

Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему “Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень ”

Виконала:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта

(Математика)

Мак С.В.

Керівник Кульчицька Н.В.

Рецензент _____

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ І. ТЕОРЕТИЧНІ І МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ»	
1.1. Функції, способи їх задання. Графіки функцій, загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.....	5
1.2. Побудова графіків складних функцій та їх властивості.....	14
1.2.1. Побудови графіків функцій, що містять модуль.....	15
1.2.2. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази, які доцільно попередньо спростити.....	21
1.3. Аналіз програми з математики на рівні стандартному і профільному.....	24
Висновки	27
РОЗДІЛ ІІ . ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ДОДАТКІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЇХ ВЛАСТИВОСТЕЙ	
2.1. Desmos Graphing Calculator.....	31
2.2. GeoGebra Calculator Suite.....	38
Висновки.....	46
РОЗДІЛ ІІІ. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ З ТЕМИ «ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ»	
3.1. Методика представлення знань про побудову та перетворення графіків функцій в шкільному курсі алгебри.....	47
3.2. Системи вправ на узагальнення та систематизацію знань із застосуванням комп'ютерних технологій. Огляд завдань із ЗНО та ДПА.....	56
ВИСНОВКИ.....	65
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	67

ВСТУП

Головним завданням освіти, на даний час, є вже не саме передача дітям ґрунтовних знань з шкільних предметів, а навчити дітей самостійно, критично мислити, застосовувати набуті навички в повсякденному житті. Отримані навички орієнтують дітей на розв'язання прикладних задач, і важливим є спочатку їх розпізнати в реальній ситуації. Такі навички формуються закладеними компетентностями.

Для досягнення такої мети необхідно використовувати засоби, які б зацікавили та переконали учнів, що вчитись легко, потрібно та головне цікаво. На даний час домінуючим засобом для цього є застосування комп'ютерів та інформаційних технологій. Це сприяє візуалізації, відповідно зацікавленню та полегшенню сприйняття інформації учнями. Комп'ютерне моделювання інформації та завдань із теми, що вивчається, перетворює суху інформацію в математичний експеримент, полегшує сприйняття та дослідження нової інформації.

В наш час просто неможливо знайти сферу діяльності людства, де б не застосовувались графіки. Вони можуть бути різноманітними: від графіків температур – до графіків маржинального доходу. Кожен вид графіку має свою специфіку та об'єднує їх те, що вони є візуалізацією певних даних, що дає наочність для розуміння для аналізу. Поняття функціональної залежності є ґрунтовним у курсі математики. Воно вчить бачити змінні у живій мінливості, бачити їхнє відношення, залежність та поведінку. Зрозуміло, що побудова графіків є актуальною не лише в математиці, а у різних сферах нашого життя.

Однією з головних змістових ліній курсу «Математика» в старшій школі є функціональна лінія, яка сприяє досягненню визначених цілей і може бути спрямована не лише на засвоєння знань, але і на розвиток пізнавальних сил і творчого потенціалу учня. Вивчення функціональних залежностей та дослідження властивостей функцій дає можливість ґрунтовніше пізнати навколишній світ. Більшість фактів, явищ та процесів як природничих, так і

суспільних наук, можна описати за допомогою функцій. Тому тема «Функції, їх властивості та графіки» має як освітню так і прикладну значимість.

Як зазначається у навчальній програмі з математики до головних чотирьох завдань вивчення теми віднесено розвиток графічної культури учнів, оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності людини, зокрема потребує вміння «читання» графіків, тобто встановлення властивостей функції за її графіком.

Побудова графіка функції передбачає знання її властивостей і наявність певної числової інформації. В результаті побудови графіка функції $y = f(x)$ на координатній площині буде зображено деяку геометричну фігуру (криву). Якщо, наприклад, ця функція оборотна, то графік оберненої до неї є фігура, симетрична графіку функції $y = f(x)$ відносно прямої $y = x$, тобто від заданого графіка перейшли до графіка іншої функції, виконавши певне геометричне перетворення. Звичайно, це не єдина можливість застосування геометричних перетворень. Виявляється, що за їх допомогою можна перейти від графіка функції $y = f(x)$ до графіка функції виду

$y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(x + a) - b$, $y = cf(x)$, $y = f(kx)$, $y = cf(kx + a) + b$,
де a , b , c , k — дійсні числа, що не дорівнюють нулю.

Якісне засвоєння та глибоке розуміння матеріалу функціональної лінії вимагає узагальнення та систематизації знань і умінь учнів в процесі навчання. Мета роботи конкретизується у таких завданнях: проаналізувати навчальний матеріал в підручниках; описати особливості побудови графіків простих та складних функцій за допомогою елементарних геометричних перетворень детально розглянути комп'ютерні застосунки, що дають наочність та розуміння геометричних перетворень; розглянути зокрема: Desmos Graphing Calculator та GeoGebra Calculator Suite для практичного використання на уроках математики.

РОЗДІЛ I

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ»

1.1. Функції, способи їх задання. Графіки функцій, загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

Функція – це залежність двох величин, в якій для кожного значення із множини однієї величини (області визначення) відповідно існує єдине значення з множини другої величини (області значень).

Нехай M і N – дві довільні множини. Кажуть, що на множині M задано (визначено) функцію f , яка набуває значення з N , якщо кожному $x \in M$ поставлено у відповідність один і тільки один елемент $y \in N$.

Нехай M – якась множина дійсних чисел. Кажуть, що на цій множині визначена функція f дійсної змінної, якщо кожному числу $x \in M$ поставлено у відповідність єдине дійсне число y . при цьому множину M називають областю визначення функції f . Множиною значень функції f називають множину, яка складається з усіх тих значень $y \in Y$, для яких існує принаймні одне значення $x \in M$, таке, що

$$f(x)=y$$

Отже, функцію задано, якщо:

- 1) Вказано її область визначення, тобто множину M ;
- 2) Вказано відповідність f , за якою кожному значенню $x \in M$ приписується цілком певне значення $y \in Y$, $f(x)=y$

У випадках, коли функція задається формулою $f(x)=y$ і область її визначення не вказано, то за таку область умовилися вважати множину всіх тих значень аргументів, для яких вираз $f(x)$ має зміст.

Правило, за допомогою якого по значенню незалежної змінної знаходять відповідне значення функції, можна задати різними способами: аналітично, графічно, таблично та словесно.

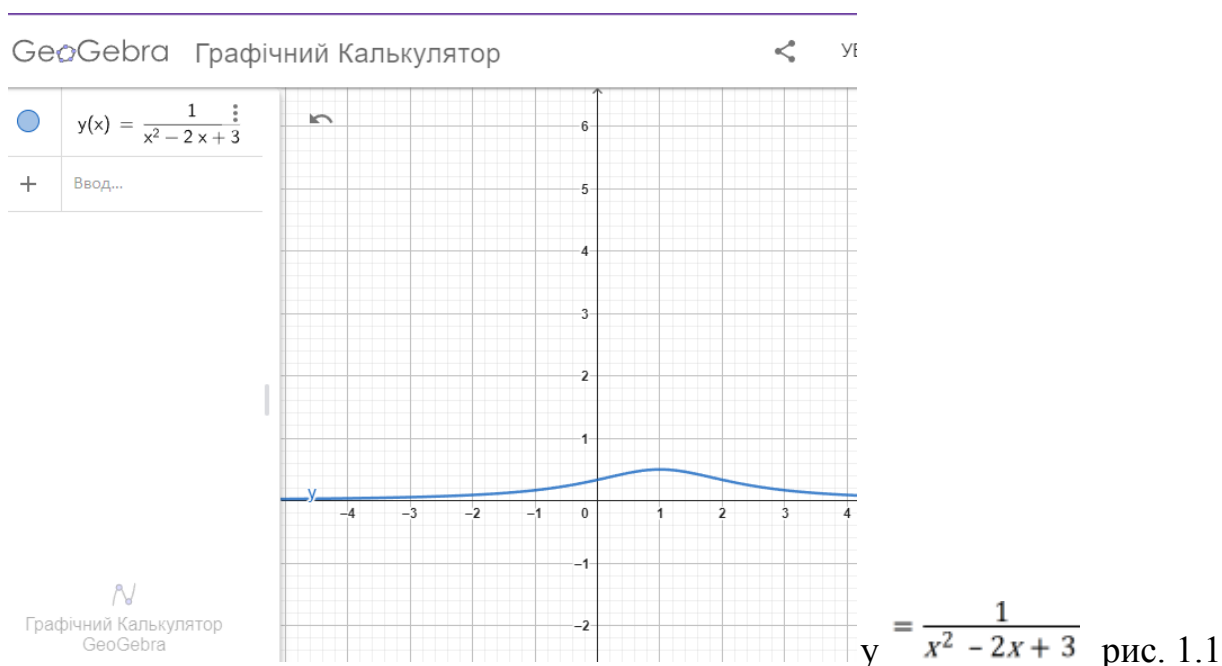
Числовою функцією з областю визначення D називається відповідність, при якій для кожного числа x з множини D існує відповідне за деяким правилом єдине число y , що залежить від x .

Найчастіше функцію задають за допомогою формули.

Графіком функції f називають множину всіх точок $(x; y)$ координатної площини, у яких абсциси є допустимими значеннями аргументу x , а ординати – відповідними значеннями функції f .

Завжди, коли потрібно прослідкувати орієнтовно поведінку функції, визначити її особливості, саме графік є незамінним. Тому маючи функцію, доцільно побудувати графік цієї залежності, і тоді вже легко детально її проаналізувати.

Графіки функцій дозволяють наглядно оцінити поведінку функції на області визначення. На рис. 1.1 та рис.1.2 зображено графіки двох функцій, які на вигляд є досить схожими за формулами:



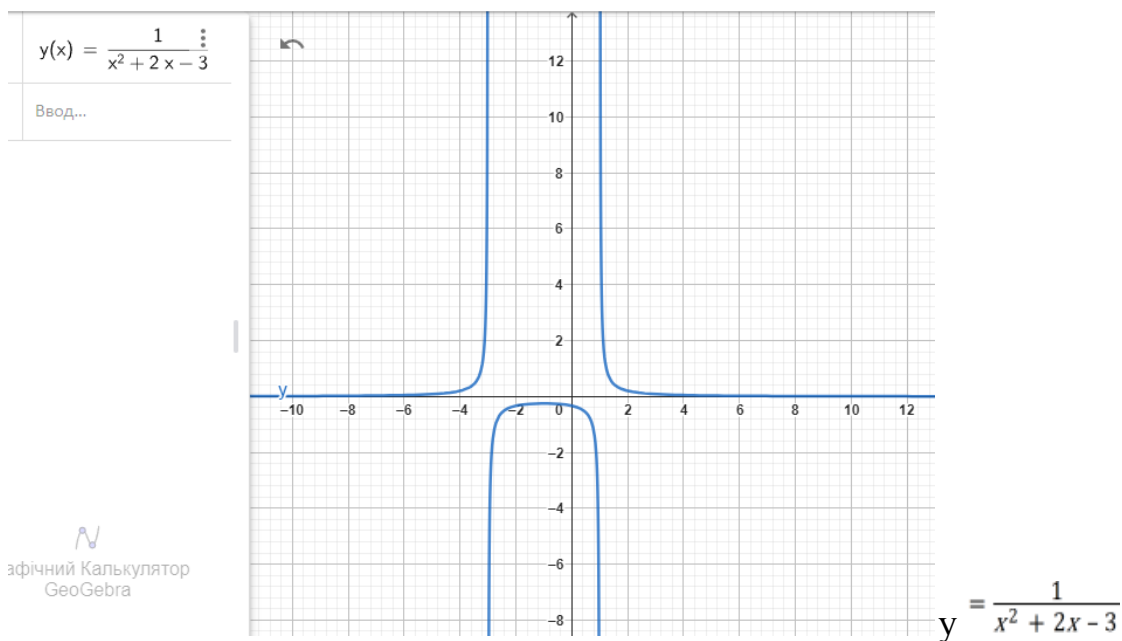


Рисунок 1.2

З рисунків 1.1 та 1.2 бачимо відмінності між, на перший погляд схожих функцій. Вони є суттєвими і саме графіки це показують нам наочно.

Загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Побудова графіка функції $y=f(x)+b$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Області визначення функцій $y=f(x)$, $y=f(x)+b$ збігаються. Нехай x_1 належить області визначення, тоді $y=f(x_1)$ і $y=f(x_1)+b$ є значеннями відповідно функцій $y=f(x)$ і $y=f(x)+b$, у цій точці. Тому точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку функції $y=f(x)$, а точка $A_1(x_1; f(x_1)+b)$ – графіку функції $y=f(x)+b$. Але точку $A_1(x_2; f(x_1)+b)$ можна дістати перенесенням точки A_1 вгору на відстань b , якщо $b>0$, і вниз на відстань $|b|$, якщо $b<0$. Оскільки x_1 – довільне значення x з області визначення функції, то так само можна дістати будь-яку точку графіка функції $y=f(x)+b$ з графіка функції $y=f(x)$.

Висновок. Графік функції $y=f(x)+b$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$ за допомогою паралельного перенесення останнього на відстань b вгору, якщо $b>0$, і на відстань $|b|$, якщо $b<0$ (бо функцію $y=f(x)+b$ можна записати в такому вигляді $y-b=f(x)$).

Приклад. Побудуємо графік функції: $y = \sin x + 5$

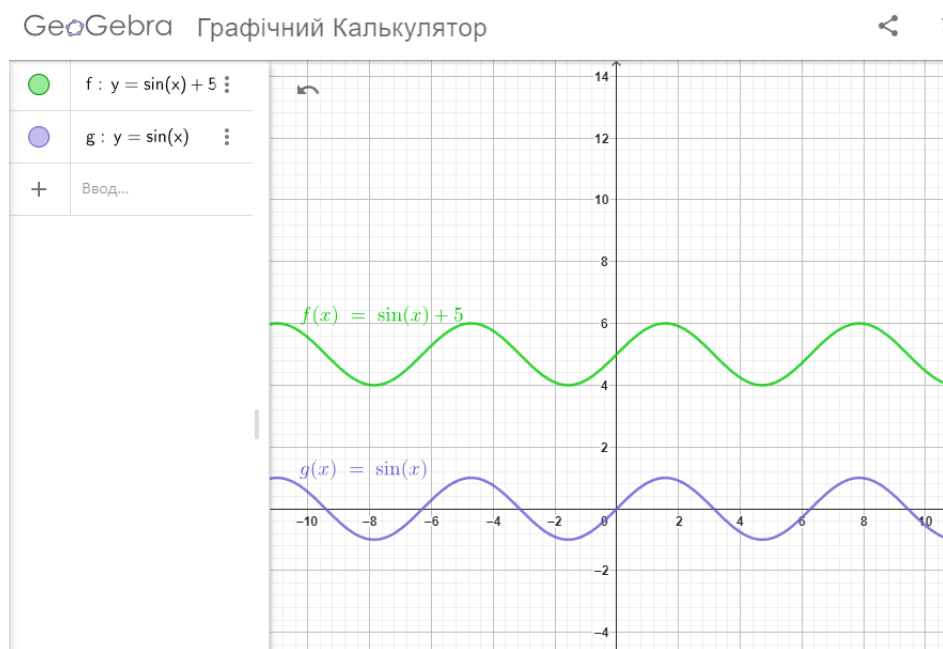


Рисунок 1.3

Побудова графіка функції $y=f(x+a)$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Графік функції $y=f(x+a)$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$ перенесенням останнього паралельно осі абсцис вправо на відстань $|a|$, якщо $a < 0$, і вліво на відстань $|a|$, якщо $a > 0$.

На практиці для того, щоб дістати графік функції $y=f(x+a)$ з графіка функції $y=f(x)$, зручно паралельно перенести вправо вісь ординат на відстань a , якщо $a > 0$, і вліво на відстань $|a|$, якщо $a < 0$.

