyset$. Отже, нерівність розв'язків не має.

Відповідь: нерівність розв'язків не має.

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей застосовують твердження: якщо на деякій множині приймають тільки невід'ємні значення дві частини рівняння, то звівши дві частини цієї нерівності в деяку парну степінь та залишивши вихідної нерівності знак, в результаті отримаємо нерівність, яка буде рівносильною даній нерівності.

Рівносильним перетворенням нерівності, також, є зведення лівої і правої частини нерівності в одну і ту ж саму від'ємну степінь (знак нерівності зберігається).

Теорема 3.1. Якщо нерівності $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$ виконуються для будь-якого $x \in M$, то на множині M рівносильні нерівності

$$f(x) > g(x) \text{ і } (f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Задача 30. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} \leq 2\sqrt{x}$

Розв'язання. Ліва і права частина заданої нерівності набувають додатних значень на множині $M = [2; +\infty)$. Множина $M = [2; +\infty)$ є областю допустимих значень даної нерівності. Тому, задана нерівність рівносильна нерівності $(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2})^2 \leq (2\sqrt{x})^2$ на множині M . Отримаємо $2\sqrt{x+5}\sqrt{x-2} \leq 2x - 3$. Ліва і права частини нерівності

$$2\sqrt{x+5}\sqrt{x-2} \leq 2x - 3$$

набувають додатних значень на множині $M = [2; +\infty)$. Отже, за теоремою 3.4 одержуємо:

$$\begin{cases} 4(x+5)(x-2) \leq (2x-3)^2, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + 12x - 40 \leq 4x^2 - 12x + 9, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{49}{24}, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad 2 \leq x \leq \frac{49}{24}.$$

Відповідь: $[2; \frac{49}{24}]$.

Задача 31. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leq 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень. Маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ x + 10 \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq 6 \\ x \geq -10 \end{cases}.$$

Отже, $x \in [6; +\infty)$.

Запишемо нерівність у вигляді: $\sqrt{x - 6} \leq 1 + \sqrt{x + 10}$. Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності:

$$\begin{aligned} x - 6 &\leq 1 + 2\sqrt{x + 10} + x + 10; & -6 &\leq 1 + 2\sqrt{x + 10} + 10; \\ & & -6 &\leq 11 + 2\sqrt{x + 10}. \end{aligned}$$

Оскільки ліва частина завжди від'ємна, а права частина завжди додатна, то $x \in [6; +\infty)$.

Отже, $x \in [6; +\infty)$.

Відповідь: $x \in [6; +\infty)$.

3.2 Метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня

Даний метод називають ще методом зведення ірраціональної нерівності до системи раціональних нерівностей. Цей метод базується на нижче наведених теоремах.

Теорема 3.2. Системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$ рівносильна нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$.

Задача 32. Розв'яжіть нерівність $(x - 1)\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \geq 0$.

Розв'язання. Для розв'язання нерівності розглянемо систему, яка є їй рівносильною: $\begin{cases} -x^2 + 6x - 5 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 5)(-x + 1) \geq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$

Визначимо знаки за допомогою методу інтервалів, які знаходяться поза нулями функцій:

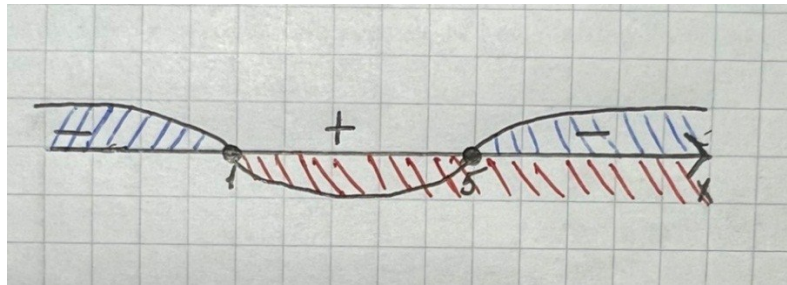


Рисунок 5.

Розв'язок нерівності: $x \in [1; 5]$.

Відповідь: $x \in [1; 5]$.

Задача 33. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною системі:

$$\begin{cases} 3x - 4 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 5 \geq 3x - 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{4}{3}, \\ x^2 - 7x - 3x + 5 + 4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{4}{3}, \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

Отже, в кінцевому результаті система матиме

вигляд: $\begin{cases} x \geq \frac{4}{3}, \\ (x - 1)(x - 9) \geq 0. \end{cases}$

На числовій осі позначимо нулі функції та визначимо знаки за допомогою методу інтервалів. Додатним квадратний тричлен буде в точці $x = 9$, отже, корені які ми отримали не потрібно уточнювати.

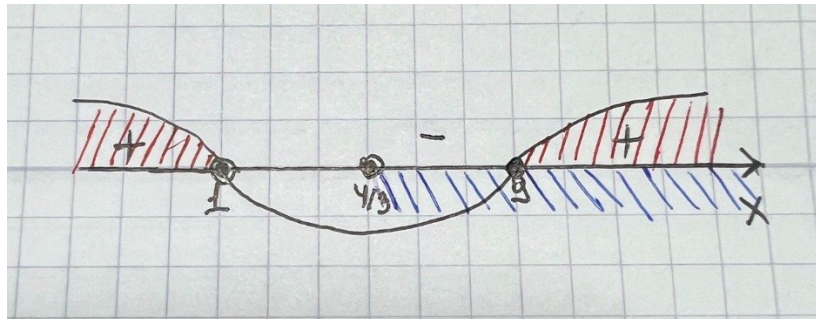


Рисунок 6.

Отримали в перетині півінтервал $x \in [9; +\infty)$.

Відповідь: $x \in [9; +\infty)$.

Теорема 3.3. Системі
$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$
 рівносильна нерівність виду
$$\sqrt{f(x)} < g(x).$$

Задача 34. Розв'язати нерівність $\sqrt{(x-2)(2-x)} < 3+2x$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною системі:

$$\begin{cases} (x-2)(2-x) \geq 0, \\ 3+2x \geq 0, \\ (x-2)(2-x) < (3+2x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (-1)(x-2)(2-x) \geq 0, \\ 2x \geq -3, \\ -x^2+4x-4 < 9+12x+4x^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-2) \leq 0, \\ x \geq -1,5, \\ -5x^2-8x-13 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x \geq -1,5, \\ -5x^2-8x-13 > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння: $-5x^2 - 8x - 13 = 0$. Знайдемо дискримінант цього рівняння: $D = (-8)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-13) = -196$. Оскільки, $D < 0$, то рівняння не має дійсних коренів. Звідси можемо зробити висновок, що для будь-яких x виконується нерівність $-5x^2 - 8x - 13 > 0$.

Отже, розв'язком нерівності є корінь $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

Задача 35. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 + 4x - 5} < x - 3$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 < (x - 3)^2, \\ x - 3 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0. \end{cases} \quad \text{Звідси отримаємо: } \begin{cases} x < 1,4 \\ x > 3 \\ x \leq -5 \text{ або } x \geq 1. \end{cases}$$

Нижче на малюнку проілюстровано розв'язання системи

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 5 < (x - 3)^2, \\ x - 3 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0. \end{cases}$$

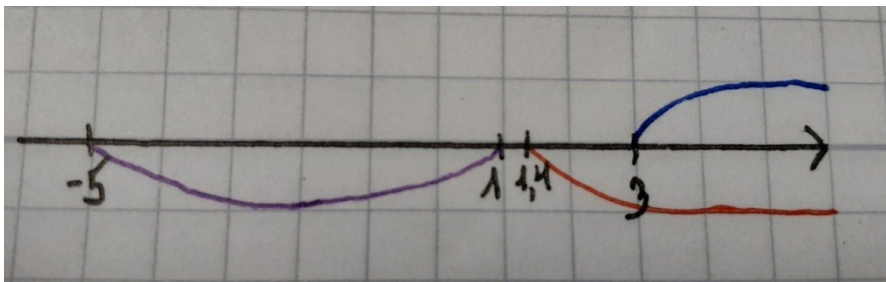


Рисунок 7.

Одержимо: $x \in \emptyset$.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

Задача 36. Розв'язати нерівність: $\sqrt{x} < 1$.

Розв'язання. Область допустимих значень нерівності: $x \geq 0$.

Дана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ (\sqrt{x})^2 < 1^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 1. \end{cases} \quad \text{Отже, } x \in [0; 1).$$

Відповідь: $x \in [0; 1), x \geq 0$.

Задача 37. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x - 6} - \sqrt{x + 10} \leq 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень. Маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ x + 10 \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq 6 \\ x \geq -10 \end{cases}.$$

Отже, $x \in [6; +\infty)$.

Запишемо нерівність у вигляді: $\sqrt{x - 6} \leq 1 + \sqrt{x + 10}$. Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності:

$$x - 6 \leq 1 + 2\sqrt{x + 10} + x + 10; \quad -6 \leq 1 + 2\sqrt{x + 10} + 10;$$

$$-6 \leq 11 + 2\sqrt{x + 10}.$$

Оскільки ліва частина завжди від'ємна, а права частина завжди додатна, то $x \in R, x \in [6; +\infty)$.

Отже, $x \in [6; +\infty)$.

Відповідь: $x \in [6; +\infty)$.

Теорема 3.4. Сукупності, що складається з двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{рівносильна нерівність виду } \sqrt{f(x)} > g(x).$$

Задача 38. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.

Розв'язання. Задана нерівність є рівносильною сукупності, що складається з двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 8 - 2x < 0, \\ -x^2 + 6x - 5 \geq 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 8 - 2x \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -2(x - 4) < 0, \\ -(x^2 - 6x + 5) \geq 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2(x - 4) \geq 0, \\ -x^2 + 6x - 5 > 64 - 32x + 4x^2; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - 4 > 0, \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x - 4 \leq 0, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0; \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 4, \\ (x - 1)(x - 5) \leq 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4, \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

За допомогою коренів квадратного рівняння $5x^2 - 38x + 69 = 0$ відшукаємо нулі функції: $D = (-38)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 69 = 1444 - 1380 = 64$, звідси

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4,6.$$

В результаті отримаємо систему нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 4, \\ (x - 1)(x - 5) \leq 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x \leq 4, \\ 5(x - 3)(x - 4,6) < 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Нулі функції нанесемо за допомогою методу інтервалів. Області, де співпадають розв'язки двох нерівностей, заштрихуємо. Для кожної системи побудуємо числову вісь методом інтервалів.