Приклад. Побудуємо графік функції: $y = \sin(x + 5)$, рисунок 1.4

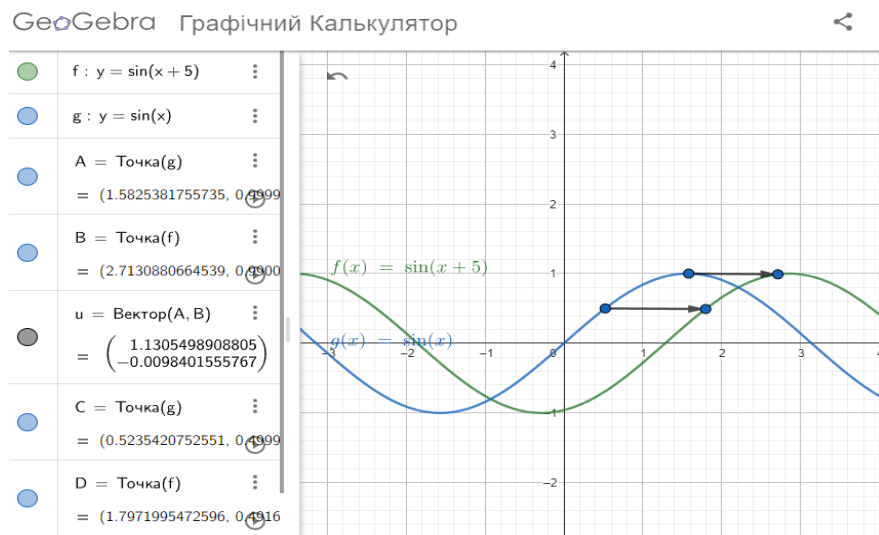


Рисунок 1.4

Побудова графіка функції $y=f(x+a)+b$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Графік функції $y=f(x+a)+b$ будується за допомогою двох послідовних паралельних перенесень графіка функції $y=f(x)$. (два розглянуті попередніх випадки). Зауважимо, що графік функції $y=f(x+a)+b$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$, якщо систему координат перенести паралельно в точку $(a;-b)$.

Побудова графіка функції $y=af(x)$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Розглянемо три випадки. 1) $a = -1$. Графік функції $y = -f(x)$ можна дістати за допомогою симетричного відображення графіка функції $y=f(x)$ відносно осі абсцис. 2) $a > 1$ графік $y=af(x)$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$ розтягуванням останнього в a раз від осі абсцис, а для $0 < a < 1$ стисненням його до осі абсцис в a раз. 3) $a < 0$. У цьому разі, крім стиснення або розтягу графіка функції $y=f(x)$, треба ще симетрично відобразити його відносно осі абсцис, щоб дістати графік функції $y=af(x)$.

Приклад. Побудуємо графіки функцій $y = -2x^2$ та $y = 1/3 \sin x$. Побудова першого графіка здійснюється з графіка $y = x^2$ (рис. 1.5), а в другому випадку - з графіка функції $y = \sin x$. (рисунок 1.6)

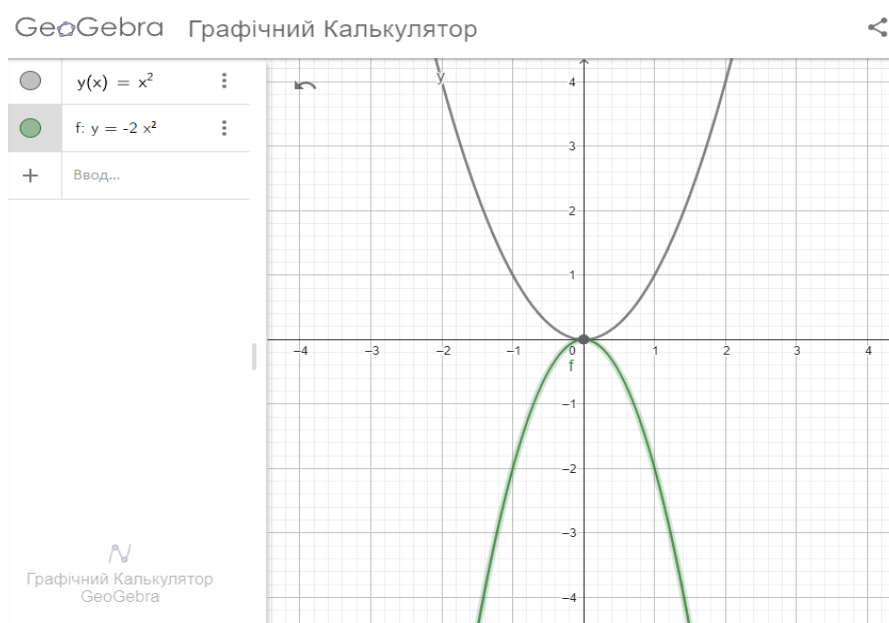


Рисунок 1.5



Рисунок 1.6

Побудова графіка функції $y=f(kx)$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Розглянемо три випадки. 1) $k = -1$. Графік функції $y=f(-x)$ можна дістати за допомогою симетричного відображення графіка функції $y=f(x)$ відносно осі ординат. 2) $k > 0$. Графік функції $y=f(kx)$, можна дістати з графіка функції $y=f(x)$ за допомогою стиснення останнього в k раз до осі ординат, якщо $k > 1$, і за допомогою розтягу графіка $y=f(x)$, в раз від осі ординат, якщо $0 < k < 1$. 3) $k < 0$. В цьому випадку, крім стиснення або розтягу графіка функції $y=f(x)$, треба симетрично відобразити його відносно осі ординат. *Приклад.* Побудуємо графіки функцій $y = \cos 2x^2$ та $y = \sin \frac{1}{3}x$. Побудова першого графіка здійснюється з графіка $y = \cos x$ (рисунок 1.7)

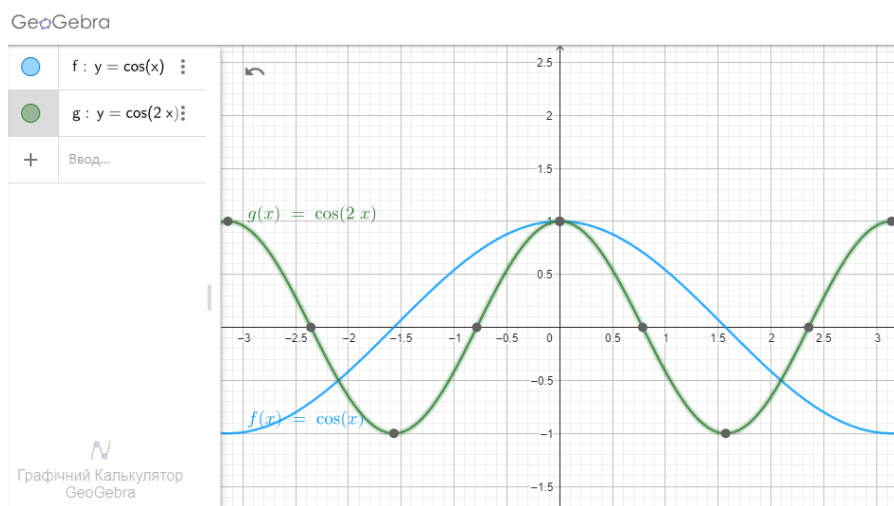


Рисунок 1.7

А в другому випадку - з графіка функції $y = \sin x$ (рисунок 1.8)

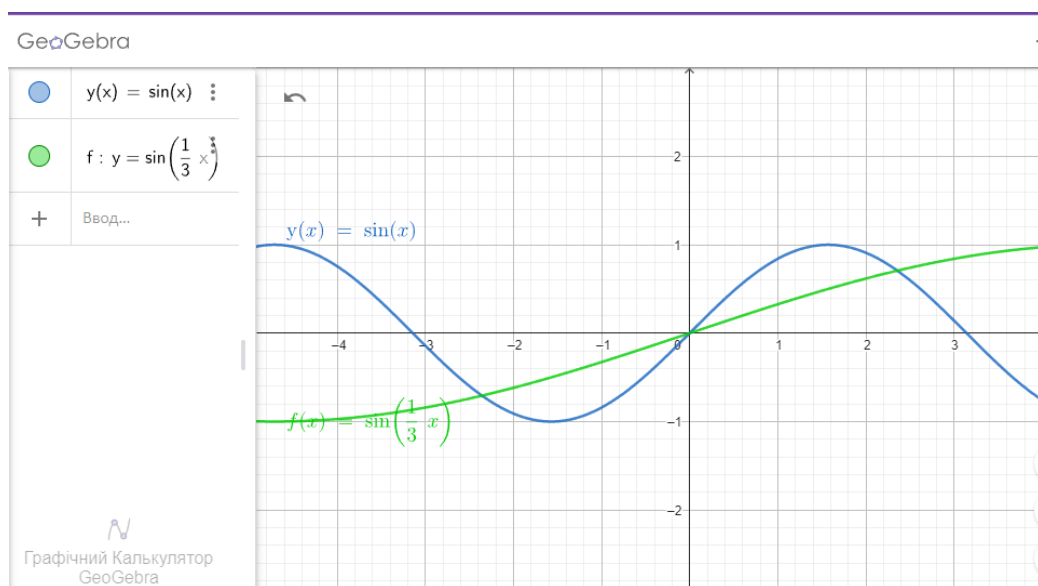


Рисунок 1.8

Побудова графіка функції $y = cf(kx+a)+b$, якщо відомий графік функції $y=f(x)$.

Графік функції $y=cf(kx+a)+b$ будується послідовним застосуванням чотирьох перетворень, розглянутих у попередніх пунктах $f(x) \rightarrow f(kx) \rightarrow f(kx+a) \rightarrow cf(kx+a) \rightarrow cf(kx+a)+b$.

Якщо треба побудувати графік деякої функції $y = g(x)$ то доцільно починати з перевірки можливості переходу за вже відомими геометричними перетвореннями до графіка функції $y = f(x)$. Якщо така можливість з'являється, то треба побудувати графік функції $y = f(x)$ і за допомогою послідовних геометричних перетворень перейти до шуканого графіка.

Побудови графіків функцій, що містять модуль

Якщо задано функцію $y = f(x)$, то знак модуля дає нам ще такі варіанти функцій:

$$y = f(|x|), y = |f(x)|, y = |f(|x|)|.$$

Згідно з означенням модуля маємо:

$$|f(x)| = f(x), \text{ якщо } x \geq 0$$

$$|f(x)| = -f(x), \text{ якщо } x < 0$$

Отже, щоб побудувати графік функції $y = f(|x|)$, треба побудувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ відповідно на проміжках $[0; \infty]$, $[-\infty; 0]$. Але графік цієї функції можна дістати з графіка функції якщо врахувати, що функція $y = f(|x|)$ - парна, тобто $f(|-x|) = f(|x|)$. Тому досить побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x > 0$, симетрично відобразити його відносно осі ординат. При $x \geq 0$ графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = f(x)$ збігаються.

Відповідно, що область визначення функції $y = |f(x)|$ збігається з областю визначення функції $y = f(x)$. Ця функція може набувати лише невід'ємних значень, тому в нижній півплощині графіка не буде. Тобто графік будується дзеркальним відображенням усіх точок нижньої півплощини графіка $y = f(x)$ на верхню півплощину відносно ОХ.

Приклад. Побудувати графік функції $y = |x^2 - 6|$.

Спочатку побудуємо графік функції $y = x^2 - 6$ (будуємо графік функції $y = x^2$ і перенесемо графік вниз на 6 одиниць вздовж осі ординат). Тепер відображаємо симетрично відносно осі абсцис ту частину графіка, яка міститься під віссю, й одержуємо графік функції $y = |x^2 - 6|$ (Рисунок 1.9).

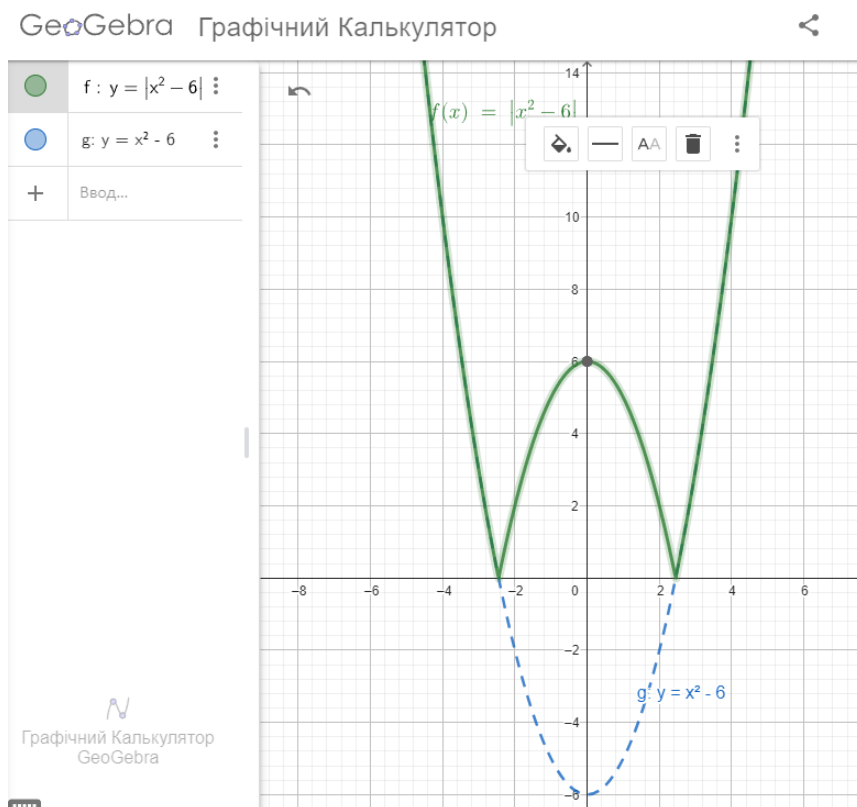


Рисунок 1.9

Розглянемо функцію $y = f(|x|)$

Приклад. Побудувати графік функції $y = (|x| - 1)^2$. Щоб побудувати графік, будуємо графік функції $y = (x - 1)^2$ і паралельно переносимо графік вправо на одиницю вздовж осі абсцис. Тепер відображаємо симетрично відносно осі ординат ту частину графіка, яка міститься справа, й одержуємо графік функції $y = (|x| - 1)^2$ (Рисунок 1.10).

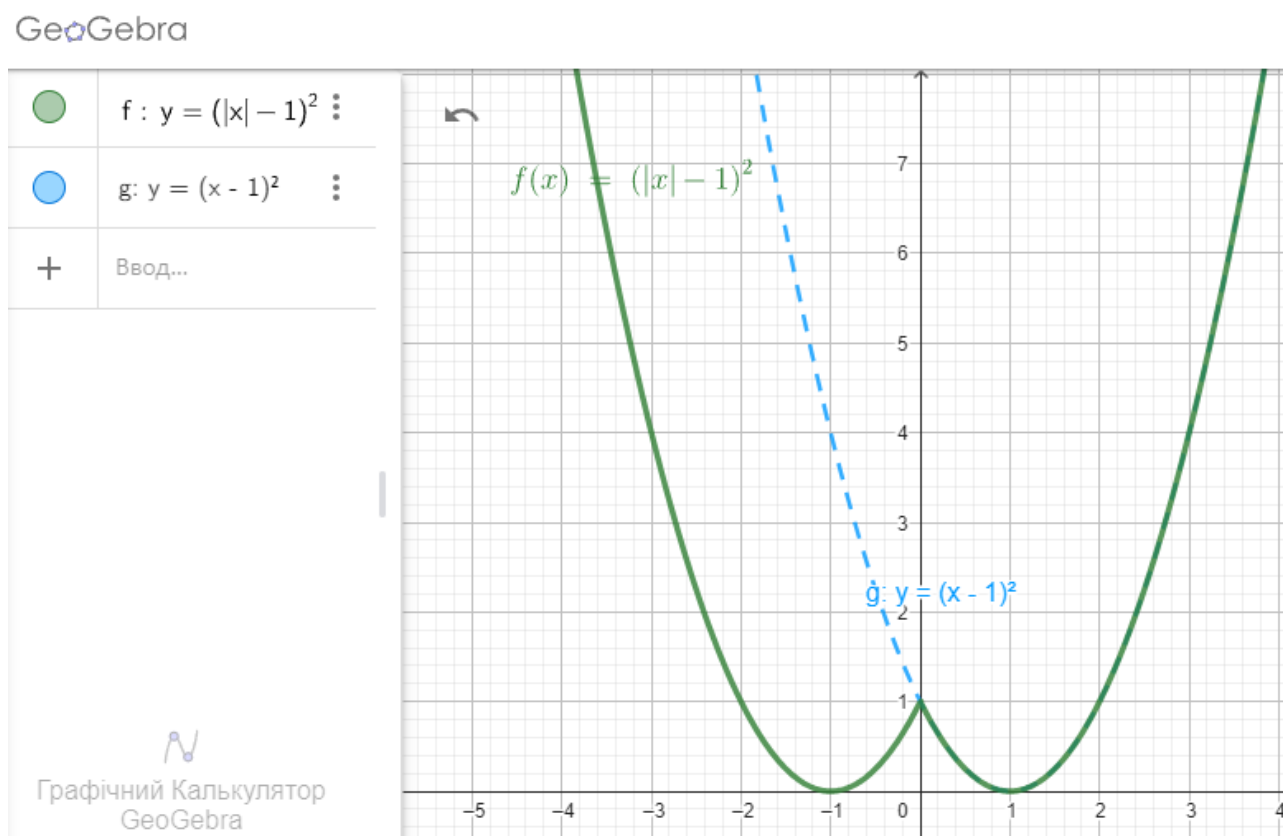


Рисунок 1.10

Отже, можна підсумувати, що при побудові графіків функції досить активно використовуються різні методи геометричних перетворень:

1.2. Побудова графіків складних функцій та їх властивості.