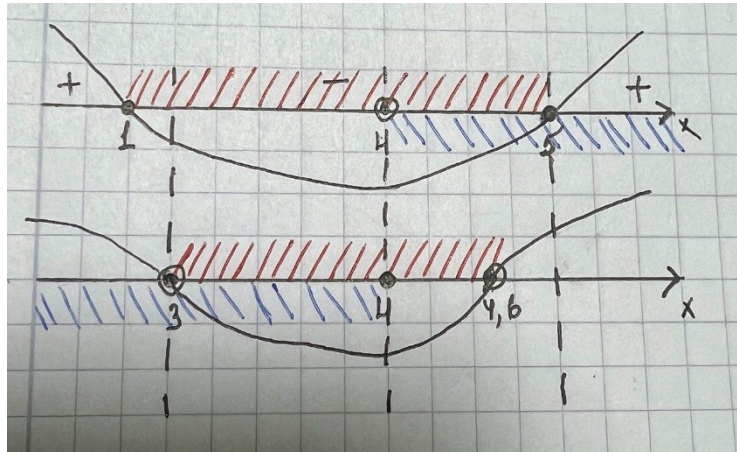


Рисунок 8.

Отже, з системи $\begin{cases} x > 4, \\ (x-1)(x-5) \leq 0; \end{cases}$ отримаємо: $x \in [4; 5]$, з системи

$\begin{cases} x \leq 4, \\ 5(x-3)(x-4,6) < 0 \end{cases}$ отримаємо: $x \in (3; 4]$. Знайдемо перетин: $x \in (3; 5]$.

Відповідь: $x \in (3; 5]$.

Задача 39. Розв'язати нерівність $(x-2)\sqrt{x^2-1} \leq x^2-4$.

Розв'язання. Запишемо задану нерівність у вигляді:

$$(x-2)(\sqrt{x^2-1}-x-2) \leq 0.$$

Нерівність, яку ми отримали є рівносильною сукупності, що складається з двох систем.

$$1) \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \sqrt{x^2-1} \leq x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-1 \leq x^2+4x+4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \geq 2.$$

$$2) \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ \sqrt{x^2-1} \geq x+2. \end{cases} \quad \text{Нерівність } \sqrt{x^2-1} \geq x+2 \text{ є рівносильною сукупності:}$$

$$\begin{cases} x+2 < 0, \\ \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq (x+2)^2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x < -2, \\ -2 \leq x \leq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Отже, отримаємо: } \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{4}.$$

Відповідь: $(-\infty; -\frac{5}{4}] \cup [2; +\infty)$.

Нерівність $(x - 2)\sqrt{x^2 - 1} \leq x^2 - 4$ можна ще розв'язати, застосовуючи метод інтервалів. Коли ми розв'яжемо рівняння

$$(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} - x - 2) = 0,$$

то одержимо два корені: $x = 2$, $x = -\frac{5}{4}$.

На малюнку зображено розв'язування цієї нерівності.

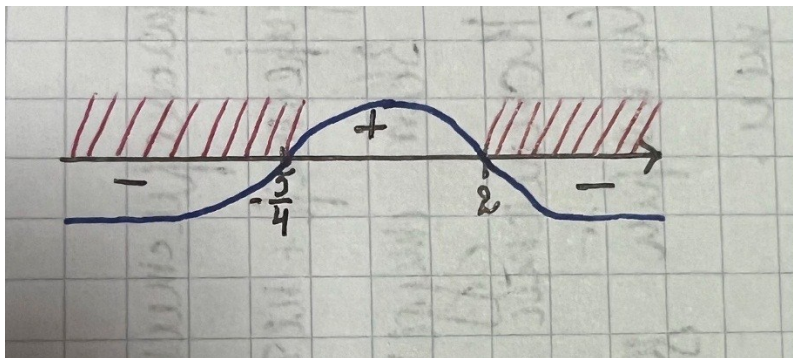


Рисунок 9.

3.3 Метод введення нових змінних

Одним із основних методів розв'язування ірраціональних нерівностей є метод введення нової змінної. У процесі розв'язування ірраціональних нерівностей переважно попадаються задачі, у яких здійснюється заміна.

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c}, \text{ або } t = ax^2 + bx + c.$$

Розв'яжемо нерівності даним методом.

Задача 40. Розв'язати нерівність $-10\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 21 \geq 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $\sqrt{x} \geq 0, x \geq 0$.

Нехай $\sqrt[4]{x} = t, t \geq 0$ тоді отримаємо нерівність:

$$t^2 - 10t + 21 \geq 0. \text{ Якщо } t \geq 0, \text{ то одержимо сукупність: } \begin{cases} 0 \leq t \leq 3, \\ t \geq 7. \end{cases}$$

Повернемось до заміни та підставимо отримані значення: $\begin{cases} 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3, \\ \sqrt[4]{x} \geq 7; \end{cases}$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 81, \\ x \geq 2401. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [0; 81] \cup [2401; +\infty)$.

Задача 41. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{6x}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{6x}} > \frac{3}{2}$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x-1}} \geq 0, \\ \sqrt{\frac{x-1}{6x}} \geq 0; \end{cases} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1; +\infty).$

Використаємо заміну $\sqrt{\frac{6x}{x-1}} = t, t > 0$, та одержимо систему нерівностей:

$$\begin{cases} t > 0, \\ t - \frac{1}{t} > \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0, \\ 2t^2 - 3t - 2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0, \\ \begin{cases} t < -\frac{1}{2}, \\ t > 2; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} t > 0, \\ t > 2; \end{cases}$$

Повернемось до заміни, отримаємо: $\sqrt{\frac{6x}{x-1}} > 2, \frac{6x}{x-1} > 4,$

$$x - 1 > 0, \quad x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$.

Задача 42. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - 4x + 12} \geq 3$.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 12} \geq 0; \end{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. Введемо

заміну $x^2 - 4x + 3 = t$, $t \geq 0$. Тоді $x^2 - 4x + 12 = t + 9$. В результаті задана нерівність отримує вигляд: $\sqrt{t} + \sqrt{t + 9} \geq 3$.

Якщо $t \geq 0$, то нерівності $\sqrt{t} \geq 0$ і $\sqrt{t + 9} \geq 3$ виконуються.

Таким чином, при $t \geq 0$ ліва частина нерівності більша або дорівнює 3.

Повернемося до заміни: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$, звідси $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3. \end{cases}$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Задача 43. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2 + \sqrt{2x}} < 4 - \sqrt[3]{2 - \sqrt{2x}}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \geq 0$.

Піднесемо до кубу обидві частини заданої нерівності:

$$2 + \sqrt{2x} < 62 - 48\sqrt[3]{2 - \sqrt{2x}} + 12\sqrt[3]{(2 - \sqrt{2x})^2} + \sqrt{2x};$$

$$\sqrt[3]{(2 - \sqrt{2x})^2} - 4\sqrt[3]{2 - \sqrt{2x}} + 5 < 0.$$

Виконаємо заміну: $\sqrt[3]{2 - \sqrt{2x}} = t$. Отримаємо: $t^2 - 4t + 5 > 0$, звідки $t \in (+\infty; -\infty)$. Враховуючи ОДЗ, одержимо, що $x \in (0; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (0; +\infty)$.

3.4 Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей, також, часто використовують метод інтервалів, який полягає у наступному правилі.

Щоб знайти розв'язок нерівності $f(x) > 0$, потрібно:

- 1) знайти область допустимих значень нерівності;
- 2) знайти розв'язок рівняння $f(x) = 0$;
- 3) на числову пряму нанести отримані розв'язки, в результаті чого ми одержимо проміжки, які і є інтервалами (функція $f(x)$ на кожному з цих інтервалів має постійний знак);
- 4) на кожному з отриманих інтервалів, визначити який із знаків має функція $f(x)$, інтервали, на яких функція $f(x) > 0$, включають всі розв'язки нерівності.

Також, це правило із незначними змінами, використовують під час розв'язування нерівностей $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Методом інтервалів розв'язують не лише ірраціональні нерівності, а й раціональні нерівності, логарифмічні нерівності, показникові нерівності, тощо. Тому часто метод інтервалів вважають загальним методом у процесі розв'язування нерівностей.

Задача 44. Розв'яжіть нерівність: $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді:

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} - 1 > 0.$$

Запишемо функцію: $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} - 1$.

Відшукаємо область визначення для квадратних коренів:

$$\begin{cases} 3x^2 + 5x + 7 \geq 0, \\ 3x^2 + 5x + 2 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in R, \\ x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right), \end{cases}$$

$$\text{отже, } x \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

Відшукаємо нулі функції ($f(x) = 0$):

$$\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} - 1 = 0.$$

Для подальшого розв'язку, нам потрібно виконати заміну:

$$3x^2 + 5x + 2 = t, \text{ причому } t \geq 0.$$

Отримаємо рівняння: $\sqrt{t+5} - \sqrt{t} - 1 = 0$, $\sqrt{t+5} = \sqrt{t} + 1$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(\sqrt{t+5})^2 = (\sqrt{t} + 1)^2, \quad t + 5 = 2 + 2\sqrt{t} + 1, \quad 2\sqrt{t} = 4, \quad t = 4.$$

Повернемося до заміни і знайдемо нулі функції:

$$3x^2 + 5x + 2 = 4, \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0, \text{ звідси } x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Отримані точки нанесемо на числову пряму та знайдемо на кожному проміжку знаки за допомогою методу інтервалів, враховуючи ОДЗ:

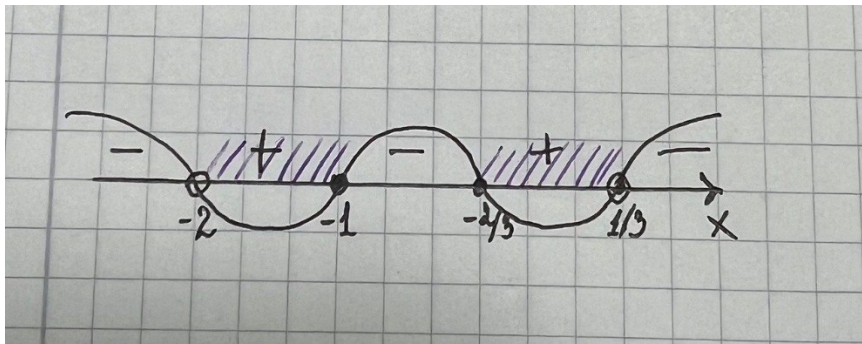


Рисунок 10.

Так, як $f(x) > 0$, то два півінтервали будуть розв'язками нерівності:

$$x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Відповідь: $x \in (-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$

Задача 45. Розв'язати нерівність $4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} > 6$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння $4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 6$, використавши заміну: $\sqrt[3]{x} = y$.

Отримаємо квадратне рівняння: $4y^2 - 2y - 6 = 0$, звідси $y_1 = -1$, $y_2 = 1,5$.

Повернемося до заміни: $\sqrt[3]{x} = -1$, $x_1 = -1$; $\sqrt[3]{x} = 1,5$, $x_2 = \frac{27}{8}$.

Точки -1 і $\frac{27}{8}$ поділяють ОДЗ $x \in (-\infty; +\infty)$ на три проміжки:

$$(-\infty; -1), \left(-1; \frac{27}{8}\right), \left(\frac{27}{8}; +\infty\right).$$

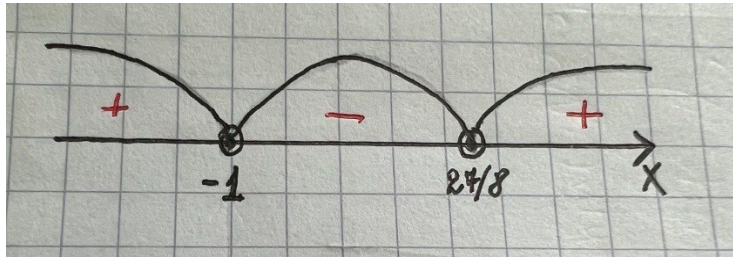


Рисунок 11.

1) Із проміжку $(-\infty; -1)$ виберемо контрольну точку $x = -2$, отримаємо: $4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} > 6$; ;

2) Із проміжку $(-1; \frac{27}{8})$ виберемо контрольну точку $x = 0$, отримаємо: $0 < 6$;

3) Із проміжку $(\frac{27}{8}, +\infty)$ виберемо контрольну точку $x = 4$, отримаємо: $8\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4} > 6$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{27}{8}, +\infty)$.

Зазначимо, що під час розв'язування даної нерівності методом інтервалів ми розв'язали, також, рівняння $4\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 6$. Саме у цьому міститься особливість методу інтервалів.

Задача 46. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sqrt{4x-5} < x, \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{6-x} > 4. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо нерівність $\sqrt{4x-5} < x$. Знайдемо ОДЗ: $\sqrt{4x-5} \geq 0$, $x \geq \frac{5}{4}$, $x \in [\frac{5}{4}; +\infty)$.

Розв'яжемо рівняння $\sqrt{4x-5} = x$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо: $4x - 5 = x^2$, $x^2 - 4x + 5 = 0$ – рівняння розв'язків не має. Тоді розглянемо інтервал $[\frac{5}{4}; +\infty)$. Виберемо контрольну точку $x = \frac{5}{4}$.

Отримаємо: $\sqrt{4 \cdot \frac{5}{4} - 5} = 0 < x$.

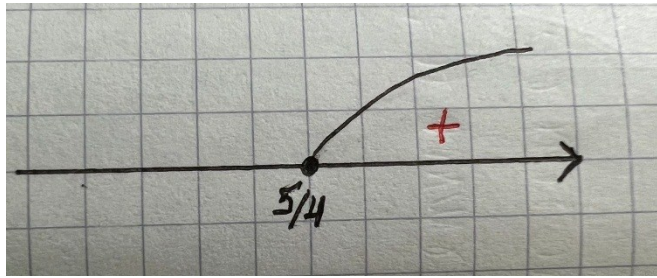


Рисунок 12.

Отже, інтервал $x \in \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$ є розв'язком нерівності.

Розглянемо нерівність $\sqrt{x+6} + \sqrt{6-x} > 4$. Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+6} \geq 0, \\ \sqrt{6-x} \geq 0, \end{cases}$
 $x \in [-6; 6]$.

Розв'яжемо рівняння $\sqrt{x+6} + \sqrt{6-x} = 4$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо: $6 + 2\sqrt{36-x^2} + 6 = 16$, $x^2 = 32$,

$$x_1 = -4\sqrt{2}, \quad x_2 = 4\sqrt{2}.$$

Одержані корені поділяють ОДЗ $x \in [-6; 6]$ на три інтервали: $[-6; -4\sqrt{2})$, $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$; $(4\sqrt{2}; 6]$.

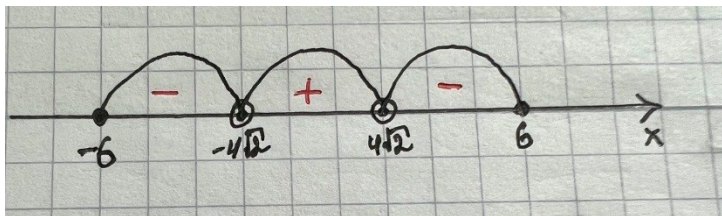


Рисунок 13.

Підставивши контрольні точки у інтервали, отримаємо, що розв'язком нерівності є інтервал $(-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2})$.

Знайдемо перетин розв'язків нерівностей:

$$\left[\frac{5}{4}; +\infty\right) \cap (-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}) = \left[\frac{5}{4}; 4\sqrt{2}\right).$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{5}{4}; 4\sqrt{2}\right)$.

Задача 47. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{(3x-2)^2} > x+6$.

Розв'язання. ОДЗ: $(3x-2)^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Коли ми розкриваємо квадратний корінь, то вираз слід брати за модулем.

Отже, отримаємо нерівність у вигляді:

$$|3x - 2| > x + 6, \text{ звідси } |3x - 2| - x > 6.$$

Отримаємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 2 - x > 6 \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} -(3x - 2) - x > 6 \\ 3x - 2 < 0 \end{cases}, \begin{cases} x > 4 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Множини розв'язків нерівності $|3x - 2| > x + 6$ нанесемо на числову вісь.

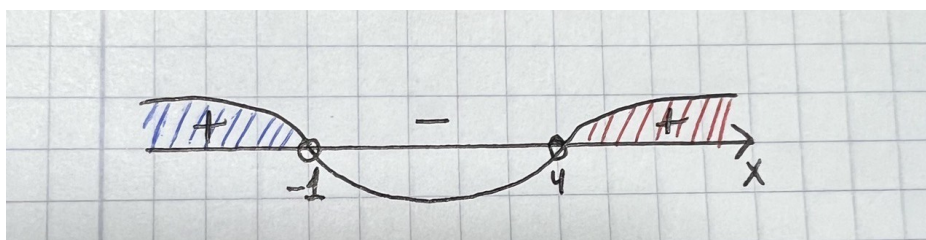


Рисунок 14.

Отже, $x \in (4; +\infty)$ або $x \in (-\infty; -1)$. Знайдемо перетин:

$$x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

РОЗДІЛ 4

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

Розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами є одними із найважчих задач шкільного курсу алгебри. Якщо учень вміє розв'язувати задачі такого рівня, то він рахується показником рівня математичної компетентності школярів, тому що вони показують ступінь засвоєння як теорії з елементарної математики, так і практичного її застосовування у нестандартних ситуаціях.

В першу чергу зауважимо, що розв'язання ірраціонального рівняння або ірраціональної нерівності з параметром пророкує закономірність описання множини, а також її розв'язків. Продемонструємо приклад.

Задача 48. Знайти розв'язок нерівності $\sqrt{x-a}(x-1)(x-2) > 0$.

Розв'язання. На множину розв'язків нерівності $(x-1)(x-2) > 0$ впливатиме ОДЗ нерівності, яка є залежною від параметра a (мається на увазі промінь $x \geq a$). Коли ми отримаємо відповідь, а це легко зробити, наприклад, розв'язавши нерівність методом інтервалів, необхідно брати також до уваги випадки, які пов'язані із взаємним розташуванням чисел 1, 2 та a .

Відповідь: коли $a \in (-\infty; 1)$ $x \in (a; 1) \cup (2; +\infty)$. Коли $a \in [1; 2)$ $x \in (2; +\infty)$. Коли $a \in [2; +\infty)$ $x \in (a; +\infty)$.

У вище розглянутих задачах фігурував параметр який був відразу ж в умові. Розглянемо приклади задач, в котрих параметр по'являється під час розв'язування.

Задача 49. Знайти розв'язок рівняння $\sqrt{4-x} = x^2 - 4$.

Розв'язання. Дане рівняння замінимо рівносильною системою:

$$\begin{cases} 4-x = (x^2-4)^2, \\ x^2-4 \geq 0. \end{cases}$$

Перетворимо рівняння $4-x = (x^2-4)^2$, зробивши заміну

$4 = a$, отримаємо: $a^2 - (1 + 2x^2)a + x^4 + x = 0$ та розв'яжемо це рівняння як квадратне відносно параметра a . Одержуємо $a = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x-1)}{2}$. Якщо повернутися до заміни, то дістаємо два квадратні рівняння, стосовно змінної x : $x^2 + x - 4 = 0$ та $x^2 + x - 3 = 0$ з розв'язками $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ та $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Із отриманих значень умову $x^2 - 4 \geq 0$ задовольняють два: $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ та $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$. Ці корені і є розв'язками.

Відповідь: $x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ та $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

На властивості функції суттєво можуть впливати параметри, що містяться у аналітичному виразі функції. Це має відношення до множини значень та області визначення, монотонності, парності і непарності, існування екстремумів та ін.

Більш детально проаналізувати зв'язок між властивостями функцій та значеннями параметрів, що містяться у їхньому виразі можна на наступному прикладі.

Задача 50. Яку кількість коренів містить рівняння

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = a?$$

Розв'язання. Відразу можна побачити, що на всій області визначення монотонно зростає ліва частина рівняння, іншими словами, зростає на промені $x \geq -\frac{1}{4}$. Тому для розв'язання рівняння нам потрібно відшукати значення лівої частини, яке буде найменшим. Воно дорівнює $\frac{1}{4}$ при $x = -\frac{1}{4}$.

Відповідь: розв'язків немає при $a \in (-\infty; \frac{1}{4})$, єдиний корінь – при $a \in [\frac{1}{4}; +\infty)$.

Бувають випадки, коли у ірраціональних рівняннях з параметром потрібно відшукати множину значень параметрів, при яких певні умови задовольняє розв'язок.

Задача 51. Знайти розв'язок рівняння

$$5\sqrt{x^2 - 3x + 2} - 3\sqrt[4]{-2x^2 + 5x - 3} + x = a.$$

Розв'язання. Корінь рівняння має належати області визначення цього рівняння. Така множина для вказаного виразу формулюється системою нерівностей $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ -2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \end{cases}$ з одним коренем $x = 1$. Розв'язком рівняння буде значення, яке ми отримали, тільки при $a = 1$.

Відповідь: розв'язком буде $x = 1$ при $a = 1$. При всіх решту значеннях a розв'язків нема.

Задача 52. Знайдіть розв'язок нерівності

$$\sqrt{x + 2} + 9\sqrt[4]{x - 7} + 2x - 15 \leq 6a - a^2 - 7.$$

Розв'язання. Зауважимо, що на проміжку $[7; +\infty)$ визначена ліва частина нерівності і у точці $x = 7$ приймає найменше значення, зростаючи монотонно на цьому проміжку. Воно дорівнює 2. Записавши у вигляді

$2 - (a - 3)^2$ праву частину нерівності, можна побачити, що її значення не більше за 2, водночас, досягається в єдиній точці $a = 3$ знак рівності. Порівнявши множини значень правої і лівої частин нерівності, можна зробити висновок, що вона є можливою лише при $a = 3, x = 7$.

Відповідь: При $a = 3$ розв'язок $x = 7$, при всіх решту значеннях a розв'язків нема.

Тип завдання, у якому потрібно в залежності від значень параметра знайти кількість коренів рівняння, доречно та зручно у більшості випадків розв'язувати графічним способом.