Щоб побудувати графік складеної функції $y = f(\varphi(x))$, треба знати її властивості й встановити контрольні точки, через які проходить шуканий графік.

Властивості складеної функції можна з'ясувати за відомою схемою дослідження функції, а контрольні точки графіка – обчисленням певних значень функції для відповідних значень аргументу.

Зауваження. Під час побудови складних функцій основні перетворення можна виконувати в довільній послідовності. та все-таки паралельні перенесення варто робити останніми, оскільки стиснення і розтягування побудованих графіків зручніше виконувати від початку координат.

1.2.1. Побудови графіків функцій, що містять модуль

Розглядаючи графіки функцій, що містять модулі, необхідно пам'ятати загальні властивості модуля та правила відображення на координатній прямій. Складними є випадки побудови графіків функцій, що містять кілька модулів. Наприклад такого виду $y = |f(|x|)|$.

Для побудови графіка такої функції можна користуватись двома способами:	
1) Побудувати графік функції $y = f(x)$ і ту частину графіка, яка міститься в нижній півплощині, симетрично відобразити відносно осі ОХ	2) побудувати графік функції $y = f(x) $ у правій півплощині і симетрично відобразити його відносно осі ОУ, в результаті чого дістанемо графік і в лівій площині. Сукупність графіків і дасть графік функції $y = f(x) $.

$$f(x) \rightarrow f(|x|) \rightarrow |f(|x|)|$$

або

$$f(x) \rightarrow |f(x)| \rightarrow |f(|x|)|$$

Приклад. 1) Побудуємо графік функції $y = x^2 - 4|x| + 3$.

2) Побудуємо графік функції $y = |x^3| - 3$ та $y = |\log_2(-x - 1)|$

Рис.1.11, 1.12 та 1.13 відповідно.

Оскільки функція парна, то побудуємо спочатку її графік для $x \geq 0$, тобто $y = x^2 - 4x + 3$, оскільки для $x \geq 0$ $x^2 - 4|x| + 3 = x^2 - 4x + 3$, а потім симетрично відобразимо його відносно осі ординат. (рисунок 1.11)

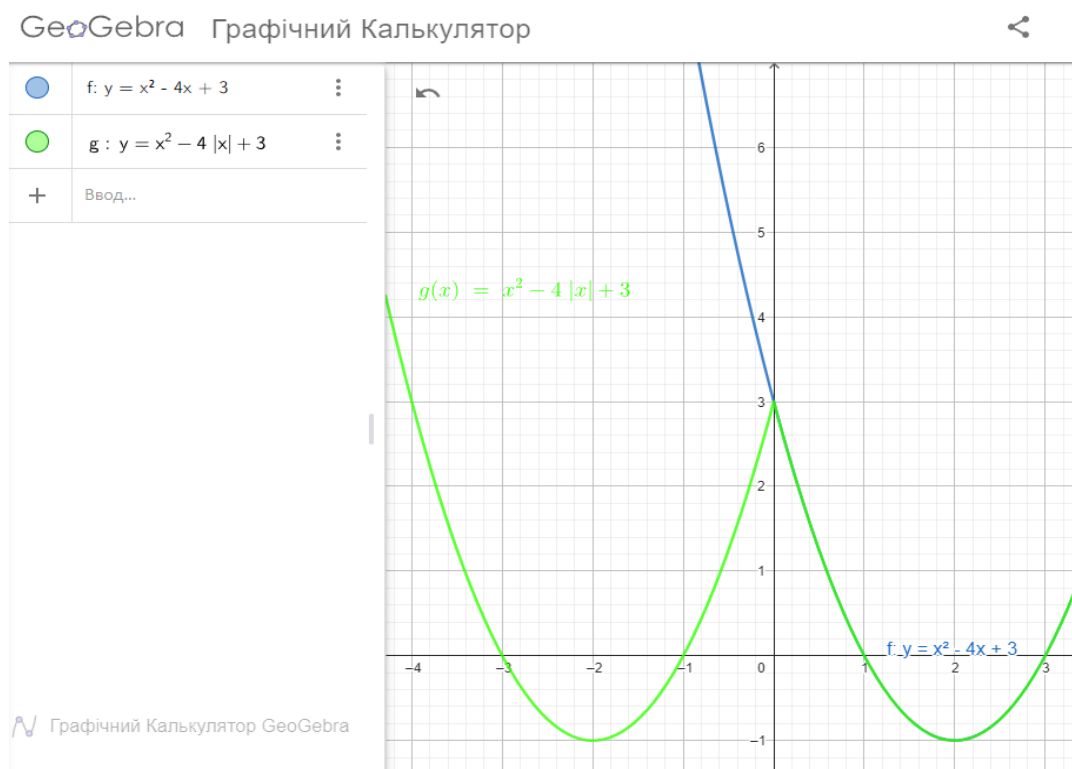


Рисунок 1.11

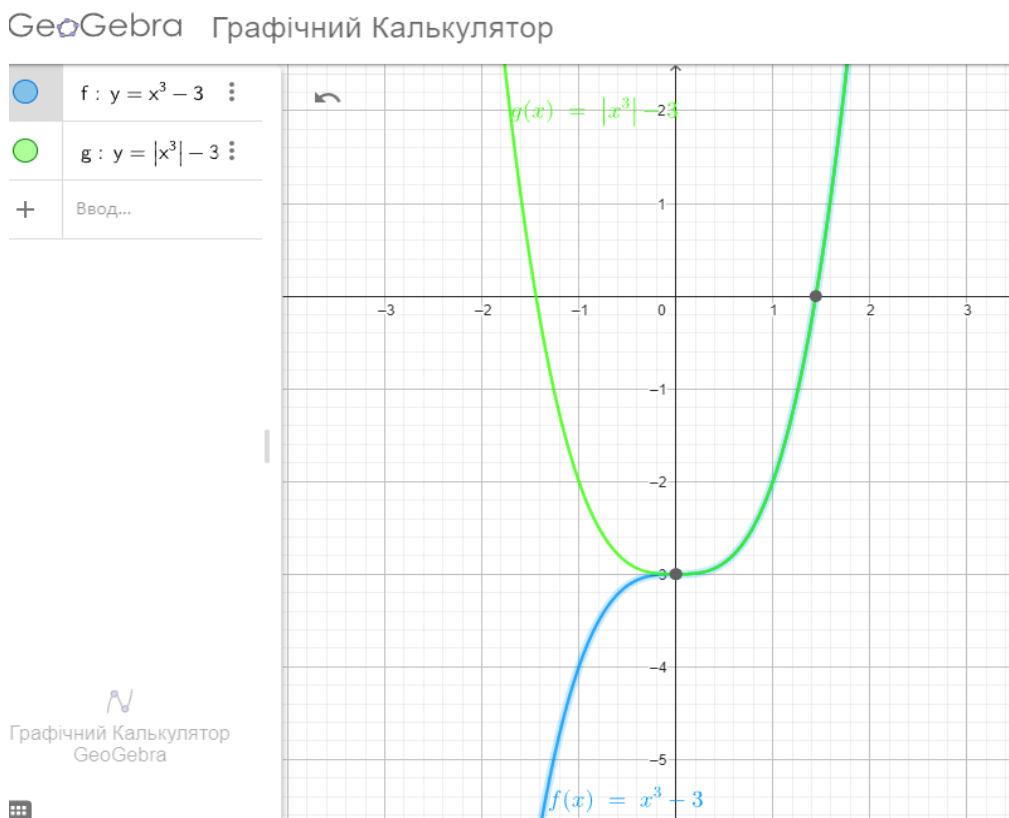


Рисунок 1.12

Аналогічним чином будемо графік функції $y=|x^3| - 3$, рис.1.12 та графік функції $y = | \log_2 (-x - 1) |$, рисунок 1.13.

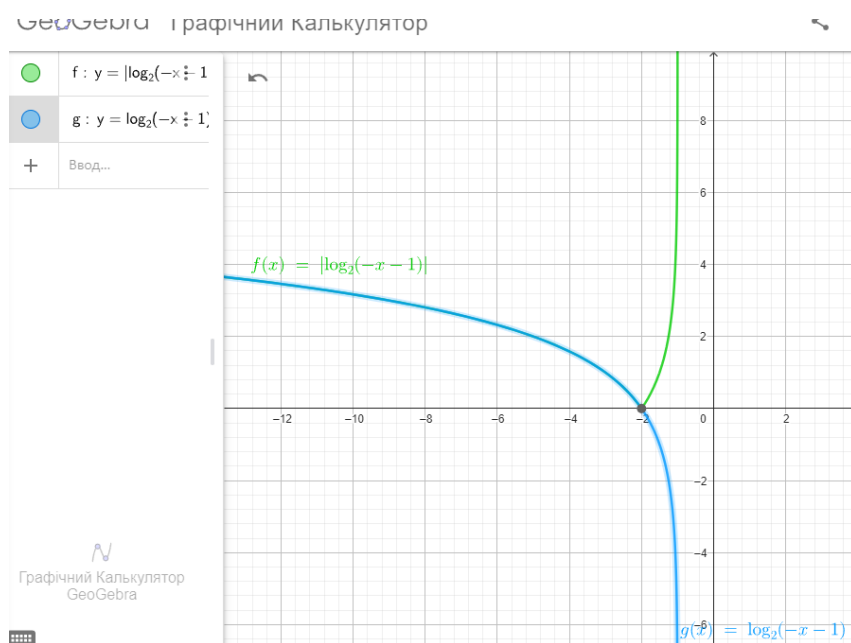


Рисунок 1.13

Приклад. 1) Побудуємо графік функції $y =$ План побудови: а) побудувати графік функції $y_1 =$ на проміжку $[0; \infty]$;

б) побудувати графік функції $y_2 = \left| \frac{x+2}{x-1} \right|$ на тому ж самому проміжку;

в) графік функції y_2 симетрично відобразити відносно осі ОУ. Дістанемо графік і для проміжку $[-\infty; 0]$. Сукупність графіків, побудованих на проміжках $[-\infty; 0]$, $[0; \infty]$ і буде шуканим графіком (рисунок 1.14)

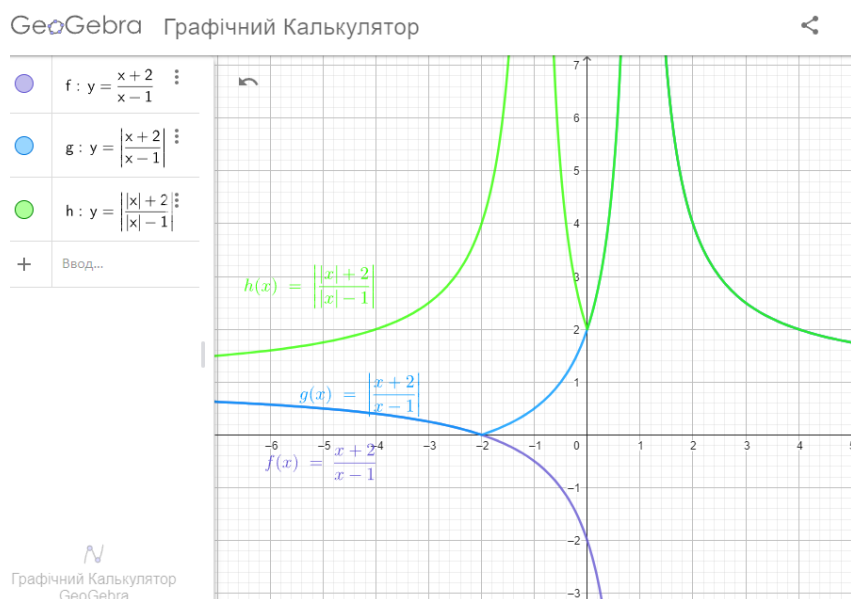


Рисунок 1.14

Приклад 2) $y=|4\sin(2|x|)+1|$. Алгоритм побудови:

- 1) будуємо графік $y=\sin(x)$;
- 2) стискаємо його в 2 рази по осі абсцис, період даної функції π , і розтягуємо в 4 рази по осі ординат. Ми отримали графік $y = 4\sin(2x)$;
- 3) переносимо отриманий графік по осі ординат на 1 вверх - $y=4\sin(2x)+1$;
- 4) відображаємо отриманий графік відносно осі ординат з правої півплощини на ліву ($y=4\sin(2|x|)+1$), та відносно осі абсцис з нижньої півплощини - на верхню ($y=|4\sin(2|x|)+1|$). Отриманий графік і буде шуканим (рис .1.15)

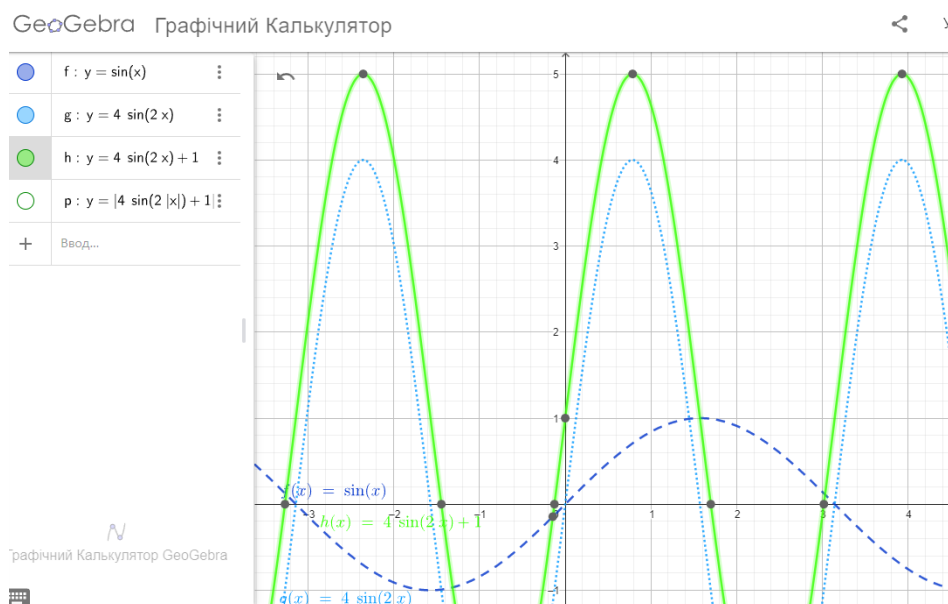


Рисунок 1.15

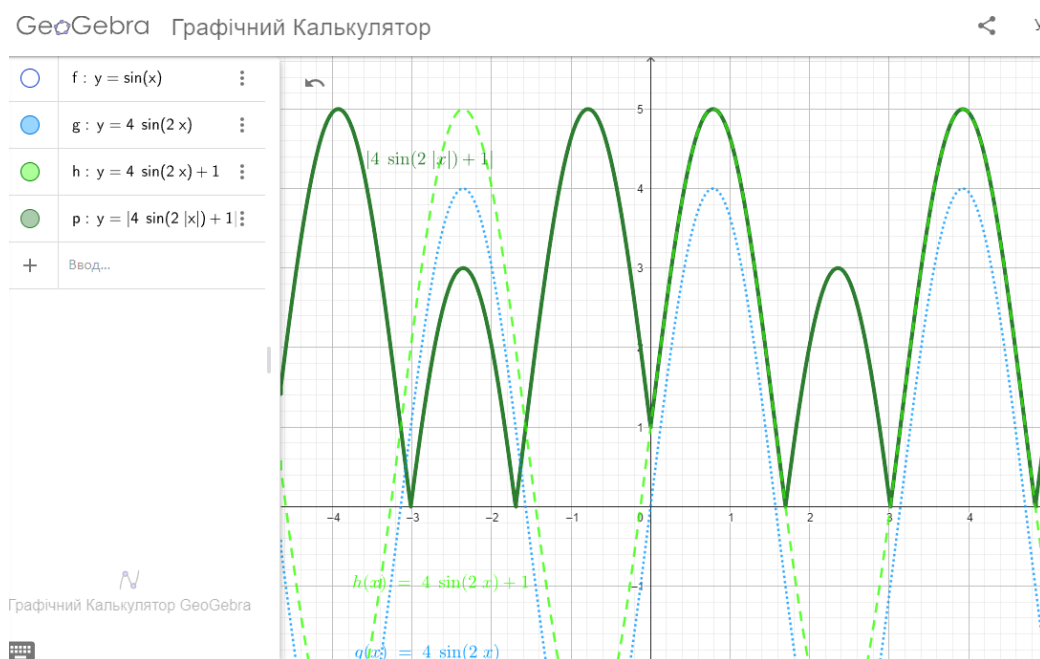


Рисунок 1.16

Розглянемо також побудову графіків функцій, які є сумою, добутком, часткою функцій або складеною функцією, з яких одна або кілька містять знак модуля. Для таких побудов спочатку знаходимо область визначення функції і розкриваємо знак модуля на тих проміжках, на яких під модульні вирази не змінюють знака. В результаті функція може бути задана на різних проміжках різними формулами.