Під час побудови складних графіків, а особливо, коли вони є громіздкими з деякою кількістю перетворень, в учнів виникають труднощі. Але якщо спробувати у декілька етапів виконати побудову, при цьому будуючи на

окремій координатній площині деякі перетворення, учням буде набагато легше розв'язати ірраціональне рівняння з параметром.

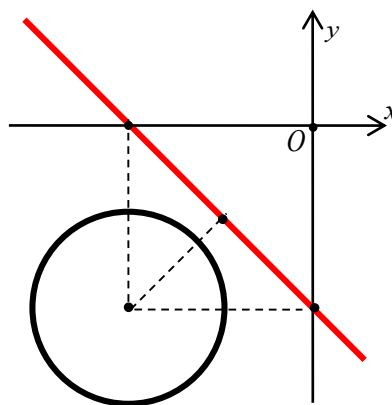
Задача 53. Визначити, при яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\sqrt{a + 2xy} = x + y + 1$.

Розв'язання. Даному рівнянню рівносильною є система $\begin{cases} a + 2xy = (x + y + 1)^2, \\ x + y + 1 \geq 0. \end{cases}$. Запишемо перше рівняння, після очевидних

перетворень, у вигляді $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = a + 1$. Бачимо, що при

$a + 1 > 0$ воно визначає коло з радіусом $R = \sqrt{a + 1}$ та центром у точці $K(-1; 1)$. Нерівність друга задає півплощину, яка розташована над прямою $x + y + 1 = 0$ (див. рис.).

Рисунок 15.



Якщо будуть існувати спільні точки півплощини та кола, то матиме розв'язки задане рівняння. А це виконується при умові, що $R \geq KL$, де KL – відстань до прямої від центра кола. Зрозуміло, що $KL = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Із нерівності $\sqrt{a + 1} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ знайшли, що $a \geq \frac{1}{2}$.

Відповідь: $a \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Бувають поодинокі випадки, де параметр вважають основною змінною. Це відбувається тоді, коли викликає деякі затруднення перетворення виразу відносно основної змінної. У такий момент у свого роду параметр перетворюється сама змінна, стосовно якої розв'язується рівняння чи нерівність.

Задача 54. Знайдіть розв'язок рівняння $\sqrt{a - \sqrt{a - x}} = x$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівносильне системі $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{a-x} = a-x^2, \text{ або} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a-x^2 \geq 0, \\ a-x = (a-x^2)^2 \end{cases}. \text{ Запишемо третє рівняння системи у вигляді}$$

$a^2 - a(2x^2 + 1) + (x^4 + x) = 0$ та розв'яжемо його як квадратне щодо змінної a . $a = \frac{2x^2+1 \pm \sqrt{4x^2-4x+1}}{2} = \frac{2x^2 \pm (2x-1)}{2}$, звідки отримаємо два рівняння $x^2 + x - a = 0$ та $x^2 + x - a + 1 = 0$ з розв'язками: при $a \geq -\frac{1}{4}$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ та при $a \geq \frac{3}{4}$ $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. Умову $x \geq 0$ не задовольняє корінь $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4a}}{2}$. При $a \geq 0$ виконуються умови $x \geq 0$ та $a - x^2 \geq 0$ для кореня $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. Вказані умови задовольняють корені $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$ при $a \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

Відповідь: при $a \in \left[0; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$. При $a \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$x = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ та $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. При всіх решту a розв'язків нема.

Одним із основних типів розв'язування ірраціональних рівнянь чи нерівностей є аналітичний тип. Він є універсальним, але найбільш складним, бо вимагає високої математичної точності та грамотності.

Розглянемо задачу, у якій потрібно розв'язати ірраціональне рівняння з параметром за допомогою аналітичного методу.

Задача 55. Має єдиний розв'язок рівняння $(\sqrt{x} - 1)(x - a) = 0$ при яких значеннях параметра a ?

Розв'язання. Нам відомо, що $\sqrt{x}$ має зміст, якщо $x \geq 0$. Зрозуміло, що якщо $\sqrt{x} - 1 = 0$ або $x - a = 0$, $x = 1$, $x = a$, то добуток дорівнює нулю. Отже, єдиний розв'язок має рівняння, якщо $a < 0$ або $a = 1$.

У завданнях ЗНО з математики, можна побачити певну кількість завдань, де потрібно розв'язати ірраціональне рівняння або ірраціональну нерівність з

параметром. Адже завдання такого виду надають спроможність високоякісно оцінити знання учнів, та їхні навички з деяких тем. Розв'язуючи ірраціональне рівняння чи ірраціональну нерівність з параметром, потрібно володіти не тільки базовими знаннями, а й певним рядом засвоєного матеріалу з використанням властивостей вибрати самостійно метод розв'язання. Такі завдання вимагають високого рівня засвоєння вивчених попередньо тем, тому і не всі учні можуть розв'язати завдання такого рівня.

Розглянемо для прикладу деякі ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами із ЗНО.

Задача 56. Для кожного значення a розв'язати нерівність:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a.$$

Розв'язання. Дана нерівність є рівносильною сукупності, що складається

з двох систем:

$$\left[\begin{cases} a+x \geq 0, \\ a-x \geq 0, \\ a \geq 0, \\ (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2 > a^2; \\ \begin{cases} a+x \geq 0, \\ a-x \geq 0, \\ a < 0; \end{cases} \end{cases} \right.$$

Розглянемо першу систему сукупності:

$$\begin{cases} a+x \geq 0, \\ a-x \geq 0, \\ a \geq 0, \\ (\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})^2 > a^2. \end{cases} \quad \text{Звідси}$$

$$\left[\begin{cases} x \in [-a; a], \\ a \geq 0, \\ \begin{cases} a^2 - 2a \geq 0, \\ 4(a+x)(a-x) > (a^2 - 2a)^2, \\ a^2 - 2a < 0; \end{cases} \end{cases} \right. \left[\begin{cases} a \geq 0, \\ x \in [-a; a], \\ a(a-2) \geq 0, \\ 4a^2 - 4x^2 - a^4 + 4a^3 - 4a^2 > 0; \\ \begin{cases} a \geq 0, \\ x \in [-a; a], \\ a(a-2) < 0; \end{cases} \end{cases} \right.$$

Розглянемо нерівність: $4a^2 - 4x^2 - a^4 + 4a^3 - 4a^2 > 0$,

$4x^2 + a^4 - 4a^3 < 0$, $x^2 < a^3 - \frac{a^4}{4}$. Нерівність не має розв'язків, якщо $a^3 - \frac{a^4}{4} < 0$. Це означає, що коли $a^3(a - 4) \geq 0$, $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$, то $x \in \emptyset$.

Якщо $a^3 - \frac{a^4}{4} \geq 0$, $a^4 - 4a^3 \leq 0$, $a \in (0; 4)$, то

$$(x - \sqrt{a^3 - \frac{a^4}{4}})(x + \sqrt{a^3 - \frac{a^4}{4}}) < 0, x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}).$$

Отже, отримали сукупність, що складається з трьох

$$\text{систем:} \left[\begin{cases} \begin{cases} a \in [0; +\infty), \\ x \in [-a; a], \\ a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty), \\ a \in (0; 4), \\ x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}); \end{cases} \\ \begin{cases} a \in [0; +\infty), \\ x \in [-a; a], \\ a \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty), \\ a \in [4; +\infty), \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a \in [0; +\infty), \\ x \in [-a; a], \\ a \in (0; 2). \end{cases} \end{cases} \right. \quad \text{звідси}$$

$$\left[\begin{cases} a \in [2; 4], \\ x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}); \\ \begin{cases} a \in [4; +\infty), \\ x \in \emptyset; \end{cases} \\ \begin{cases} a \in (0; 2), \\ x \in [-a; a]. \end{cases} \end{cases} \right.$$

Розв'яжемо другу систему сукупності: $\begin{cases} a + x \geq 0, \\ a - x \geq 0, \\ a < 0; \end{cases}$ звідси $\begin{cases} x \geq -a, \\ x \leq a, \\ a < 0; \end{cases}$ Отже,

можна зробити висновок, що $x \in \emptyset$.

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$, то $x \in \emptyset$; якщо $a \in (0; 2)$,

$x \in [-a; a]$; якщо $a \in [2; 4]$, то $x \in (-\frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{2}\sqrt{4a - a^2})$.

Під час розв'язування даної задачі, учням потрібно володіти основними прийомами та методами розв'язування ірраціональних нерівностей, вміти знаходити область допустимих значень нерівності, пригадати методи визначення коренів квадратних нерівностей. Також учні повинні знати на пам'ять формули скороченого множення і не забувати про область визначення у процесі розв'язування нерівності, тому що це впливає на розв'язок.

В учнів виникають найчастіше труднощі, коли потрібно домножити нерівність на від'ємне число, оскільки учні часто забувають про те, що потрібно змінити знак на протилежний, тому подальший розв'язок нерівності стає неправильним. Ця помилка є найтиповішою.

Щоб уникнути таких помилок, необхідно, щоб вчитель часто проговорював труднощі, які виникають на деякому етапі та хід розв'язання ірраціональної нерівності. Також слід сконцентрувати увагу учнів на розв'язання нерівності з урахуванням області визначення.

Задача 57. Для кожного значення a розв'язати рівняння

$$(3^{x+1} + 3^{x+2} - 10) (\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{3a - 6 - x^2}) = 0.$$

Розв'язання. Насамперед розглянемо показникове рівняння:

$3^{x+1} + 3^{x+2} - 10 = 0$. Перенесемо (-10) у праву частину і отримаємо рівняння: $3^{x+1} + 3^{x+2} = 10$, $3^{x+1}(1 + 3^2) = 10$, $3^{x+1} = 1$, $x + 1 = 0$, звідси $x = -1$.

Знайдемо ОДЗ заданого рівняння:
$$\begin{cases} x^2 + a \geq 0, \\ 3a - 6 - x^2 \geq 0. \end{cases}$$

На цьому етапі розглянемо задане рівняння

$(3^{x+1} + 3^{x+2} - 10)(\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{3a - 6 - x^2}) = 0$. Ми знаємо, що добуток дорівнює нулю, коли один із множників дорівнює нулю. Оскільки, ми знайшли корінь показникового рівняння (одного із множників), перевіримо за яких умов цей корінь задовольняє ОДЗ:

$$x = -1, \begin{cases} 1 + a \geq 0, \\ 3a - 6 - 1 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq 1, \\ 3a \geq 7; \end{cases} \begin{cases} a \geq 1, \\ a \geq 2\frac{1}{3}; \end{cases} \text{ звідси } a \geq 2\frac{1}{3}.$$

Отже, при значеннях параметра $a \geq 2\frac{1}{3}$, корінь $x = -1$ є коренем заданого рівняння.

$$\text{Розглянемо ірраціональне рівняння } \sqrt{x^2 + a} - \sqrt{3a - 6 - x^2} = 0,$$

$$\sqrt{x^2 + a} = \sqrt{3a - 6 - x^2}.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння і отримаємо:

$$x^2 + a = 3a - 6 - x^2, \quad 2x^2 = 2a - 6, \quad \text{звідси } x^2 = a - 3.$$

Рівняння $x^2 = a - 3$ матиме розв'язок тоді, коли $a - 3 \geq 0$. Якщо вираз $a - 3 = 0$, $a = 3$, то $x = 0$. Якщо $a > 3$, то отримаємо два корені:

$x_1 = -\sqrt{a - 3}$, $x_2 = \sqrt{a - 3}$. Вони і є коренями заданого рівняння, але необхідно, щоб ці корені задовольняли ОДЗ. Оскільки ми прирівняли вирази $x^2 + a = 3a - 6 - x^2$, то достатньо перевірити одну із даних нерівностей і переконатись, що дані корені задовольняють ОДЗ.

Якщо підставити у нерівність $x^2 + a \geq 0$ $a > 3$, то вираз $x^2 + a$ є додатнім числом. Тому можна зробити висновок, що дані корені задовольняють ОДЗ, за умови, коли $a > 3$.

Нижче на рисунку зобразимо, як змінюється на осі параметр a :

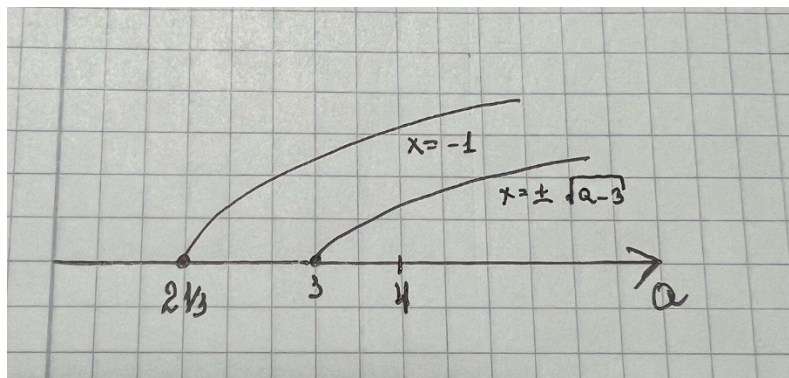


Рисунок 16.

За певних умов, деякі корені рівняння можуть співпадати, наприклад:

$$-\sqrt{a - 3} = -1, \quad \sqrt{a - 3} = 1, \quad a - 3 = 1, \quad a = 4.$$

Отже, якщо $a \in (-\infty; 2\frac{1}{3})$, то рівняння не має коренів. Якщо $a \in [2\frac{1}{3}; 3)$, то $x = -1$. Якщо $a \in [3; +\infty)$, то $x = -1$, $x = -\sqrt{a - 3}$,

$$x = \sqrt{a - 3}.$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; 2\frac{1}{3})$, то рівняння не має коренів; якщо $a \in [2\frac{1}{3}; 3)$, то $x = -1$; якщо $a \in [3; +\infty)$, то $x = -1$, $x = -\sqrt{a-3}$,
 $x = \sqrt{a-3}$.

Задача 58. При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x+15}(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25})=a\sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені?

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень: $2x+15 \geq 0$;
 $x \geq -7,5$.

$$\sqrt{2x+15}(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25})-a\sqrt{2x+15}=0;$$

$$\sqrt{2x+15}(\sqrt{(x+9)^2}-\sqrt{(x-5)^2})-a\sqrt{2x+15}=0;$$

$$\sqrt{2x+15}(\sqrt{(x+9)^2}-\sqrt{(x-5)^2}-a)=0;$$

$$\sqrt{2x+15}(\sqrt{|x+9|}-\sqrt{|x-5|}-a)=0.$$

$$\text{Отже, } \sqrt{2x+15}=0 \Rightarrow x=-7,5 \quad \text{або} \quad |x+9|-\sqrt{|x-5|}-a=0.$$

Якщо $x \geq 5$, то $x+9-x+5-a=0$. $a=14$, то рівняння має безліч розв'язків.

$$\text{Якщо } -7,5 \leq x < 5, \text{ то } x+9+x-5-a=0; x=\frac{a-4}{2}.$$

$$\text{Якщо } x > -7,5, \text{ то } \frac{a-4}{2} > -7,5 \Rightarrow a > 11.$$

Одержуємо, що $a \in (-11; 14)$. Отже, $a = -10$ – найменше ціле значення параметра a при якому рівняння має лише два різні корені.

Відповідь: $a = -10$.

РОЗДІЛ 5

РОЗРОБКА КУРСУ

У процесі написання науково-дослідної роботи було розроблено декілька занять для учнів 10 класу. Ці заняття можна об'єднати у курс «Ірраціональні рівняння та нерівності». Матеріал даного курсу сприяє поглибленню знань учнів, які вивчають дану темку на профільному рівні та на стандартному рівні. Він розрахований на повторення теми, оскільки дана тема, для багатьох учнів є складною.

Курс створений з метою покращення формування математичних компетентностей під час розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей різними методами. Він складається з чотирьох уроків на тему:

- «Ірраціональні рівняння, методи їх розв'язування»;
- «Нестандартні методи розв'язування ірраціональних рівнянь»;
- «Ірраціональні нерівності, методи їх розв'язування»;
- «Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами. Узагальнення і систематизація знань».

Урок № 1

Для більшості учнів розв'язування ірраціональних рівнянь є досить складним завданням, адже у шкільній програмі на їх вивчення приділяється досить мало уваги. Наприклад, у підручнику для 10 класу «Алгебра і початки аналізу (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень)», авторами якого є Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С., розглядаються не всі методи розв'язування ірраціональних рівнянь, а тільки метод піднесення до одного і того ж степеня та метод заміни змінних.

На першому занятті ми повторимо закріпленні знання учнів з теми «Ірраціональні рівняння, методи їх розв'язування» та наведемо приклади до кожного методу.

Тема: «Ірраціональні рівняння, методи їх розв'язування».

Мета: повторити методи розв'язування ірраціональних рівнянь, поглибити й розширити знання учнів новими методами розв'язування ірраціональних рівнянь, сформувати в учнів вміння логічно мислити при виборі методу та способу розв'язання ірраціонального рівняння, виховувати культуру спілкування та етику.

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань, навичок та вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Повторення теоретичного матеріалу.

Пригадаємо визначення ірраціональних рівнянь, рівносильних рівнянь, рівняння-наслідку та методи їх розв'язування.

Ірраціональними називаються рівняння, у яких під знаком кореня міститься змінна. Наприклад,

$$\sqrt{x} = 4, \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-3} = 6, \quad \sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6.$$

Пригадаємо методи розв'язування ірраціональних рівнянь, які ви засвоїли на уроках алгебри:

- метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня;
- метод заміни змінних.

Насамперед, розглянемо метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня та пригадаємо наступні теореми:

Теорема 1. Якщо піднести обидві частини рівняння до парного степеня, отримаємо рівняння-наслідок. Тут варто пригадати, що в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь, при піднесенні до парного степеня, можуть появитися сторонні корені, які під час перевірки відсіюються.

Теорема 2. Якщо піднести обидві частини рівняння до непарного степеня, отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Повторимо теореми рівносильності:

$$1. \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \sqrt{f(x)} = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = g(x) \leftrightarrow (f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}, k \in N, \text{ при умові, що } f(x) \geq 0 \text{ і } g(x) \geq 0 \text{ виконуються для будь-якого } x \in M.$$

III. Розв'язування вправ.

Застосуємо у процесі розв'язування наступних ірраціональних рівнянь метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня.

Задача. Знайдіть розв'язок рівняння

$$\sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2} = \sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x}.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2})^2 = (\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x})^2;$$

$$9x+7 - 2\sqrt{(9x+7)(x-2)} + x-2 = 11x+3 -$$

$$2\sqrt{(11x+3)(2-x)} + 2-x;$$

Звідси, $\sqrt{9x^2 - 11x - 14} = \sqrt{6 + 19x - 11x^2}$. Знову, піднесемо ліву і праву частину рівняння до квадрату і отримаємо:

$$9x^2 - 11x - 14 = 6 + 19x - 11x^2.$$

Зводимо подібні доданки і отримуємо квадратне рівняння:

$$20x^2 - 30x - 20 = 0.$$

Поділивши це рівняння на 10, отримаємо $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Звідси,

$$x_1 = -0,5, \quad x_2 = 2.$$

На цьому етапі нам потрібно перевірити, чи знайдені корені є розв'язками початкового рівняння.

Підставимо корінь $x_1 = -0,5$ у задане рівняння:

$$\sqrt{9 \cdot (-0,5) + 7} - \sqrt{(-0,5) - 2} = \sqrt{11 \cdot (-0,5) + 3} - \sqrt{2 - (-0,5)}.$$

Відразу бачимо, що підкореневий вираз $\sqrt{(-0,5) - 2} < 0$. Отже, робимо висновок, що корінь $x_1 = -0,5$ є стороннім коренем.

Перевіримо, чи задовольняє початкове рівняння корінь $x_2 = 2$:
 $\sqrt{9 \cdot 2 + 7} - \sqrt{2 - 2} = \sqrt{11 \cdot 2 + 3} - \sqrt{2 - 2}$, звідси $\sqrt{25} = \sqrt{25}$. Отже, $x_2 = 2$ є коренем заданого рівняння.

Відповідь: $x = 2$.

Задача. Знайдіть розв'язок рівняння $\sqrt{x^2 - 5x} = \sqrt{x - 2}$.

Розв'язання. Це рівняння є рівносильним системі
$$\begin{cases} x^2 - 5x = x - 2, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{7}, \\ x = 3 + \sqrt{7}, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad x = 3 + \sqrt{7}.$$

Відповідь: $x = 3 + \sqrt{7}$.

Розв'яжемо ірраціональні рівняння методом заміни змінних.

Задача. Знайдіть розв'язок рівняння $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$5(x^2 + 2x - 15) + 75 + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123.$$

Знайдемо ОДЗ: $x^2 + 2x - 15 \geq 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$ або

$$\begin{cases} x + 5 \leq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases}, \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq 3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \leq -5 \\ x \leq 3 \end{cases}. \text{ ОДЗ: } x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty).$$

Тепер можна перейти до заміни: нехай $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = t$. $t \geq 0$, оскільки підкореневий вираз завжди додатний або дорівнює нулю. Тоді,

$$5t^2 + 75 + t = 123, \quad 5t^2 + t - 48 = 0.$$

Звідси, $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -3,2 \end{cases}$. Бачимо, що $t_2 = -3,2$ — сторонній корінь, бо $t \geq 0$.

Отже, $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = 3$. Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння:

$$(\sqrt{x^2 + 2x - 15})^2 = (3)^2; \quad x^2 + 2x - 15 = 9; \quad x^2 + 2x - 24 = 0. \text{ Звідси,}$$

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 4.$$

Оскільки, ОДЗ: $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$, то $x_1 = -6$ і $x_2 = 4$ є коренями заданого рівняння.

Відповідь: $x_1 = -6, x_2 = 4$.

Задача. Знайдіть розв'язок рівняння $\sqrt{x+11} - \sqrt[3]{x-6} = 5$.