Наприклад, будуючи графіки функцій виду $y = |(x)| \pm |(x)| \pm \dots \pm |(x)| \pm \delta(x)$, доцільно спочатку знайти ті значення x , для яких принаймні одна з функцій $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ перетворюється на нуль. Для цього треба

$$\text{розв'язати сукупність рівнянь} \quad \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Корені, які ми дістали, розібють область визначення цієї функції на проміжки, на кожному з яких функції $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$ зберігають постійний знак, і тому на таких проміжках можна звільнитися від знака модуля. Після цього будується графік саме на тому проміжку, на якому розкривали знак модуля.

Приклад. Побудувати графік функції $y = |x+3| + |2x+1| + |x-1| - 2x+1$.

$$\text{Розв'яжемо сукупність рівнянь} \quad \begin{cases} x+3=0 \\ 2x+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ x=-0.5 \\ x=1 \end{cases}$$

Ми отримали проміжки $[-\infty; -3]$, $[-3; -0.5]$, $[-0.5; 1]$, на кожному з яких функції $y_1 = x+3$, $y_2 = 2x+1$, $y_3 = x-1$ не змінюють знака.

а) на проміжку $[-\infty; -3]$ $y = -x-3-2x-1-x+1-2x+1 = -6x-2$;
аналогічно знаходимо б) для проміжку $[-3; -0.5]$ $y = -4x+4$; в) $[-0.5; 1]$ $y = 6$ та
г) $[1; \infty]$ $y = 2x+4$. Побудови виконані на рисунку 1.17

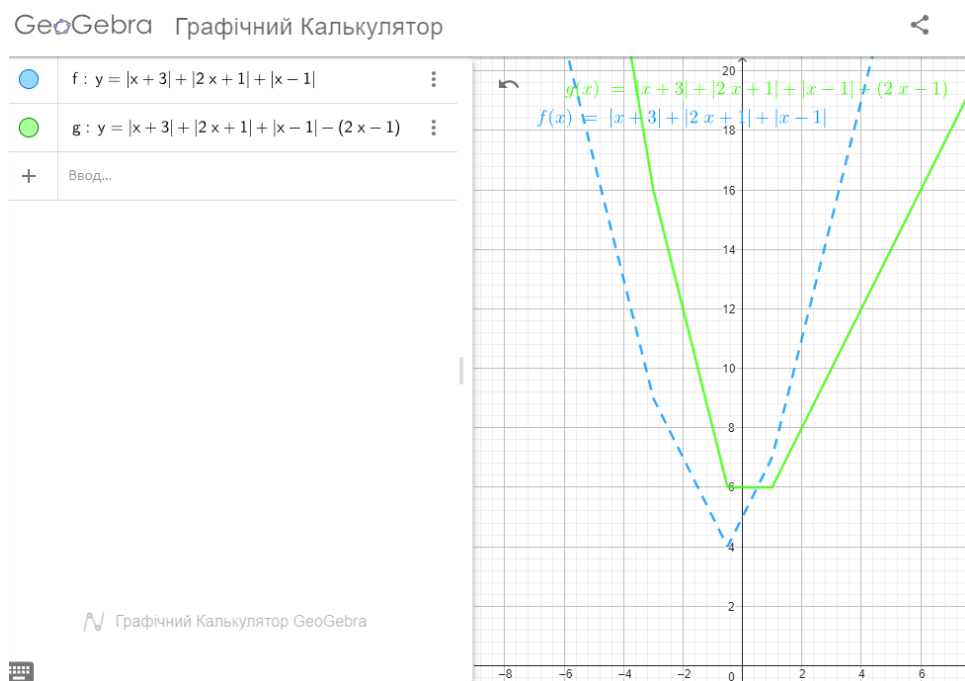


Рисунок 1.17

1.2.2. Побудова графіків функцій, аналітичні вирази, які доцільно попередньо спростити.

Функцію задано формулою $y = f(x)$, і над виразом $f(x)$ можна виконати певні перетворення, що приведуть до виразу $y = f_1(x)$, який будемо досліджувати. Виконуючи перетворення, треба пам'ятати, що дослідження функції $y = f_1(x)$ і побудову графіка необхідно виконувати для тих значень x , які належать області визначення функції $y = f(x)$.

Розглянемо приклад: $y = \dots$

Область визначення даної функції – $[1; \infty]$. Для цих значень x даний вираз можна замінити виразом $y = x^2 - 1$. Тому графік функції $y = x^2 - 1$ на інтервалі $[1; \infty]$ і буде графіком даної функції (рисунок 1.18). графік будемо з графіка функції $y = x^2$ шляхом перенесення вітки параболи на 1 вниз вздовж осі ОУ.

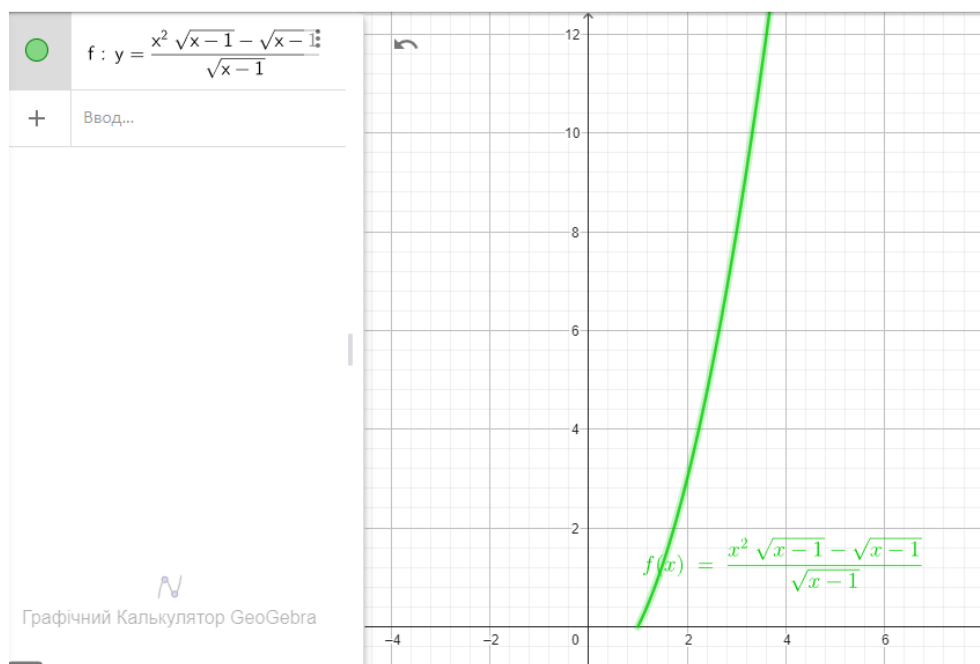


Рисунок 1.18

Розглянемо приклад: $y = \frac{1}{2} \log_2 \sin^2 x$ Область визначення функції $[2k\pi; \pi+2k\pi]$.
 Для цих значень x дістанемо: $y = \sin x$ отже, щоб дістати графік заданої функції, достатньо побудувати графік функції $y = \sin(x)$ на інтервалах $[2k\pi; \pi+2k\pi]$, де $k \in \mathbb{Z}$. Графік представлено на рис.1.19

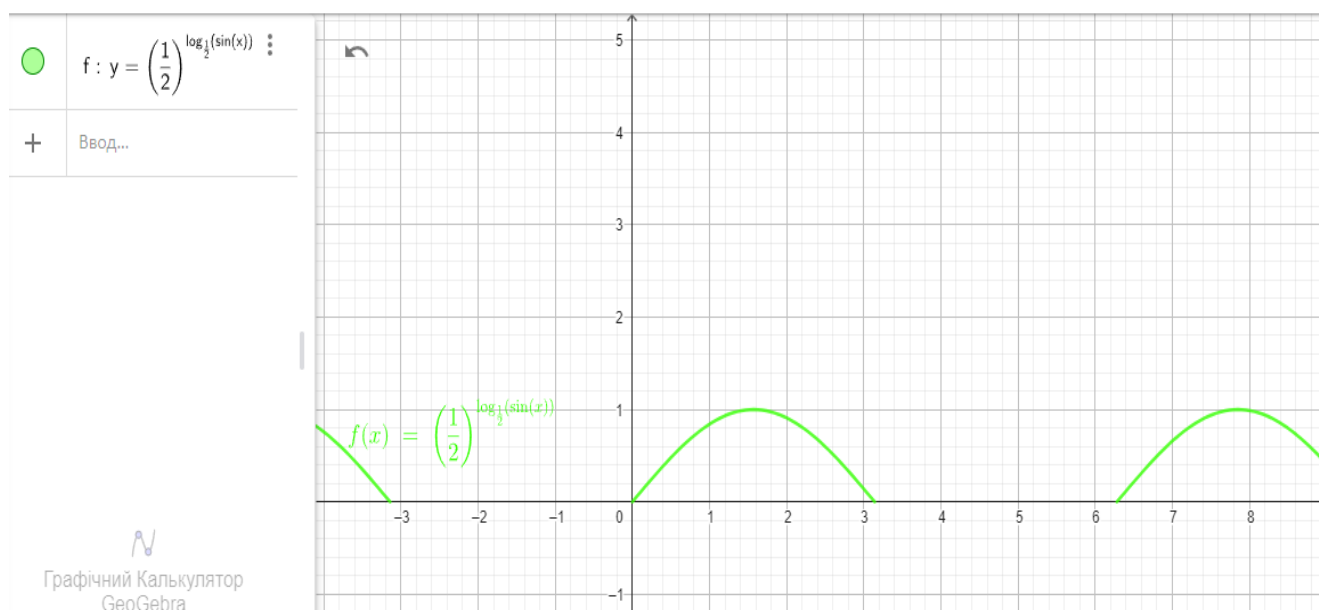


Рисунок 1.19

1.3. Аналіз програми з математики на рівні стандартному і профільному

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів <i>Рівень стандарту</i>	НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА З МАТЕМАТИКИ (АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів <i>Профільний рівень</i>
Мета базової загальної середньої освіти: розвиток особистості, яка поєднує в собі творчий потенціал до навчання, ініціативність до саморозвитку та самонавчання в сучасних умовах, здатності ідентифікувати себе як важливу і відповідальну складову українського суспільства, яка готова змінювати і відстоювати національні цінності українського народу. Важливим чинником розвитку такої особистості є формування в учнів умінь застосовувати набуті знання у реальних життєвих ситуаціях, під час розв'язання практичних завдань та здатності визначати і обґрунтовувати власну життєву позицію.	Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.
Провідним засобом реалізації є запровадження компетентнісного підходу у навчально-виховний процес загальноосвітньої школи шляхом формування предметних і ключових компетентностей.	

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики покладено компетентнісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності, які сприятимуть здатності учня застосовувати свої знання в реальних життєвих ситуаціях, нести відповідальність за свої дії, брати повноцінну участь в житті суспільства.

Програма передбачає насамперед оволодіння загальною математичною культурою, вироблення математичного стилю мислення, тобто вміння класифікувати об'єкти, встановлювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами, приймати рішення тощо

Одним з ефективних засобів удосконалення навчання є модульне проектування навчального процесу.

Реалізація рівневої диференціації на практичних заняттях є однією з головних умов ефективності навчання. Особливістю практичних занять має бути постійне залучення учнів до самостійної роботи. Доцільно спільно обговорити ідею та алгоритм розв'язування певного класу задач. Після цього кожний учень може виконувати запропоновану систему вправ, спілкуючись із вчителем.

Вибір вивчення математики на профільному рівні передбачає наявність стійкого усвідомленого інтересу кожного учня до математики, схильності до вибору в майбутньому професії, пов'язаної з нею. Незважаючи на це, мотиваційний етап навчального процесу в таких класах не можна ігнорувати.

Одним зі способів мотивації є створення проблемної ситуації. Така ситуація може бути досить складною, вимагати серйозних математичних знань та значних зусиль для її розв'язування.

Підвищенню ефективності уроків математики в старших класах сприяє використання програмних засобів навчального призначення GRAN, DG, AGrapher, GeoGebra. За їх допомогою доступнішим стає

	вивчення низки тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії: побудова графіків функцій, знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій
Крім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей. Вони однаковими є для обох рівнів. А саме: 1. Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами 2. Спілкування іноземними мовами. 3. Математична компетентність. 4. Основні компетентності у природничих науках і технологіях. 5. Інформаційно-цифрова компетентність 6. Уміння вчитися впродовж життя 7. Ініціативність і підприємливість 8. Соціальна та громадянська компетентності 9. Обізнаність та самовираження у сфері культури 10. Екологічна грамотність і здорове життя.	
Наскрізнi лінії та їх реалізація. У навчальній програмі виокремлюються такі наскрізні чотири лінії ключових компетентностей: "Екологічна безпека та сталий розвиток", "Громадянська відповідальність", "Здоров'я і безпека", "Підприємливість та фінансова грамотність", які спрямовані на формування в учнів здатності застосовувати знання й вміння у реальних життєвих ситуаціях.	
З метою підвищення ефективності навчання, необхідною умовою є залучення до навчально-виховного процесу компетентнісного, діяльнісного та особистісно-орієнтованого підходів, які передбачають систематичне включення учнів до різних видів активної навчально-пізнавальної діяльності та формування умінь корисних у реальних життєвих ситуаціях. Формуванню математичної та ключових компетентностей сприяє встановлення та	

реалізація у навчанні математики міжпредметних і внутрішньопредметних зв'язків.. Їх використання посилює пізнавальний інтерес учнів до навчання створює умови для систематизації навчального матеріалу і формування наукового світогляду. Учні набувають досвіду застосування знань на практиці.	
Програма надає вчителю широкі можливості для використання різних засобів, форм, методів навчання, вибору методичних шляхів і прийомів викладання конкретного матеріалу. Навчальні теми, визначені програмою, можуть вивчатися учнями на різних рівнях засвоєння теоретичного матеріалу і формування вмінь, деякі теми на уроках можуть розглядатися без доведень, на простих і доступних прикладах і не виноситися у повному обсязі для тематичного контролю.	3 Вивчаючи математику на профільному рівні, старшокласники мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких прикладних задач розподіляється на три етапи: 1) формалізація (перехід від ситуації, описаної у задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, та до чітко сформульованої математичної задачі); 2) розв'язування задачі у межах побудованої моделі; 3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі та його застосування до вихідної ситуації
Передбачається, що випускник загальноосвітнього навчального закладу (тема „Графіки функцій»):	
вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості.	- вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості; - аналізує графіки функціональних залежностей;

	використовує властивості елементарних функцій для аналізу та опису реальних явищ, фізичних процесів, залежностей;
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС	АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ 10 КЛАС
Програма розрахована на 54 год. <i>I семестр — 16 год, 1 год на тиждень,</i> <i>II семестр — 38 год, 2 год на тиждень,</i> <i>Резерв – 7 годин)</i>	Програма розрахована на 210 год, <i>I семестр -96год, 6 год на тиждень,</i> <i>II семестр- 114 год, 6 год на тиждень</i> <i>Резерв – 24 години</i>
ГЕОМЕТРІЯ 10 КЛАС	ГЕОМЕТРІЯ 10 КЛАС
Програма розрахована на 51 год. <i>I семестр — 32 год, 2 год на тиждень,</i> <i>II семестр — 19 год, 1 год на тиждень,</i>	Програма розрахована на 210 год, <i>I семестр -96год, 6 год на тиждень,</i> <i>II семестр- 114 год, 6 год на тиждень</i> <i>Резерв – 24 години</i>
ГЕОМЕТРІЯ 11 КЛАС	ГЕОМЕТРІЯ 11 КЛАС
Програма розрахована на 51 год. <i>I семестр — 32 год, 2 год на тиждень,</i> <i>II семестр — 19 год, 1 год на тиждень</i>	Програма розрахована на 105 год. <i>I семестр — 48 год, 3 год на тиждень,</i> <i>II семестр — 57 год, 3 год на тиждень</i>

Розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на вивчення тем залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій. Програмою передбачено резерв навчального часу. Спосіб використання резервного часу вчитель може обрати самостійно	
Програму подано у формі таблиці, що містить дві колонки: очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів та зміст Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на їх вивчення залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій. Програма надає вчителю можливості для використання різних засобів, методів навчання, вибору методичних шляхів і прийомів викладення матеріалу.	
Навчальні теми, можуть вивчатися учнями на різних рівнях засвоєння теоретичного матеріалу і формування вмінь. За умови недостатньої математичної підготовки учнів ,деякі теми можуть розглядатися без доведень, на простих прикладах і не виноситися у повному обсязі для тематичного контролю	Зацікавлені учні можуть детальніше опановувати такі теми самостійно за підручником, на курсах за вибором чи під час індивідуального навчання в позаурочний час.

ВИСНОВКИ

В першому розділі розглянуто теоретичні та практичні аспекти методики навчання учнів дослідження функцій, побудови графіків функцій, зокрема методами геометричних перетворень.. Його розбито на три основні підпункти:

1.1 Графіки функцій, загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

1.2. Побудова графіків складних функцій та їх властивості.

1.3 Аналіз програми з математики на рівні стандартному і профільному

Тобто аналіз проведено шляхом покрокового вивчення теми : загальна методична схема, елементарні перетворення графіків функцій, побудови більш складних графіків функцій від простого до складного (а саме: вирази, які потрібно попередньо спростити та графіки функцій, які містять модуль, їх суму).

Завжди, коли потрібно прослідкувати орієнтовно поведінку функції, визначити її особливості, саме графік є незамінним. Тому маючи функцію, доцільно побудувати графік цієї залежності, і тоді вже легко детально її проаналізувати.

Загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень. , Тобто, як від заданого графіка $y = f(x)$ перейти до графіка іншої функції, виконавши певне геометричне перетворення. Виявляється, що за їх допомогою можна перейти) до графіка функції виду:

$y = f(x) + b$, $y = f(x+a)$, $y = f(x + a) - b$, $y = cf(x)$, $y = f(kx)$, $y = cf(kx + a) + b$,
де a, b, c, k — дійсні числа, що не дорівнюють нулю.

Кожен етап супроводжується наглядними прикладами з теми. Що допомагає структурувати та систематизувати знання учнів, досягнути якісного засвоєння та глибокого розуміння учнями матеріалу функціональної лінії в процесі навчання.

Також проведено аналіз програми з математики на рівні стандартному і профільному, а саме : спільне в них (формування ключових компетентностей з метою підвищення ефективності навчання; залучення до навчально-виховного процесу компетентнісного, діяльнісного та особистісно-орієнтованого підходів) та відмінності (у поставленій меті, методах її реалізації, очікуваних результатах навчально-пізнавальної діяльності учнів та змісті навчального матеріалу) для реалізації досягнення поставленої мети.

Аналіз представлено у вигляді порівняльної таблиці.

Учителям і авторам підручників надається право коригувати послідовність вивчення тем та змінювати розподіл годин на їх вивчення залежно від прийнятої методичної концепції та конкретних навчальних ситуацій.

Програми надають вчителю широкі можливості для використання різних засобів, форм, методів навчання, вибору методичних шляхів і прийомів викладання конкретного матеріалу.

РОЗДІЛ II

ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ДОДАТКІВ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕМИ «ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ»

Сьогодні значна увага приділяється використанню комп'ютерів та інформаційних технологій для посилення візуальної та експериментальної складової навчання математики, реалізації практичної спрямованості у навчанні математики на основі таких дидактичних можливостей сучасних засобів інформаційних та комунікаційних технологій, як комп'ютерна візуалізація навчальної інформації та комп'ютерне моделювання досліджуваних об'єктів, можливість «математичного експерименту» для дослідження тих чи інших математичних закономірностей чи властивостей геометричних фігур.

Як зауважує Жалдак М.І "Використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій дає можливість значно підвищити ефективність осмислення і засвоєння повідомлень і даних, що циркулюють в навчально-виховному процесі, за рахунок їх своєчасності, корисності, доцільного дозування, доступності (зрозумілості), педагогічно доцільної надлишковості, оперативного використання джерел навчального матеріалу, адаптації темпу подання навчального матеріалу до швидкості його осмислення і засвоєння, врахування індивідуальних особливостей учнів, ефективного поєднання індивідуальної і колективної навчально-пізнавальної діяльності, методів і засобів навчання, організаційних форм навчального процесу, що значною мірою сприяє вирішенню проблем його гуманізації" [3].

Інформатизація вищої і середньої освіти є одним із визначальних факторів у процесі побудови інформаційного суспільства [8].

Повною мірою це стосується і такої навчальної дисципліни як математика. На нинішньому етапі розвитку освіти необхідною умовою подальшого підвищення її якості є запровадження в навчальний процес інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) і їх ефективне використання.

Один із перспективних напрямів інформатизації шкільної математичної освіти це – використання у навчальному процесі систем комп'ютерної математики (СКМ), зокрема, систем динамічної математики (СДМ) і програм для роботи з функціями та їх графіками [8].

У процесі пошуку нових форм та засобів викладання математики, зокрема планіметрії, може бути використано багато програмних засобів, серед яких відомі широкому загалу Desmos, GeoGebra Calculator, Gran, Advanced Grapher та і ін.

Мета роботи - висвітлити методику організації побудови графіків функцій методом перетворень у середовищі динамічної математики GeoGebra Calculator та Desmos.

Геометричні перетворення – дуже важливий розділ курсу геометрії. У геометрії Евкліда, яку ми вивчаємо в шкільному курсі математики, переважно досліджуються ті властивості геометричних фігур, що не змінюються при їх русі (образно кажучи, кожен геометричну фігуру можна розглядати як —тверду, наприклад, вирізану з картону), – симетрія та поворот, а також ті, де відбувається перетворення подібності – гомотетія.

Ще раз пригадаємо види перетворень, які застосовуються для побудови графіків функцій. Види геометричних перетворень:

- Центральна симетрія для побудови графіків таких функцій: $y = -f(x)$
- Осьова симетрія для побудови графіків таких функцій: $y = f(-x)$,
 $y = f(|x|)$ та функції $y = |f(x)|$;
- Паралельне перенесення для побудови графіків таких функцій:
 $y = f(x) \pm a$ та $y = f(x \pm a)$;
- Перетворення подібності (розтяг вздовж осей) для побудови графіків таких функцій: $y = a f(x)$ та $y = f(ax)$.

На даний час графічні калькулятори є досить поширеними та ефективними застосунками. Додатки такого типу - є інструментами, що дозволяють відобразити графіки функцій, здійснювати розрахунки та

виконувати інші математичні дії і ,одночас, візуалізувати отриману інформацію. Графічних калькуляторів зрозуміло, що є досить велике різноманіття. До найбільш популярних графічних калькуляторів належать GeoGebra Calculator Suite та Desmos. Вони є досить ефективними при вивченні тем по побудові і перетворенні графіків функцій.

2.1. Desmos Graphing Calculator

Розглянемо доцільність та ефективність застосування кожного із згаданих додатків під час вивчення даних тем у шкільному курсі математики.

Desmos - це онлайн графічний калькулятор. Він надає можливість із більшим розумінням (завдяки безперервному процесу візуалізації) розв'язувати різного типу завдання, зокрема, процес геометричних перетворень, які відбуваються при побудові заданих функцій.

Які ж плюси Desmos? Сюди можна записати такі можливості:

- безкоштовність;
- відображення графіків функцій (входять: складені, тригонометричні, логарифмічні та інші функції);
- можливість побудувати графіки рівнянь та нерівностей, а також досліджувати параметри функцій та створювати таблиці значень;
- також у даному калькуляторі є можливість створювати власні графіки, редагувати їх, міняти будь-які параметри і дані.

Ще досить приємним та корисним бонусом є те, що додаток «спілкується» з нами – у випадку некоректного вводу даних чи банальних помилок він нам підказує, що саме не так чи де помилка.

Ну звичайно досить суттєвим плюсом даного графічного калькулятора є те, що він має безкоштовну онлайн-версію, що дає перевагу використовувати його маючи доступ до Інтернету. Щоб зайти до даного графічного калькулятора необхідно зайти на сторінку <http://desmos.com/calculator>.

Розглянемо безпосередньо на прикладі процес побудови шуканого графіка функції і зміни, що в даному випадку відбуваються.

Приклад. Побудуємо графік функції $y = 2^{x^2-x-2}$

Складаємо алгоритм побудови графіка функції:

1. Область значень функції - вся множина, область визначень – додатна множина чисел;

2. спочатку будуємо графік функції $y = x^2 - x - 2$ (парабола, вітками вгору);

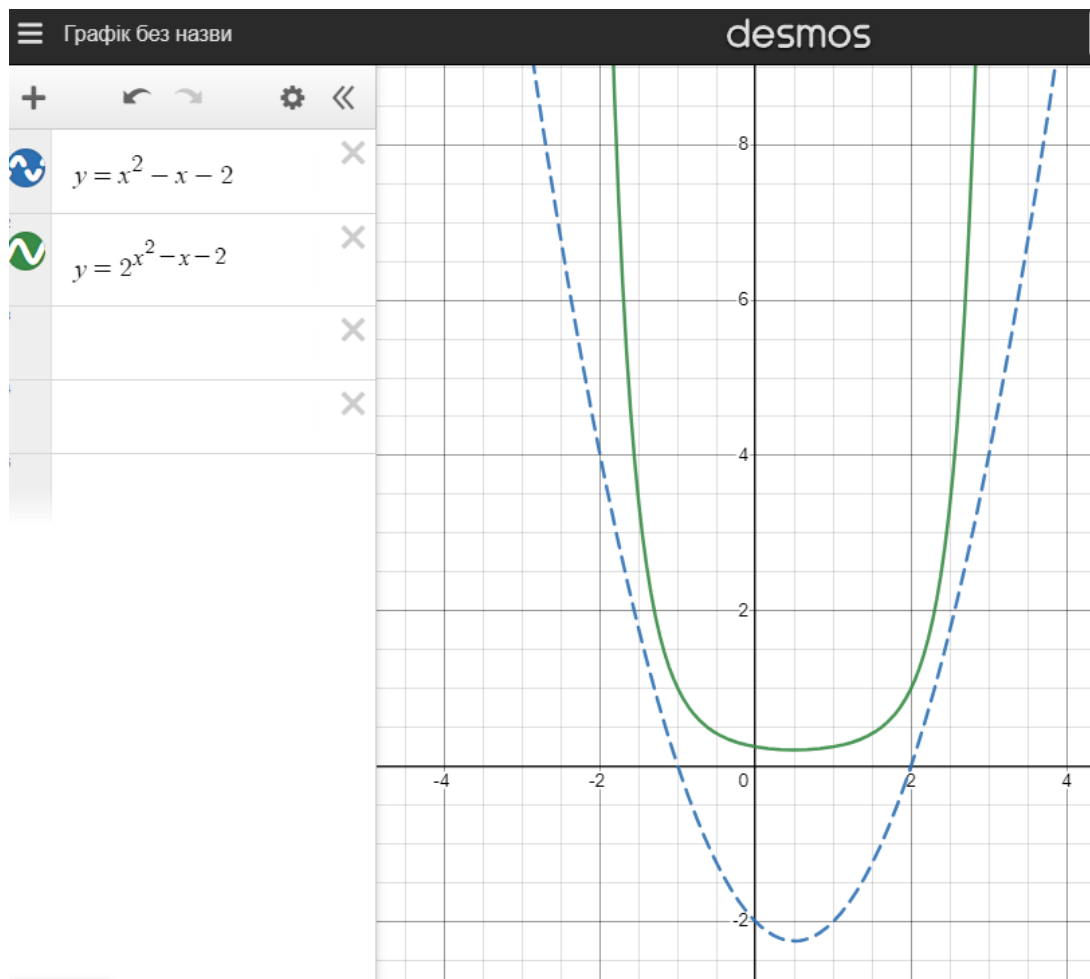


Рисунок 2.1.1

3. точки перетину параболи з ОХ піднімаються на 1 по осі ординат (=1).
Найменше значення побудованої функції у точці (0,5; -2,25), (це ми безпосередньо можемо визначити і за графіком), тому найменше нашої шуканої

функції буде у точці (0,5; Основа нашої показникової функції $a > 1$, тому поведінка і відповідні властивості функцій схожі між собою;

4 будуємо безпосередньо графік функції $y = 2^{x^2-x-2}$ (вершина параболи переміщується вгору по осі ординат, змінюються і вітки параболи).

(Рисунок 2.1.1)

Зручним в даному графічному калькуляторі є те, що навівши курсор миші на будь-який із графіків, ми зразу бачимо значення вибраної точки. Так, за допомогою графіка, ми встановили в п.3 алгоритму побудови графіка мінімальне значення функції. (Рисунок 2.1.2)

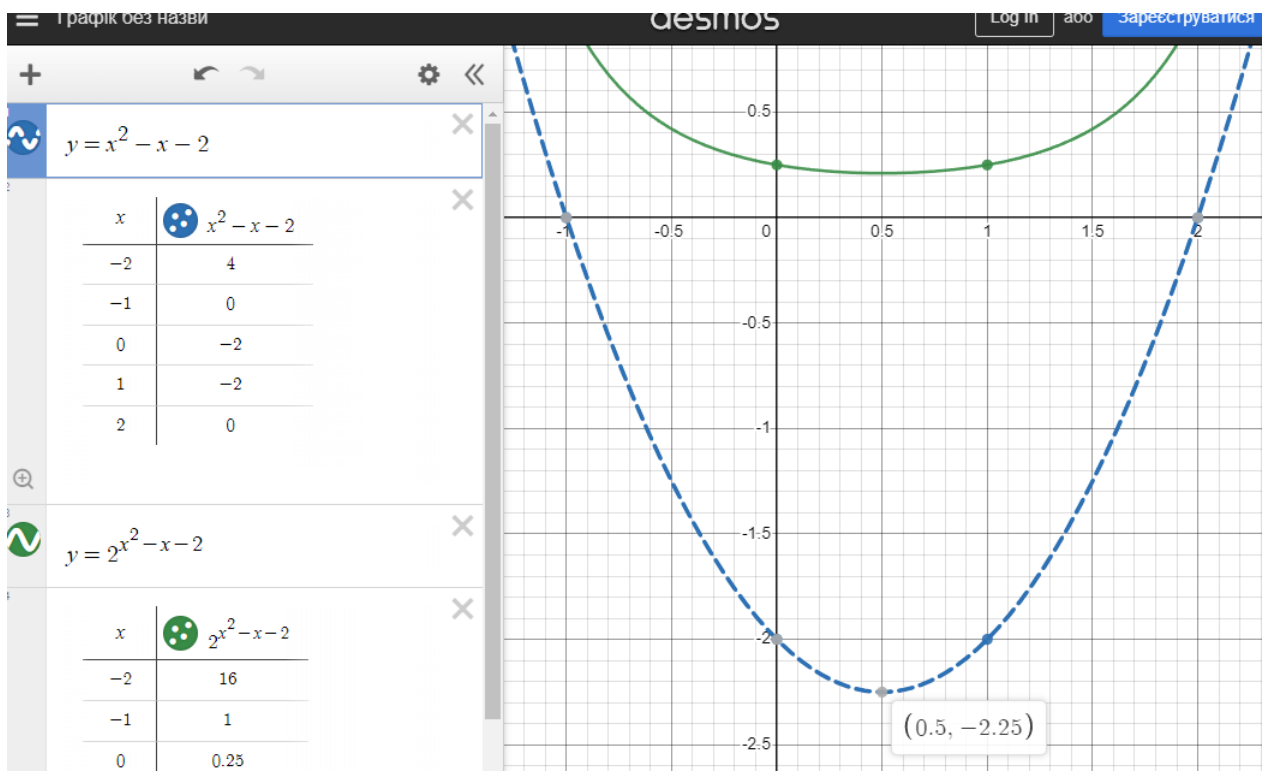
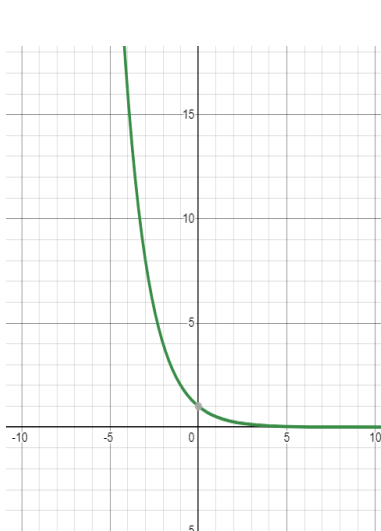
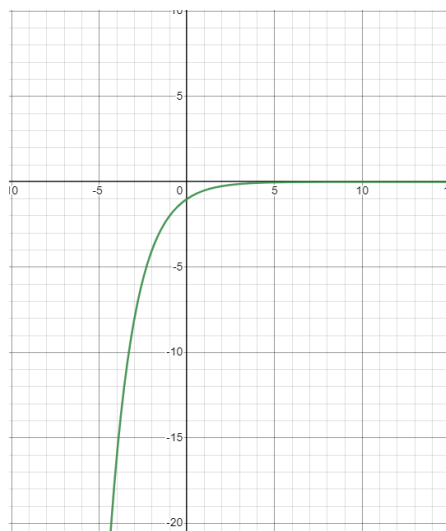


Рисунок 2.1.2

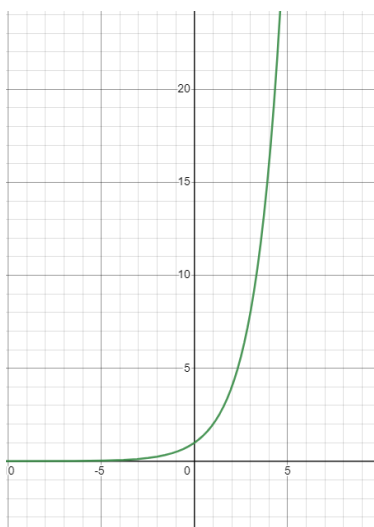
Приклад 2. Використовуючи графічний додаток Desmos, визначити на якому з рисунків зображено графік функції $y = -2^x$?