Розв'язання. Виконаємо заміну: $\sqrt[3]{x-6} = t, \quad x-6 = t^3, \quad x = t^3 + 6$.

Отримаємо рівняння: $\sqrt{t^3 + 6 + 11} - t = 5, \quad \sqrt{t^3 + 17} = t + 5$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і отримаємо: $t^3 + 17 = t^2 + 10t + 25$, $t^3 - t^2 - 10t - 8 = 0$. Запишемо це рівняння у вигляді:

$$t^3 + t^2 - 2t^2 - 2t - 8t - 8 = 0.$$

Розкладемо рівняння, яке ми одержали на множники:

$$(t+1) - 2t(t+1) - 8(t+1) = 0, \quad (t+1)(t^2 - 2t - 8) = 0,$$

$$(t+1)(t^2 + 2t - 4t - 8) = 0, \quad (t+1)(t(t+2) - 4(t+2)) = 0.$$

Отримаємо рівняння: $(t+1)(t+2)(t-4) = 0$, звідси

$$t+1=0, \quad t+2=0, \quad t-4=0. \quad \text{Отже, } t_1 = -1, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = 4.$$

Повернемося до заміни та підставимо отримані корені:

якщо $t_1 = -1$, то $\sqrt[3]{x-6} = -1, \quad x-6 = -1$, звідси $x_1 = 5$;

якщо $t_2 = -2$, то $\sqrt[3]{x-6} = -2, \quad x-6 = -8$, звідси $x_2 = -2$;

якщо $t_3 = 4$, то $\sqrt[3]{x-6} = 4, \quad x-6 = 64$, звідси $x_3 = 70$.

Відповідь: $x_1 = 5, x_2 = -2, x_3 = 70$.

IV. Підведення підсумків уроку.

Урок № 2

На першому уроці ми повторили раніше засвоєний матеріал, розв'язали ірраціональні рівняння методом піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня та методом заміни змінних. На другому уроці ми познайомимо учнів з новими нестандартними методами розв'язування ірраціональних рівнянь, а також, до кожного методу наведемо приклад розв'язування ірраціонального

рівняння, щоб учні могли обрати, яким саме методом краще розв'язати ірраціональне рівняння.

Тема: «Нестандартні методи розв'язування ірраціональних рівнянь».

Мета: поглибити й розширити знання учнів новими методами розв'язування ірраціональних рівнянь, сформувати в учнів вміння аналізувати використаний метод.

Тип уроку: удосконалення знань умінь і навичок.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Повторення засвоєного матеріалу.

III. Удосконалення знань.

На попередньому уроці ми розглянули раніше засвоєні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Тому на даному уроці варто розглянути нестандартні методи розв'язування ірраціональних рівнянь.

Насамперед розглянемо розв'язування ірраціональних рівнянь методом введення спряжених виразів. Даний спосіб спрощує розв'язування рівнянь виду

$$\sqrt{a_1x^2 + b_1x + c_1} \pm \sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2} = tx + n,$$

коли дріб $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1 - (a_2x^2 + b_2x + c_2)}{tx + n}$

є двочленом першого степеня.

Для прикладу, наведемо розв'язування ірраціонального рівняння, застосовуючи даний спосіб.

Задача. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{6x^2 - 59x + 149} - \sqrt{x^2 - 9x + 24} = x - 5. \quad (1)$$

Розв'язання. Ліву і праву частини заданого рівняння помножимо на спряжений вираз $(\sqrt{6x^2 - 59x + 149} + \sqrt{x^2 - 9x + 24})$:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{6x^2 - 59x + 149} - \sqrt{x^2 - 9x + 24}) \cdot (\sqrt{6x^2 - 59x + 149} + \\ & + \sqrt{x^2 - 9x + 24}) = (x - 5) \cdot (\sqrt{6x^2 - 59x + 149} + \sqrt{x^2 - 9x + 24}). \end{aligned}$$

Виконавши дію множення у лівій частині, отримаємо рівняння:

$$5x^2 - 50x + 125 = (x - 5) \cdot (\sqrt{6x^2 - 59x + 149} + \sqrt{x^2 - 9x + 24});$$

$$5(x - 5) = \sqrt{6x^2 - 59x + 149} + \sqrt{x^2 - 9x + 24};$$

$$x - 5 = 0. \quad (2)$$

Отримали корінь $x_1 = 5$. З рівнянь (1) і (2) одержимо:

$$\sqrt{x^2 - 9x + 24} = 2(x - 5).$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння

$$(\sqrt{x^2 - 9x + 24})^2 = (2(x - 5))^2 \quad \text{і} \quad \text{отримаємо: } 3x^2 - 31x + 76 = 0. \quad \text{Звідси}$$

$$x_2 = \frac{19}{3}, \quad x_3 = 4.$$

Виконавши перевірку, легко побачити, що корінь $x_3 = 4$ не задовольняє рівняння.

$$\text{Відповідь: } x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{19}{3}.$$

Наступним методом, який ми розглянемо, є метод однорідних рівнянь.

Однорідним називається рівняння виду

$$Af^2(x) + Bf(x)g(x) + Cg^2(x) = 0.$$

Таке рівняння зводиться заміною $\frac{f(x)}{g(x)} = t$ або $\frac{g(x)}{f(x)} = t$ до квадратного рівняння.

Розв'яжемо наступне ірраціональне рівняння цим методом.

$$\text{Задача 21. Розв'язати рівняння } 3x^2 + x + 2 - 4x\sqrt{x+2} = 0.$$

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x+2}$ і $g(x) = x$. Тоді одержимо рівняння $f^2 -$

$$4gf + 3g^2 = 0, \quad \text{звідси } \frac{g}{f} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{g}{f} = 3, \quad \text{і} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}}{x} = 1 \\ \frac{\sqrt{x+2}}{x} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{73}}{18} \end{cases}.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{73}}{18}.$$

Важливо, розглянути метод з використанням тригонометричних заміни у ірраціональних рівняннях.

Тригонометричні заміни у ірраціональних рівняннях застосовуються тоді, коли область визначення початкового рівняння сходиться з областю значення тригонометричної функції або міститься в цій області.

Наведемо приклад.

Задача 26. Розв'язати рівняння $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ: $1-x^2 \geq 0$, звідси $|x| \leq 1$. Тепер можна виконати заміну: $x = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$\sqrt{1-\cos^2 \alpha} = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

Звідси $|\sin \alpha| = \cos 3\alpha$.

Нерівність $\sin \alpha \geq 0$ є правильною при $\alpha \in [0; \pi]$. Маємо $\sin \alpha = \cos 3\alpha$.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \end{cases}$$

Виберемо із розв'язків сукупності, ті розв'язки, які задовольняють умову $0 \leq \alpha \leq \pi$. Отже, це будуть числа $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{5\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{4}$.

IV. Підведення підсумків уроку.

Урок № 3

На третьому уроці даного курсу ми пригадаємо раніше засвоєні знання з теми: «Ірраціональні нерівності, методи їх розв'язування», розглянемо нові методи розв'язування ірраціональних нерівностей та наведемо приклади до кожного методу.

Тема: «Ірраціональні нерівності, методи їх розв'язування».

Мета: повторити методи розв'язування ірраціональних нерівностей, удосконалити вміння розв'язувати ірраціональні нерівності, ознайомити учнів з іншими методами розв'язування ірраціональних рівнянь, розвивати самостійність, логічне мислення.

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань, навичок та вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Повторення теоретичного матеріалу.

Насамперед, пригадаємо означення ірраціональних нерівностей.

Ірраціональними нерівностями називаються нерівності, які містять змінну під знаком радикала.

До основних методів розв'язування ірраціональних нерівностей належать такі методи, як:

1. Метод піднесення обох частин до одного і того ж степеня (цей метод ще називають методом рівносильних перетворень);

2. Метод введення нових змінних;

3. Метод інтервалів.

З методом піднесення обох частин до одного і того ж степеня ви вже працювали, тому давайте пригадаємо теореми рівносильності:

$$1. \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \text{або} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \end{cases}$$

$$4. f(x) > g(x) \leftrightarrow (f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}, k \in \mathbb{N}, \text{ при умові, що } f(x) \geq 0 \text{ і } g(x) \geq 0 \text{ виконуються для будь-якого } x \in M.$$

Розв'яжемо наступні нерівності цим методом.

Задача. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x^2 + 6x - 3} \geq \sqrt{x^2 + 4x}$.

Розв'язання. Бачимо, що для розв'язання даної нерівності буде доречним використання теореми рівносильності, а саме:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Отже, задана нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} 2x^2 + 6x - 3 \geq x^2 + 4x, \\ x^2 + 4x \geq 0. \end{cases} \quad \text{Звідси отримаємо: } \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0, \\ x(x + 4) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -3, \\ x \geq 0, \\ x \leq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -4. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Задача. Розв'язати нерівність $(x - 2)\sqrt{x^2 - 1} \leq x^2 - 4$.

Розв'язання. Запишемо задану нерівність у вигляді:

$$(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} - x - 2) \leq 0.$$

Нерівність, яку ми отримали є рівносильною сукупності, що складається з двох систем.

$$1) \begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ \sqrt{x^2 - 1} \leq x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 1 \leq x^2 + 4x + 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \geq 2.$$

$$2) \begin{cases} x - 2 \leq 0, \\ \sqrt{x^2 - 1} \geq x + 2. \end{cases} \quad \text{Нерівність } \sqrt{x^2 - 1} \geq x + 2 \text{ є рівносильною сукупності:}$$

$$\begin{cases} x + 2 < 0, \\ \begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq (x + 2)^2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x < -2, \\ -2 \leq x \leq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Отже, отримаємо: } \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq -\frac{5}{4}; \end{cases} \quad x \leq -\frac{5}{4}.$$

$$\text{Відповідь: } \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [2; +\infty).$$

Нерівність $(x - 2)\sqrt{x^2 - 1} \leq x^2 - 4$ можна ще розв'язати, застосовуючи метод інтервалів. Коли ми розв'яжемо рівняння

$$(x - 2)(\sqrt{x^2 - 1} - x - 2) = 0,$$

то одержимо два корені: $x = 2$, $x = -\frac{5}{4}$.

На малюнку зображено розв'язування цієї нерівності.

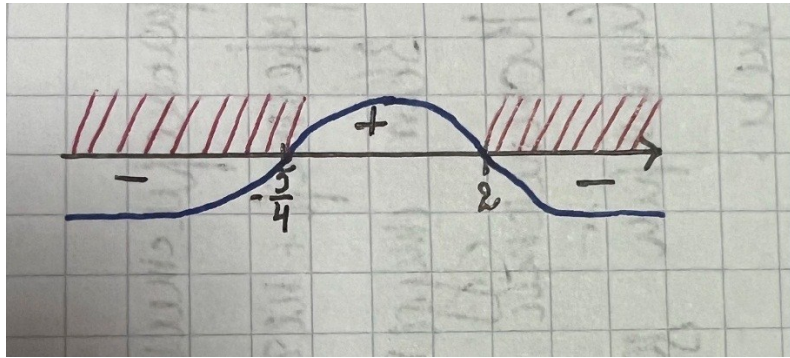


Рисунок 17.