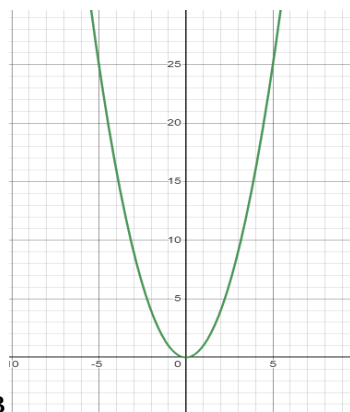
а



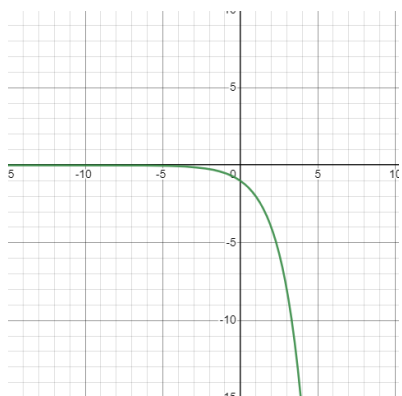
б



в



г



д

Дане завдання можна дослідити безпосередньо у графічному додатку, побудувавши графік функції $y = 2^x$ та виконувати з ним відповідне перетворення.

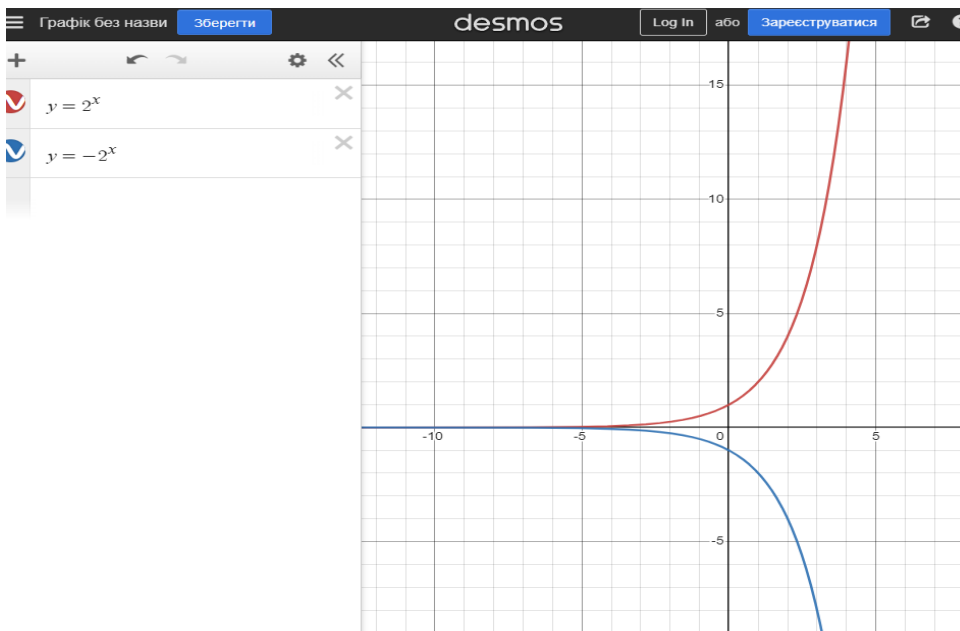


Рисунок 2.1.3

Приклад 3. Областю визначення функції $y=x^2$ є проміжок $[-4;2]$. Знайти область визначення функції $y= (2x)^2$

Оскільки функцію $y= (2x)^2$ отримують з функції $y=x^2$ стисненням удвічі до осі Oy , то $D(y)=[-2;1]$ - область визначення функції $y= (2x)^2$ (область визначення звузили у 2 рази). В чому можна переконатись вносячи зміни безпосередньо у додатку при побудові графіку $y= (2x)^2$. Рисунок 2.1.4

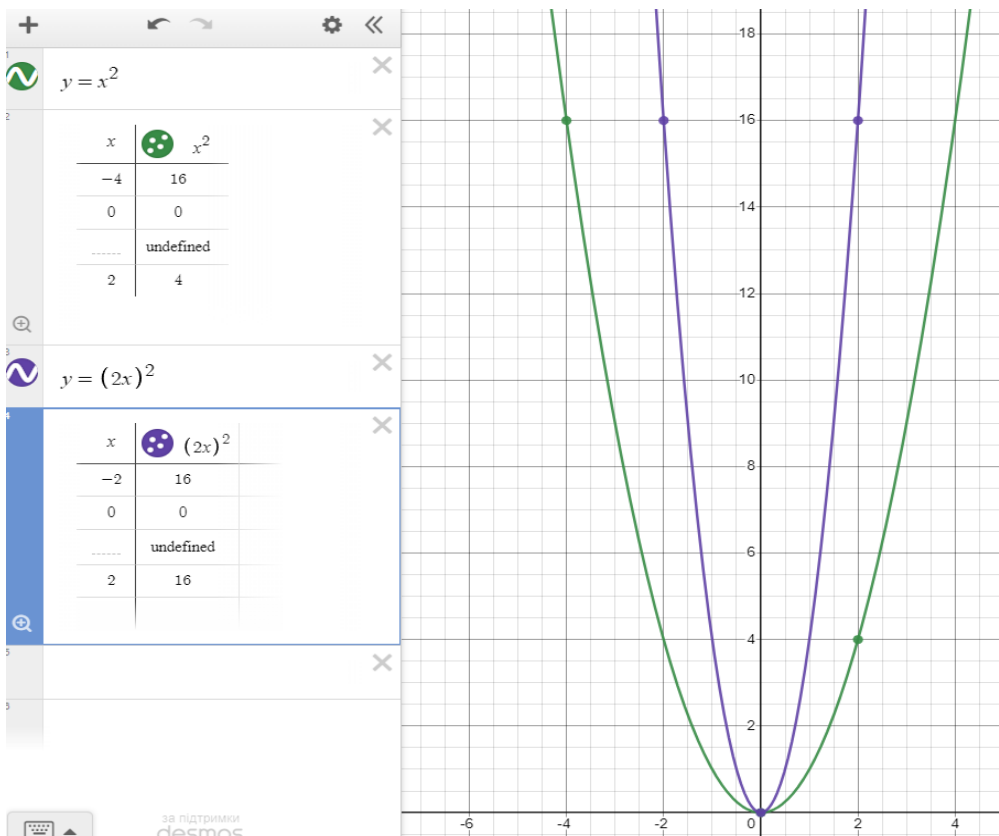


Рисунок 2.1.4

Також, як вже зазначалося, перевагою даного графічного калькулятора є можливість відображати таблиці значень, заданих функцій. Для цього необхідно зайти в налаштування та вибрати значок «Створити таблицю». Приклад таблиць значень для даних функції на рисунку 2.1.5

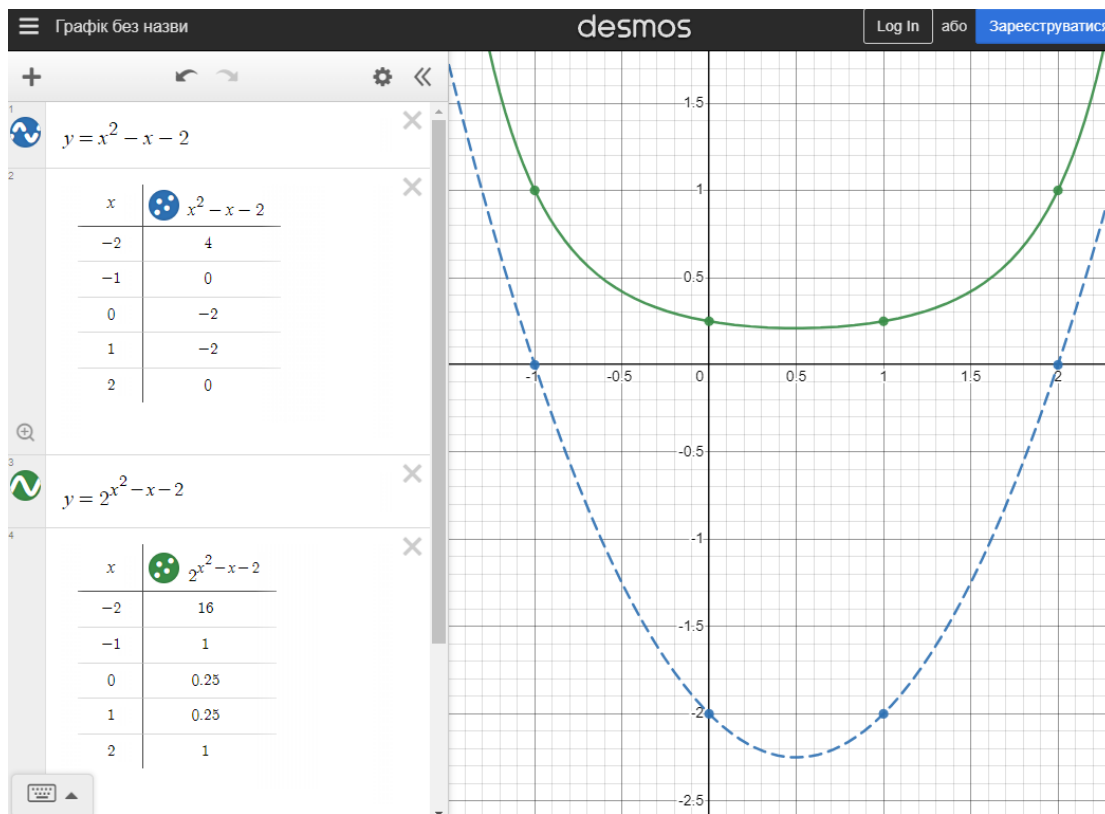
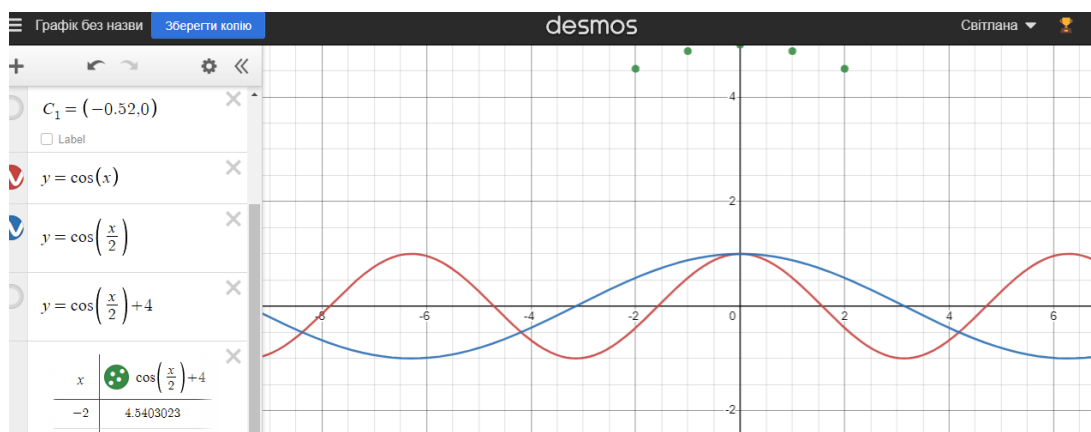


Рисунок 2.1.5

Розглянемо ще один приклад застосування графічного додатка. Побудувати графік функції $y = \cos(x/2) + 4$. Показати графічно етапи перетворення; створити таблицю значень, зберегти графік для подальшої роботи.

Виконуємо побудову покроково:

- будуємо графік функції $y = \cos x$; (рисунок 2.1.6)
- далі геометричним перетворенням графік функції $y = \cos(x/2)$ та $y = \cos(x/2) + 4$



Рисунок

2.1.6

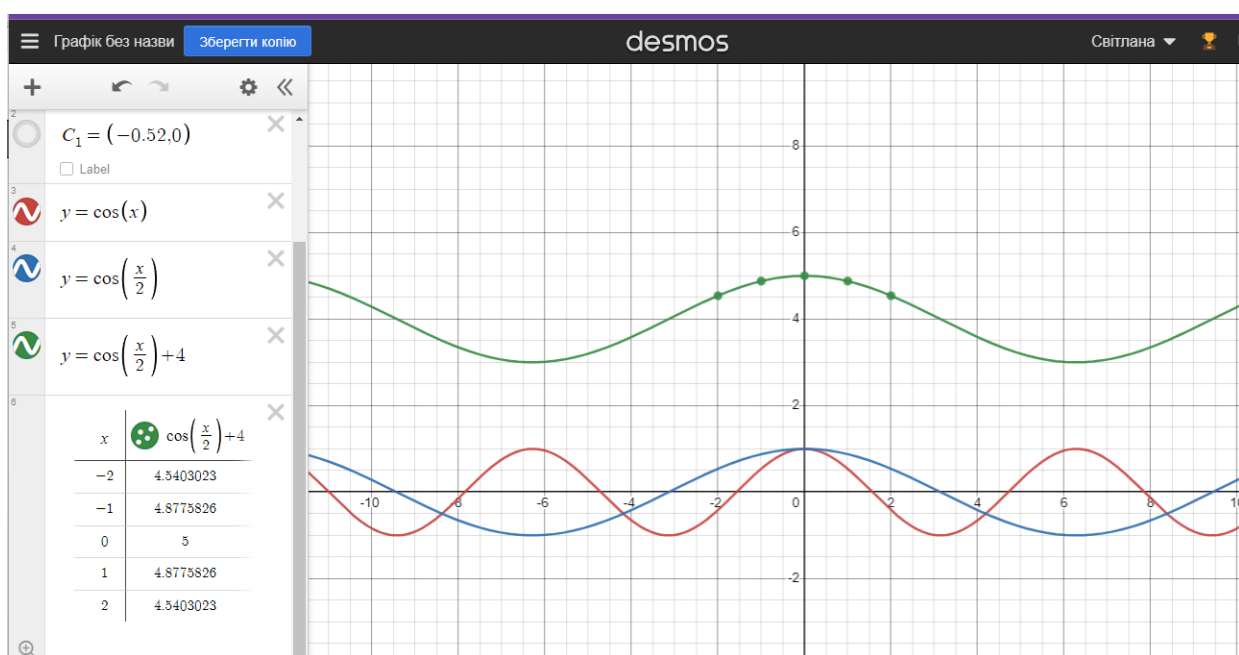


Рисунок 2.1.7

На рисунку 2.1.7 бачимо таблицю значень для функції $y = \cos(x/2) + 4$. За допомогою функції "Створити таблицю" в даному графічному калькуляторі є можливість створити таблицю значень вибраної функції, а також обчислити створити для довільних значень, вказавши їх.

Однією з переваг Desmos є його простота використання. Інтерфейс калькулятора є зрозумілим і інтуїтивно зрозумілим, що дозволяє студентам швидко розпочати роботу з ним. Крім того, Desmos має велику кількість навчальних ресурсів, які допомагають студентам зрозуміти та опанувати матеріал, від пояснень відеоуроків до конструкторів завдань.

Користувачі також мають можливість створити власний обліковий запис і зберігати свої графіки. В даному додатку передбачена функція створення посилання, що дозволяє користувачам ділитися своїми графіками. Графічний калькулятор Desmos поставляється із заздалегідь запрограмованими 35 різними графіками для навчання нових користувачів поводженню з пристроєм та математикою, з цим пов'язаною, що є досить корисним для новачків.

2.2. GeoGebra Calculator Suite – графічний калькулятор.

Програма GeoGebra виникла в 2002 році як дипломний магістерський проект Маркуса Хохенватера під час його навчання в університеті Зальцбурга. Вона була розроблена з метою поєднання можливостей програм динамічної геометрії (наприклад: Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad) і систем комп'ютерної алгебри (наприклад: Derive, Maple) в одній простій у використанні системі, призначений для вивчення і викладання математики [8].

Зараз GeoGebra (<http://www.geogebra.org>,) — це вільний педагогічний програмний продукт, який досить активно використовується, оскільки він поєднує динамічну геометрію, алгебру, математичний аналіз і статистику. Остання версія GeoGebra представляє такі математичні об'єкти: графічні, алгебраїчні та табличні. що є надважливим для користувачів, поряд із багатофункціональністю додатка, це його простий та інтуїтивний інтерфейс.

Функціональні можливості GeoGebra дають можливість ефективно використовувати її у процесі вивчення математики. Безпосередньою перевагою даного додатку у вивченні теми "Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень" є те, що за допомогою GeoGebra можна швидко створювати і графічні зображення різноманітних математичних об'єктів (графіки функцій, графіки рівнянь, геометричні фігури, формули тощо) Також є можливість зберігати їх у файлах або експортувати до буфера обміну, що є досить зручним для користувача.

Перевага GeoGebra, порівняно з такими потужними математичними пакетами, як Mathcad, Matlab, Mapl, Matematica та ін., полягає в тому, що GeoGebra поєднує в собі функціональні можливості й інструменти, переважна більшість з яких затребувані саме у процесі вивчення математики у ЗНЗ (що не можна сказати, говорячи про вищезазначені СКМ, тільки незначна частина їхнього функціоналу може знайти своє використання у шкільній математиці), з одного боку, а з іншого, одним з головних принципів у концепції подальшого розвитку GeoGebra є збереження простого у використанні й інтуїтивно зрозумілого інтерфейсу і подальшого його вдосконалення у цьому напрямку [8].

GeoGebra є сучасним й інноваційним засобом для вивчення математики, використання якого сприяє підвищенню якості та доступності навчального процесу, даний додаток є досить ефективним при вивченні, дослідженні і побудовах графіків функцій. Розглянемо його застосування на ряді прикладів.

Для побудови графіків складних функцій необхідно для цього планувати алгоритм своїх дій, які загалом зводяться до виконання геометричних перетворень, а потім послідовного їх виконання. Розглянемо приклад побудови графіка функції $y = |3\sin(2|x|) - 1|$

Дана функція є складною, і, відповідно, для її побудови необхідно застосувати ряд перетворень. Складемо алгоритм задання перетворень за допомогою графічного калькулятора GeoGebra. Є можливість задати та зразу отримати шуканий графік функції. Проте саме за допомогою даного додатка є можливість візуально побачити та краще зрозуміти процес перетворень, які відбуваються із графіком початкової функції для того, щоб отримати шукану.

Складаємо алгоритм побудови графіка функції $y = |3\sin(2|x|) - 1|$

1. Будуємо графік функції $y = \sin x$ (рисунки 2.2.7);
2. Будуємо графік функції $y = 3\sin x$ (розтяг вздовж осі ординат в 3 рази), (рис. 2.2.7)

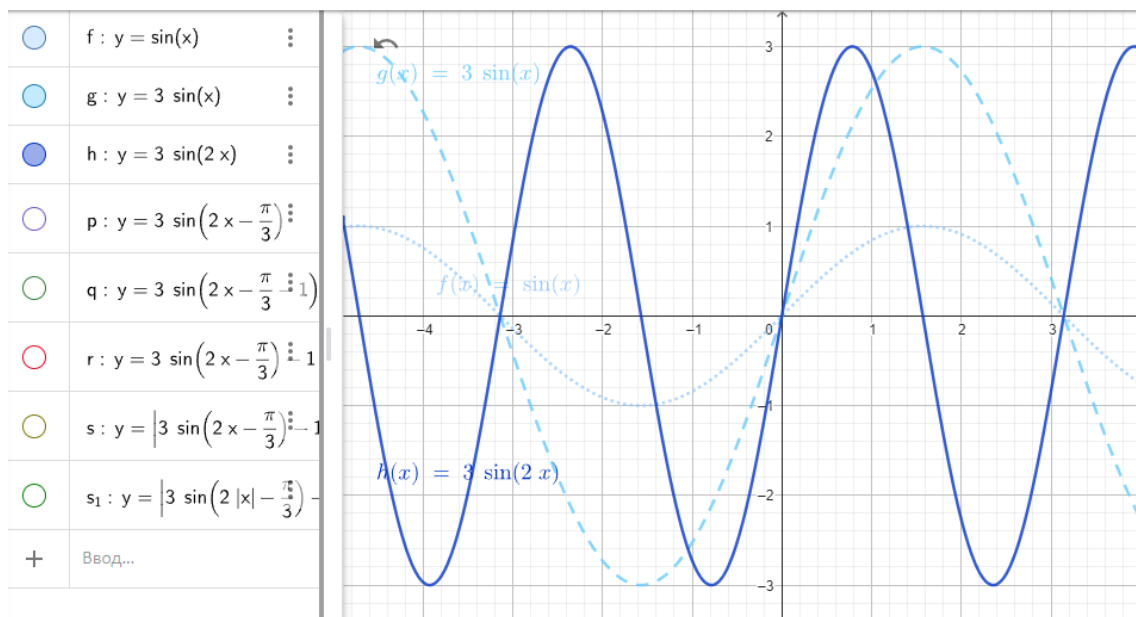
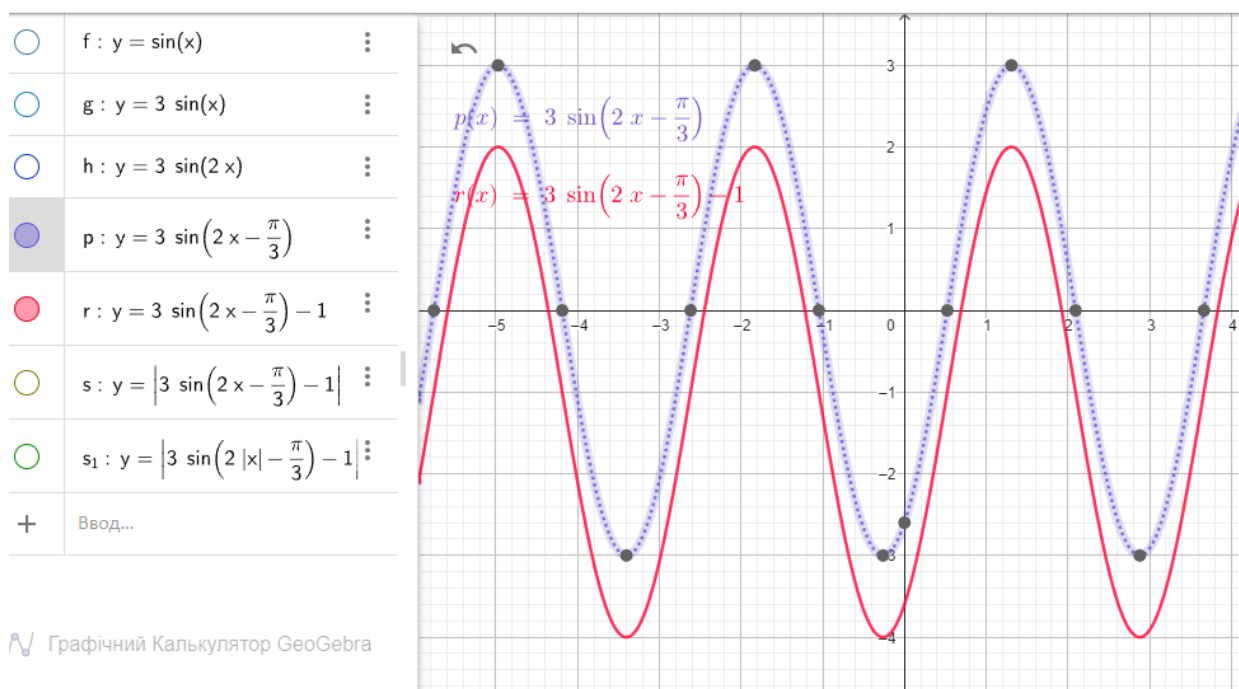


Рисунок 2.2.7

3. Будуємо графік функції $y = 3\sin 2x$ (стиск в 2 рази вздовж осі OX), (рис 2.2.7);

4. Будуємо графік функції $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ (паралельне перенесення на одиниць вздовж осі абсцис в додатному напрямі), (рис. 2.2.8);

5. Будуємо графік функції $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1$ (паралельне перенесення на одну одиницю вздовж осі ординат у від'ємному напрямку), (рис. 2.2.8);



Рисунок

6. Будуємо графік функції $y = |3 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1|$ (ту частину графіка функції $y = 3 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - 1$, яка лежить під віссю абсцис симетрично відобразимо відносно неї), (рисунок 2.2.9);

7. Функція $y = |3 \sin 2|x| - 1|$ є парною, тому ту частину графіка функції $y = 3 \sin 2x - 1$, яка лежить справа від осі ординат, відобразимо симетрично неї, (Рисунок 2.2.9).

Можливості даного калькулятора також можна використовувати для створення готових моделей-завдань, заготовки геометричних графіків, покрокові плани побудов — все для того щоб учні працювали і вивчали закономірності перетворення графіків одночасно.

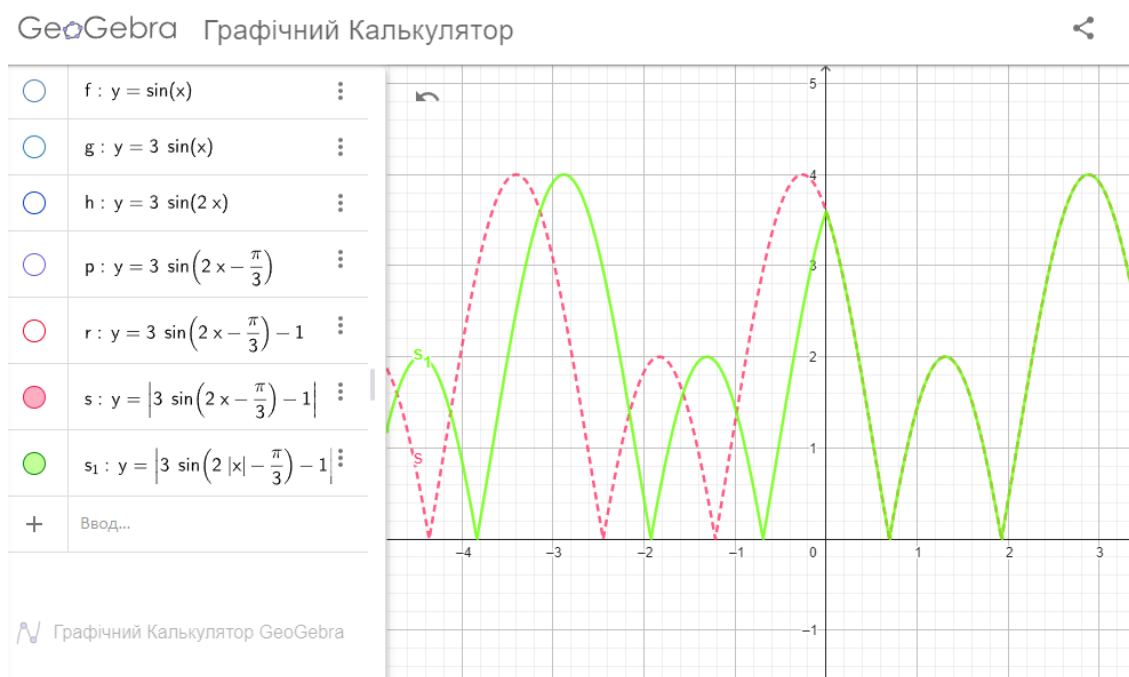


Рисунок 2.2.9

Також можна використати додаток Geogebra, як інструментальне середовище для самостійної роботи дітей на уроці (або вдома). При цьому перед учнями ставляться завдання побудови та дослідження побудови графіків функцій. Динамічна комп'ютерна графічні додатки дають можливість безпосередньо змінювати параметри досліджуваного графіка, причому беззаперечна перевага інтерактивності це те, що учень може безпосередньо

бачити результат впливу змінити введених самостійно параметрів на зміни у досліджуваному графіку.

Розглянемо ще один приклад застосування. Приклад 5: $y = x^2 - 4|x| + 3$. Прослідкуємо всі перетворення починаючи будувати графік функції $y = x^2$, далі $y = x^2 - 4x$, $y = x^2 - 4|x|$ та $y = x^2 - 4|x| + 3$. Їх графіки зображені на рисунках 2.2.10 та 2.2.11, відповідно.

Дуже зручною в даному калькуляторі є можливість підписувати графік якої саме функції побудований, проставляти координати точки, виділяти різні графіки різними кольорами, щоб бачити до та після.

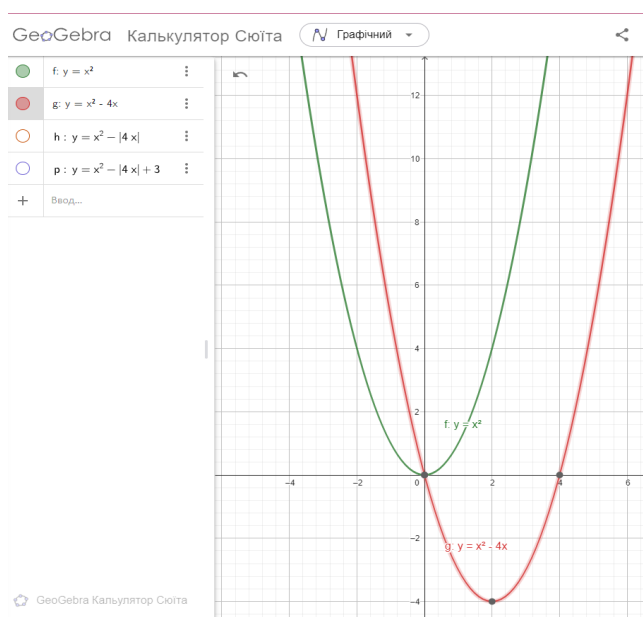


Рисунок 2.2.10

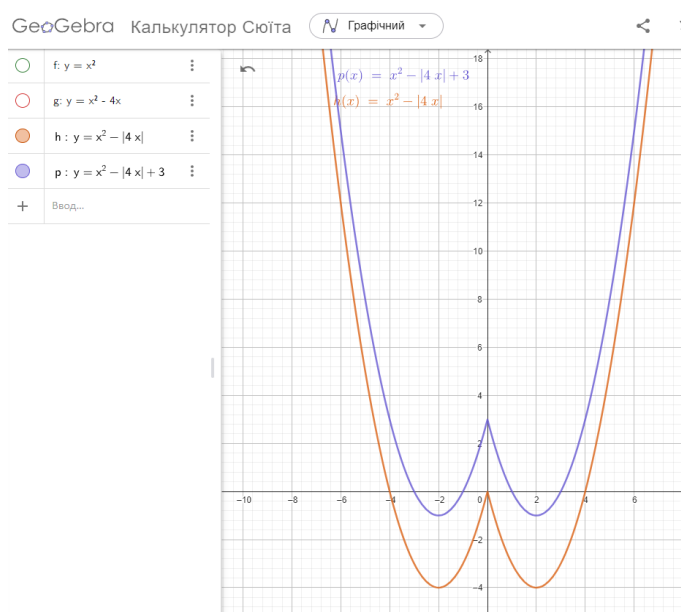


Рисунок 2.2.11

Варто зазначити, що з метою постійного вдосконалення даного сервісу (для зберігання, обміну та використання матеріалу в додатку) створено платформу GeoGebraTube (<http://www.geogebraTube.org>) . Також для постійного зворотного зв'язку і подальшого розвитку системи динамічної математики GeoGebra, 2008 року засновано інтернаціональну професійну мережу: Міжнародний Інститут GeoGebra (International GeoGebra Institute, IGI) . Його основними цілями є:

- навчання і підтримка вчителів, викладачів і студентів педагогічних вищих навчальних закладів з метою сприяння зростанню їх професійної майстерності;
- розвиток і вдосконалення пакета GeoGebra;
- розробка і вільне розповсюдження інноваційних дидактичних матеріалів, створених за допомогою GeoGebra;
- сприяння співпраці між IGI і регіональними інститутами GeoGebra;
- проведення і підтримка GeoGebra досліджень, зокрема приділення особливої уваги дослідженням, пов'язаним із вивченням математики і спрямованим на підвищення рівня її викладання [10].