На цьому етапі розглянемо метод заміни змінних. Цей метод використовують при розв'язуванні більш складніших ірраціональних нерівностей. Насамперед, потрібно визначити ОДЗ, а після цього виконати заміну.

Задача. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{2x-1}{x+4}} - \sqrt{\frac{x+4}{2x-1}} \geq \frac{7}{12}$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{x+4} \geq 0, \\ \frac{x+4}{2x-1} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x \neq -4; \\ x+4 \geq 0, \\ x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -4) \cup [0,5; +\infty), \\ x \in (-\infty; -4] \cup (0,5; +\infty). \end{cases}$ Отже, $x \in (-\infty; -4) \cup (0,5; +\infty)$.

Виконаємо заміну: $\sqrt{\frac{2x-1}{x+4}} = t$, $\sqrt{\frac{x+4}{2x-1}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Тоді отримаємо нерівність: $t - \frac{1}{t} \geq \frac{7}{12}$. Звідси, $\frac{12t^2-7t-12}{12t} \geq 0$, $\begin{cases} (12t^2-7t-12)t \geq 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$

Розглянемо рівняння $(12t^2-7t-12)t = 0$, $\begin{cases} 12t^2-7t-12 = 0, \\ t = 0. \end{cases}$ Звідси

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{3}{4}, \\ t_2 = \frac{4}{3}, \\ t_3 = 0. \end{cases}$$

Відкладемо на числовій ці точки і визначимо, які проміжки задовольняють рівняння:

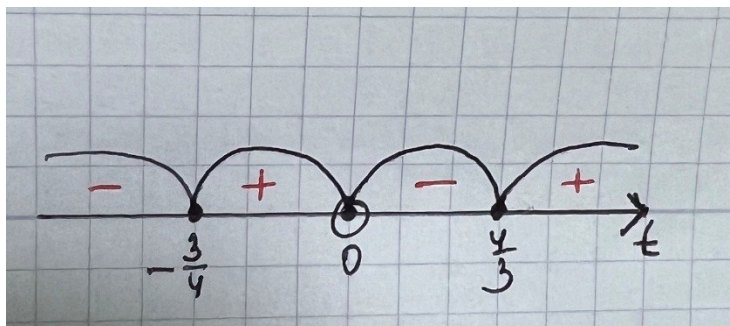


Рисунок 18.

Таким чином, $t \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right) \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Повертаючись до заміни, бачимо, що $t > 0$. Тому $t \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$. Отже,

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+4}} \geq \frac{4}{3}. \text{ Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності: } \frac{2x-1}{x+4} \geq \frac{16}{9},$$

$$\frac{2x-1}{x+4} - \frac{16}{9} \geq 0, \quad \frac{9(2x-1)-16(x+4)}{9(x+4)} \geq 0, \quad \frac{18x-9-16x-64}{9(x+4)} \geq 0, \quad \frac{2x-73}{9(x+4)} \geq 0,$$

$$\begin{cases} 9(2x-73)(x+4) \geq 0, \\ x+4 \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 18(x-\frac{73}{2})(x+4) \geq 0, \\ x \neq -4. \end{cases}$$

На числовій прямій відкладемо нулі функції і визначимо знаки кожного із проміжків:

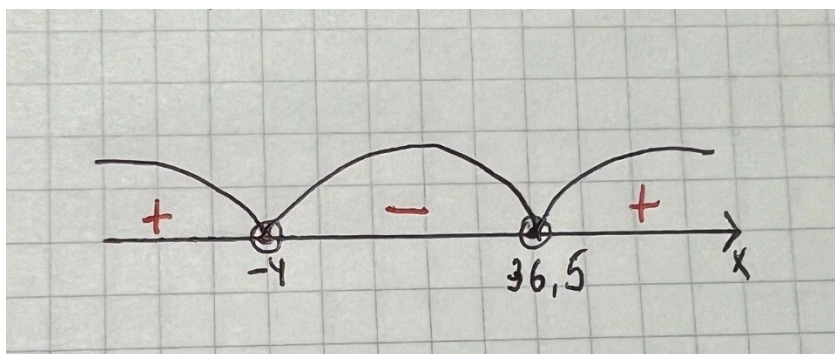


Рисунок 19.

Отже, $x \in (-\infty; -4) \cup (36,5; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -4) \cup (36,5; +\infty)$.

Розглянемо метод інтервалів, який вважають загальним методом розв'язання нерівностей.

Задача. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+8} > \sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3}$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3}$, таким чином, треба розв'язати нерівність виду $f(x) > 0$.

1) Знайдемо область допустимих значень нерівностей: $\begin{cases} x+8 \geq 0, \\ x+1 \geq 0, \\ 4x-3 \geq 0; \end{cases} \quad x \in$

$\left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

2) Розв'яжемо рівняння $\sqrt{x+8} = \sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3}$

або $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3}$, звідси

$$x+8 - 2\sqrt{(x+8)(x+1)} + x+1 = 4x-3;$$

$$-2\sqrt{x^2+9x+8} = 2x-12; \quad \sqrt{x^2+9x+8} = -x+6;$$

$$x^2+9x+8 = 36-12x+x^2; \quad 21x = 28; \quad x = \frac{4}{3}.$$

3) Точка $\frac{4}{3}$ поділяє ОДЗ $x \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$ на два проміжки: $\left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$,

але точка $\frac{4}{3}$ не відноситься до жодного із проміжків, бо $f\left(\frac{4}{3}\right) = 0$.

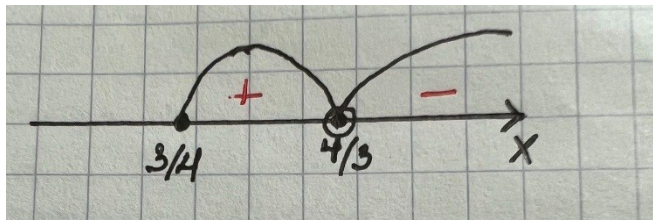


Рисунок 20.

4) Визначимо на кожному із отриманих проміжків знаки функції $f(x)$:

а) $x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right)$. Виберемо деяку точку $x = 1$, звідси $f(1) = \sqrt{9} - \sqrt{2} - \sqrt{1}$; $f(1) =$

$$2 - \sqrt{2} > 0, \quad f(x) > 0;$$

б) $x \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. Виберемо точку $x = 2$, $f(2) = \sqrt{10} - \sqrt{3} - \sqrt{5} < 0$, $f(x) < 0$.

Відповідь: $x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{4}{3}\right)$.

IV. Підведення підсумків уроку.

Урок №4

На останньому заняті розглянемо розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, які містять параметр. Адже завдання такого типу зустрічалися, досить часто, у завданнях ЗНО. Також, для кращого засвоєння даного матеріалу, учням буде запропоновано перелік завдань, які вони зможуть розв'язати самостійно.

Тема: «Ірраціональні рівняння та нерівності з параметрами. Узагальнення і систематизація знань».

Мета: закріпити та повторити отримані знання, розвивати логічне мислення учнів.

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань, навичок та вмінь.

Хід уроку

I. Організаційний момент.

II. Повторення теоретичного матеріалу.

III. Розв'язування вправ.

Задача. Для кожного значення a розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x + a} = x - 2.$$

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень рівняння:

$$2x + a \geq 0, \quad x \geq -\frac{a}{2}.$$

Розв'яжемо рівняння способом піднесення до квадрату:

$$(\sqrt{2x + a})^2 = (x - 2)^2,$$

$$2x + a = x^2 - 4x + 4, \quad 6x + a - x^2 - 4 = 0, \quad x^2 - 6x - a + 4 = 0.$$

Знайдемо дискримінант: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1(-a + 4) = 36 + 4a - 16 = 20 + 4a$.

$$\text{Отже, } x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20+4a}}{2}, \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5+a}}{2}, \quad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5+a}.$$

Якщо $x_1 = 3 + \sqrt{5+a}$, то $-\sqrt{5+a} = 3 - x$, $5 + a = x^2 - 6x + 9$, звідки

$$a = x^2 - 6x + 4.$$

Якщо $x_2 = 3 - \sqrt{5+a}$, то $\sqrt{5+a} = 3 - x$, $5 + a = 9 - 6x + x^2$, звідки

$$a = x^2 - 6x + 4.$$

Відповідь: $a = x^2 - 6x + 4$.

Задача. При якому значенні параметра a розв'язок нерівності

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1 \text{ містить проміжок } [\frac{1}{4}; 1]?$$

Розв'язання. Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 - x < 0 \\ x^2 - 2ax \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 2ax > (1 - a)^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Бачимо, що розв'язок системи $\begin{cases} 1 - x < 0 \\ x^2 - 2ax \geq 0 \end{cases}$ не містить проміжок $[\frac{1}{4}; 1]$ (тому що $x > 1$). Отже, будемо розглядати систему $\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - 2ax > (1 - a)^2 \end{cases}$. Ця система рівносильна системі: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x(1 - a) > \frac{1}{2} \end{cases}$. Зрозуміло, що при $a = 1$ дана система не має розв'язків.

Розглянемо випадок, коли $a < 1$: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x > \frac{1}{2(1-a)} \end{cases}$. Очевидно, що розв'язок даної системи буде містити проміжок $[\frac{1}{4}; 1]$, якщо $\frac{1}{2(1-a)} < \frac{1}{4}$ та за умови, що $a < 1$, одержимо: $a < -1$.

Розглянемо випадок, коли $a > 1$: $\begin{cases} x \leq 1 \\ x < \frac{1}{2(1-a)} \end{cases}$. Якщо $\frac{1}{2(1-a)} > 1$, то розв'язок нерівності $x^2 + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ буде містити проміжок $[\frac{1}{4}; 1]$.

Якщо $a > 1$, то дана нерівність не має розв'язків.

Відповідь: $a < -1$.

Бувають поодинокі випадки, де параметр вважають основною змінною. Це відбувається тоді, коли викликає деякі затруднення перетворення виразу

відносно основної змінної. У такий момент у свого роду параметр перетворюється сама змінна, стосовно якої розв'язується рівняння чи нерівність.

Задача. Знайдіть розв'язок рівняння $\sqrt{a - \sqrt{a - x}} = x$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівносильне системі $\begin{cases} x \geq 0, \\ \sqrt{a - x} = a - x^2, \end{cases}$ або

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a - x^2 \geq 0, \\ a - x = (a - x^2)^2 \end{cases}. \text{ Запишемо третє рівняння системи у вигляді}$$

$a^2 - a(2x^2 + 1) + (x^4 + x) = 0$ та розв'яжемо його як квадратне щодо змінної a . $a = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2} = \frac{2x^2 \pm (2x - 1)}{2}$, звідки отримаємо два рівняння $x^2 + x - a = 0$ та $x^2 + x - a + 1 = 0$ з розв'язками: при $a \geq -\frac{1}{4}$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$ та при $a \geq \frac{3}{4}$ $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$. Умову $x \geq 0$ не задовольняє корінь $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$. При $a \geq 0$ виконуються умови $x \geq 0$ та $a - x^2 \geq 0$ для кореня $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Вказані умови задовольняють корені $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$ при $a \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

Відповідь: при $a \in \left[0; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ $x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. При $a \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$

$x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ та $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$. При всіх решту a розв'язків нема.

Вправи для самостійного виконання:

1. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = 3$.

2) $3x + \sqrt{7x - 5} = 9$.

Відповідь: $x = 2$.

3) $\sqrt{x - 5} + \sqrt{3 - x} = 7$.

Відповідь: $x \in \emptyset$.

4) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 4$.

Відповідь: $x_1 = 1,5, x_2 = 2,5$.

$$5) \sqrt{x^3 - 2x^2 - x + 3} = \sqrt{4x - 3}.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = 3$.

$$6) \sqrt[5]{2x - 4} = 2.$$

Відповідь: $x = 18$.

$$7) \sqrt[3]{5x + 7} - \sqrt[3]{5x - 12} = 1.$$

Відповідь: $x_1 = -3, x_2 = 4$.

$$8) \sqrt{x + 1} + \sqrt{4x + 13} = \sqrt{3x + 12}.$$

Відповідь: $x = -1$.

$$9) \sqrt{x} + \sqrt{x + 9} = 2.$$

Відповідь: $x \in \emptyset$.

$$10) \sqrt{6 - x - x^2} - \sqrt{x^2 + x - 1} = 1.$$

Відповідь: $x_1 = -2, x_2 = 1$.

2. Розв'язати нерівність:

$$1) (x - 12)\sqrt{x - 3} \leq 0.$$

Відповідь: $x \in [3; 12]$.

$$2) \sqrt{3x + 6} > \sqrt{x - 3}.$$

Відповідь: $x \in [3; +\infty)$.

$$3) 4 - x < \sqrt{x^2 - 2x}.$$

Відповідь: $x \in (\frac{8}{3}; +\infty)$.

$$4) \sqrt{3x - 6} - \sqrt{2x - 3} \leq 1.$$

Відповідь: $x \in [2; 14]$.

$$5) \frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1.$$

Відповідь: $x \in (-1; 15)$.

$$6) \sqrt{\frac{1-x}{2x-5}} < 3.$$

Відповідь: $x \in [1; \frac{46}{19})$.

$$7) \sqrt{5x + 6} < -x.$$

Відповідь: $x \in [-\frac{6}{5}; -1)$.

$$8) \sqrt{x} - \sqrt{6x+1} < \sqrt{2x+1}.$$

Відповідь: $x \in [0; +\infty)$.

$$9) \sqrt{x^2 + 2x - 63} \geq x - 3.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -9] \cup [9; +\infty)$.

$$10) \sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7.$$

Відповідь: $x = 5$.

3. Визначити при яких значеннях параметра a має дійсні корені рівняння

$$\sqrt{x^2 + 4} = \frac{10a+6}{7a-12}.$$

Відповідь: $a \in (\frac{12}{7}; \frac{15}{2})$.

IV. Підведення підсумків уроку.

ВИСНОВОК

У магістерській роботі було розглянуто основні відомості про ірраціональні рівняння і нерівності та методи розв'язання таких рівнянь і нерівностей. При розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей слід уважно та ретельно підходити до аналізу отриманих результатів. Записуючи остаточну відповідь необхідно врахувати область допустимих значень рівняння чи нерівності. Оволодівши методами та прийомами розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, учні можуть успішно розв'язувати й інші задачі різної складності.

Магістерська робота складається з п'ятих розділів. У першому розділі ми розглянули вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей в шкільному курсі математики, у другому – розглядаються означення ірраціональних рівнянь, область допустимих значень рівняння, поняття рівносильних перетворень, поняття рівняння–наслідка та різні методи розв'язування ірраціональних рівнянь, у третьому – розглядаються означення ірраціональних нерівностей, основні методи розв'язування ірраціональних нерівностей та область допустимих значень нерівностей, у четвертому – розглядаються ірраціональні рівняння та нерівності, які містять параметр, у п'ятому – розроблено курс для учнів та студентів.

У даній роботі було проведено аналіз теоретичної основи вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей та методів їх вирішення. Розглянуто певну кількість задач, на засвоєння основних методів розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

В рамках проходження практики з 6 березня по 14 квітня 2023 року в Горохолинському ліцеї імені Романа Кияка Богородчанської селищної ради, мною було використано в процесі освітньої діяльності школи матеріали науково-дослідної роботи на тему «Формування математичних компетентностей

в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей» при проведенні додаткових уроків з алгебри з учнями 10 класу.

На додаткових уроках ми з учнями розглянули тему « Ірраціональні рівняння та нерівності». Мета проведення цих уроків полягла в тому, щоб в учнів сформувалися математичні компетентності в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, а також, метою проведення, було вдосконалити раніше розглянуті основні методи і прийоми розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей, розвивати пам'ять, логічне мислення, пізнавальний інтерес до математики.

При використанні матеріалів науково-дослідної роботи я зрозуміла, що учні потребують більше теоретичних і практичних знань під час розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, а особливо з параметром. В учнів не достатньо сформована математична компетентність: вміння розв'язувати ірраціональні рівняння і нерівності різними способами.

Також, матеріали даної роботи були опубліковані у збірнику, що містить статті із IV міжнародної науково-методичної конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу –ІТМ*плюс-2023».

Матеріал даної роботи сприяє систематизації, поглибленню і розширенню знань, навичок та умінь розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності та їх цілеспрямованому використанні під час виконання різних типів завдань. Його можна використовувати на уроках математики при вивченні програмного матеріалу і в роботі шкільних математичних гуртків.

У процесі написання роботи використовувалась значна кількість методичної та навчальної літератури.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г.П. Математика : підруч. Для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. – 288 с.
2. Істер О. С. Алгебра: підручник для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2016. —272 с.
3. Істер О. С. Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 1. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 480 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків. : Гімназія, 2016. — 384 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 8 кл. з поглиб. вивч. математики. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків. : Гімназія, 2008. — 368 с.
6. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 415 с.
7. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с.
8. Орач Б. Г. Підвищимо ефективність викладання математики в школі. — Львів : Сполом, 2006 .
9. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2012, 1 сесія. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.
10. Сертифікаційна робота з математики. Пробне зовнішнє незалежне оцінювання 2016. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.

11. Сертифікаційна робота з математики. Зовнішнє незалежне оцінювання 2020, додаткова сесія. Зошит 1. Український центр оцінювання якості освіти. 20 с.

12. Сканаві М. І. Збірник задач з математики для вступників у ВНЗ. – К. : Вища шк, 1994 .

13. Слєпкань З. І. Методи навчання математики : підручник / З. І. Слєпкань . – 2-е вид., доп. і перероб . – Київ : Вища школа, 2006 . –

14. Собкович Р. І., Мазуренко Н.І. Шкільна алгебра в задачах: навчальний посібник. Частина 1./ Р.І. Собкович ,Н.І. Мазуренко. Івано-Франківськ: Голіней О.М. ,2019-315 с.

https://katg.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/97/2019/12/book_sob_maz_Skool_alg_2019.pdf

15. Титаренко О. М. 5770 задач з математики. 2-ге вид., випр. – Харків: Торсінг, 2004. 336с.

Додаток 1

Директор Горохолинського ліцею
імені Романа Кияка

Богороданської селищної ради

_____Кобилянська С.Я.

_____2023р.

Акт

впровадження (використання) результатів

виконаної науково-дослідної роботи

Курилюк Марії Ярославівни

За матеріалами науково-дослідної роботи Курилюк Марії Ярославівни на тему «Формування математичних компетентностей учнів в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей», виконаної у період з 06.03.2023 р. до 14.04.2023 р. в рамках проходження педагогічної практики кафедри математики та інформатики і методики навчання. Матеріали науково-дослідної роботи можна використовувати для індивідуального, змішаного та дистанційного навчання учнів середньої та старшої школи.

Комісія в складі:

голова комісії: Кобилянська С.Я., директор

Горохолинського ліцею імені Романа Кияка

Богородчанської селищної ради,

члени комісії: Микицей О.М., заступник директора з

навчально-виховної роботи,

Юсипів В.Д., вчитель математики

встановили використання в процесі освітньої діяльності школи матеріалів науково-дослідної роботи при проведенні додаткових уроків з алгебри з учнями 10 класу на тему «Ірраціональні рівняння та нерівності».

_____2023 р.

Голова комісії:

Кобилянська С.Я.

Члени комісії:

Микицей О.М.

Юсипів В.Д.

Додаток 2

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
 Кафедра математики та інформатики і методики навчання
 Освітній рівень другий (магістерський)
 Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)

Затверджено на засіданні кафедри математики
 та інформатики і методики навчання,
 протокол № від 2022 р.
 Завідувач кафедри Кульчицька Н. В.

ЗАВДАННЯ НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Курилюк Марія Ярославівна

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Формування математичних компетентностей учнів в процесі розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей

2. Керівник роботи Никифорчин Ірина Володимирівна, канд. екон. наук, доцент

 (прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

3. Перелік питань, які потрібно розробити: аналіз інформаційних джерел, поняття ірраціональності, аналіз шкільних підручників з алгебри, ірраціональні рівняння та нерівності, методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, ірраціональні рівняння та нерівності з параметром, розробка курсу.

4. Дата видачі завдання 20. 10. 2022 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

/п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
	<i>Вибір напрямку та теми дослідження</i>	вересень-жовтень 2022 р.	

	<i>Аналіз інформаційних джерел за поставленою проблемою, аналіз шкільних підручників, написання розділу I</i>	листопад-грудень 2022 р.	
	<i>Аналіз методів розв'язування ірраціональних рівнянь. Розробка задач з використанням методів для ірраціональних рівнянь.</i>	січень-березень 2023 р.	
	<i>Написання розділу II</i>	лютий-квітень 2023 р.	
	<i>Аналіз методів розв'язування ірраціональних нерівностей.. Розробка задач з використанням методів для ірраціональних нерівностей. Апробація задач. Спостереження за формуванням математичних компетентностей в учнів під час розв'язування задач.</i>	травень-червень 2023 р.	
	<i>Написання розділу III</i>	липень 023 р.	
	<i>Розробка ірраціональних рівнянь та нерівностей, що містять параметр.</i>	серпень 2023 р.	
	<i>Написання розділу IV</i>	вересень-жовтень 2023 р.	
	<i>Розробка занять. Написання розділу V</i>	жовтень-листопад 2023 р.	
0	<i>Оформлення роботи та підготовка до захисту</i>	листопад-грудень 2023 р	

Студент _____
(підпис)

Курилюк М.Я.
(прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____

Никифорчин І.В.