Також, як приклад, розглянемо використання даного додатку, як інтерактивний засіб під час вивчення досліджуваної теми. Наочне дослідження правил зміни графіків функцій з вихідного графіка, залежно від зміни параметрів. Нехай дано функцію $y = f(x)$, а досліджуємо ми зміни, що з ним відбудуться при побудові графіків функцій $y = af(x)$, $y = f(x) + c$ та $y = f(x + b)$. Можна провести дослідження за такими питаннями:

1. змінити значення параметра та прослідкувати зміни, що відбуваються із графіком функції;
2. як змінюється графік залежно від того додатні чи від'ємні значення a ?
3. що відбудеться із графіком, якщо змінювати аналогічно параметри b і c ?
4. сформулювати правила за якими ми отримуємо нові шукані графіки функцій з графіка функції $y = f(x)$

Також є досить зручним використовувати наочність даного калькулятора, коли у 10 класі ми вивчаємо квадратичну функцію, графік її та властивості.

Квадратичною називається функція, яка задається формулою $y=ax^2+bx+c$, де a, b, c , - дійсні числа, причому $a \neq 0$.

Графіком функції є парабола. Рисунок 2.2.12

1. Координати вершин параболи:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a^2}$$

2. Точки перетину параболи з осями координат.

$$Oy: y(0) = c(0; c)$$

$Ox: y=0, ax^2+bx+c=0$ треба розв'язати квадратне рівняння і корені будуть точками перетину осі Ox .

3. $a>0$ вітки параболи направлені вгору та $a<0$ вітки параболи направлені вниз.

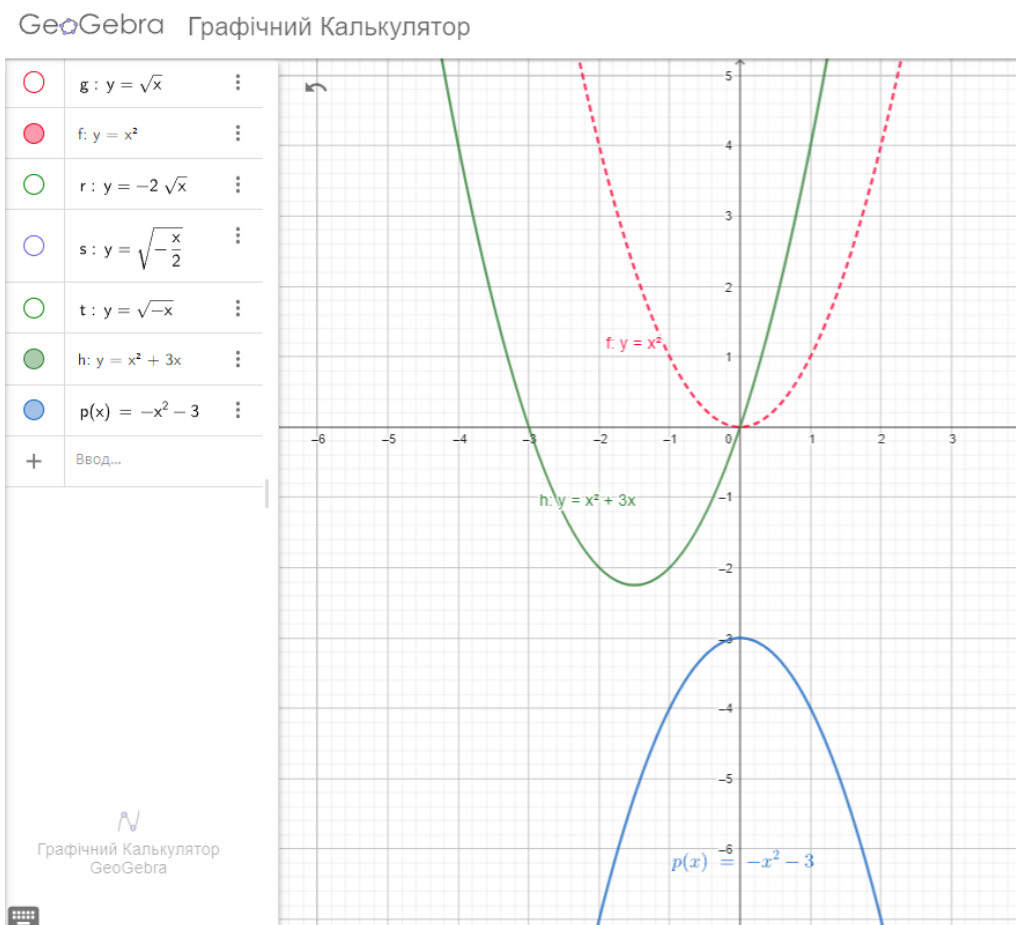


Рисунок 2.2.12

Використання комп'ютерних моделей у навчальному процесі, як показує практика, є важливим фактором підвищення результативності уроку математики. Їх можна використовувати з різною метою, незамінними є вони також у даний етап нашого життя в зв'язку дистанційною формою навчання. Вони дають можливість значно підвищити зацікавленість, доступність та ефективність передачі знань. Комп'ютерні графічні додатки Geogebra та Desmos є ґрунтовними помічниками при вивченні теми побудови графіків функцій та незамінними помічниками у випадках дистанційного навчання.

А ефективне дистанційне навчання забезпечує учням необмежений доступ до електронних освітніх ресурсів, які надають можливості для формування навичок, необхідних у ХХІ столітті:

- інформаційна грамотність;
- мультимедійна грамотність ;
- організаційна грамотність ;
- комунікативна грамотність ;
- продуктивна грамотність.

Таким чином, використання графічного калькулятора GeoGebra є методично доцільним та перспективним при формуванні умінь будувати графіки елементарних функцій (або їх комбінацій) методом геометричних перетворень.

ВИСНОВКИ

На нинішньому етапі розвитку освіти необхідною умовою подальшого підвищення її якості є запровадження в навчальний процес інформаційно-комунікаційних технологій. Один із перспективних напрямів інформатизації шкільної математичної освіти це – використання у навчальному процесі систем комп'ютерної математики і програм для роботи з функціями та їх графіками.

Значна увага приділяється використанню комп'ютерів для посилення візуальної та експериментальної складової навчання математики, так можна досягнути реалізацію практичної спрямованості у навчанні математики.

Інформатизація вищої і середньої освіти є одним із визначальних факторів у процесі побудови інформаційного суспільства [7].

На даний час графічні калькулятори є вже досить поширеними та ефективними застосунками. Додатки такого типу мають інструменти, що дозволяють відобразити графіки функцій, здійснювати розрахунки та виконувати інші математичні дії і ,одночас, візуалізувати отриману інформацію.

Desmos та GeoGebra - це онлайн графічні калькулятори. Вони дають можливість із більшим розумінням (завдяки безперервному процесу візуалізації) розв'язувати різного типу завдання, зокрема, процес геометричних перетворень, які відбуваються при побудові графіків заданих функцій. Вони є сучасними й інноваційними засобами, їх використання сприяє підвищенню якості та доступності навчального процесу, як показано на розглянутих прикладах.

Вони дають в реальному часі побачити та краще зрозуміти процес перетворень, які відбуваються із графіком початкової функції для того, щоб отримати шукану; значно підвищити зацікавленість, доступність та ефективність передачі знань. Комп'ютерні графічні додатки Geogebra та Desmos є ґрунтовними помічниками при вивченні теми побудови графіків функцій та незамінними помічниками у випадках дистанційного навчання.

РОЗДІЛ III

МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ З ТЕМИ «ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВА ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ»

3.1. Методика представлення знань про побудову та перетворення графіків функцій в шкільному курсі алгебри

Навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових компетентностей. А наскрізні лінії ключових компетентностей (надпредметні теми) - у формуванні в учнів здатності застосовувати знання і вміння у реальних життєвих ситуаціях.

Серед змістових ліній математики важливе місце займають функції.

У 7 класі вводиться одне з фундаментальних математичних понять - поняття функції.

Розглядаються питання пов'язані із координатною площиною і найпростішими графіками. До цієї теми слід підійти від повторення координатної прямої.

Ввівши поняття координатної площини, треба зразу відмітити, що : а) кожній її точці відповідає певна пара чисел і б) кожній парі чисел відповідає єдина точка на координатній площині. Учні припускаються багатьох помилок при побудові координатних прямих, вказанні напрямку, наносячи масштаб, і т.ін. Тому треба виробити учнів культуру зображення координатних прямих і на класній дошці, і в зошиті. Наступний етап – ознайомлення із графіками, щоб учні зрозуміли навіщо графіки, слід їх ознайомити із прикладами їх використання.

Тут треба пояснити, що таке область визначення і область значень функції, і на конкретних прикладах закріпити ці важливі поняття.

Розглядається лінійна функція та її графік, графічна ілюстрація розв'язування лінійного рівняння з однією змінною та системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Інші види функцій розглядаються в зв'язку із вивченням відповідного матеріалу, що стосується решти змістових ліній курсу математики.

Зокрема, у 8 класі при вивченні тем “Раціональні вирази” та “Квадратні корені” учні ознайомлюються з функцією $y = x^2$ та її властивостями. А у 9 класі - з квадратичною функцією.

Вивчення властивостей квадратичної функції пов'язується з розв'язування квадратних нерівностей.

Властивості функцій, як правило, встановлюють за їх графіками, на основі наочних уявлень. Аналізуючи графічне задання функції, треба підкреслити, що не кожна лінія, зображена на координатній площині, є графіком деякої функції.

Важливе місце має формування вмінь будувати й аналізувати графіки функцій, виконувати перетворення графіків, “читати” графіки, тобто давати характеристику процесів, які вони описують.

Отже, як було сказано, - поняття функції пронизує весь шкільний курс математики. Вперше його вводять у 7 класі. Але корисною буде підготовча робота і в молодших класах, формування в учнів цього поняття, тобто здійснення функціональної пропедевтики. З цією метою варто ще в 4-6 класах пояснювати учням, як змінюється сума від зміни доданків, як змінюється площа прямокутника від зміни його сторін, а також знайомити учнів з найпростішими таблицями, діаграмами, щоб надалі легше було перейти до графіків [5].

Вивчаючи вирази зі змінними, бажано вчити учнів складати таблиці значень.

В 6 класі основну увагу треба звернути на те, щоб учні вільно розв'язували дві задачі:

1. знаходити координати точки, зображеної на координатній площині;
2. будувати точки з заданими координатами.

Треба виробити в учнів культуру зображення координатних прямих і на класній дошці, і в зошити.

Щоб зацікавити учнів, варто ознайомити їх із приладами використання графіків функцій.

Саме слово “функція” вперше вводять в курсі алгебри 7 класу - на основі залежності між двома величинами (периметр квадрата залежить від довжини його сторони; шлях, пройдений автомобілем зі сталою швидкістю, залежить від часу руху). Вводять термін відповідність між змінними, а далі - поняття незалежної та залежної змінних, і власне функції.

Учні повинні пояснювати, що таке область визначення та область значень функції, графік функції, знати способи задання функції, а також вміти розв'язувати вправи типу:

- 1 знаходити область значень даної функції за даними значенням аргументу, і навпаки;
- 2 складати таблицю значень для даної функції;
- 3 знаходити область визначення функцій ($y=3x+4$, $y=(2x+1)/6$, $y=-7/x$, $y=8/(x-9)$, тощо...;
- 4 будувати графіки функцій за даними координатами точок, а також знаходити координати точок на графіку; вміти “читати” графіки;
- 5 визначати окремі характеристики функції за її графіком (додатні значення, від'ємні значення, нулі функції);
- 6 будувати графіки функцій, заданих формулою.

У 7 класі вводиться означення лінійної функції та побудова її графіка, а також графіка прямої пропорційності. Спочатку учні розглядають один із видів лінійної функції, а саме: пряму пропорційність. Потім треба зробити узагальнення. Розглянувши два-три конкретних приклади лінійної функції, слід дати її означення і перейти до побудови графіка. Спочатку будуємо графік за

точками. Після цього звертаємо увагу учнів на те, що графік функції $y=ax+b$ можна дістати з графіка уже відомої їм функції $y = ax$ за допомогою паралельного перенесення. Звідки і робимо висновок: оскільки графік функції пряма лінія, то і графік функції $y = ax + b$ – також пряма. Після цього учні розуміють, що графік кожної лінійної функції – пряма, раціоналізують побудову таких графіків: щоб побудувати пряму, досить визначити тільки дві її точки, а вже потім за допомогою лінійки провести через них пряму. Користуючись цими графіками, учні формують властивості лінійної функції та прямої пропорційності.

У 8 класі вивчають функцію $y=R/x$, її графік та властивості. Учні повинні вміти будувати графік оберненої пропорційності та охарактеризувати за графіком її властивості.

Вправи передбачають також за графіком знаходити, значення аргументу та значення функції, розв'язувати графічно рівняння виду: $8/x=2$; $2x=18/x$; $-4/x=3-x$

Далі вивчають функції $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$, графіки та властивості цих функцій.

Конкретним прикладом функції $y = x^2$ є відповідність між довжиною сторони квадрата і його площею. Зрозуміло, що довжина квадрата a може виражатися тільки додатнім числом, тому область визначення цієї функції $[0; \infty]$ В цьому випадку областю визначення є лише додатні числа.

Вводять поняття: парабола, вершина параболі, за графіком встановлюють властивості функції $y=x^2$. Слід звернути увагу учнів на такі властивості графіка функції: 1) весь графік розміщений у верхній координатній півплощині;

- 2) тільки одна його точка лежить на осі Ox ;
- 3) графік симетричний відносно осі Oy ;
- 4) кожна вітка параболі – графіка функції $y = x^2$ нескінченна.

Корисно зауважити, що параболами є траєкторії руху тіл, кинутих під кутом до горизонту, ракет, струменів води. Параболічну форму мають арки багатьох мостів та інших споруд.

Учні повинні вміти будувати графік, знати властивості функції $y=x^2$, вміти графічно розв'язувати рівняння виду: $x^2=3-2x$, $x^2=-2x$ тощо. (Достатній рівень)

А також будувати графіки функцій [6]

$$y = (x^3+x^2)/(x+1), \quad y = (x^3-x^2)/(1-x^2) \text{ (високий рівень)}$$

При вивченні функції $y=\sqrt{x}$ розглядають залежність довжини сторони квадрата від його площі S : $a=\sqrt{S}$

Далі складають таблицю значень та будують графік функції $y=\sqrt{x}$, за графіком узагальнюють властивості цієї функції.

Важливе значення має властивість: більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, що дає змогу порівнювати значення виразів, що містять корені.

Учні повинні вміти за графіком знаходити значення аргументу та значення функції, графічно розв'язувати рівняння ($\sqrt{x}=6-x$, $3-2x=\sqrt{x}$) порівнювати числа ($2\sqrt{3}$ та $\sqrt{4}$), будувати графік функції $y=(\sqrt{x}-x)/(1-\sqrt{x})$ (Високий рівень)

9 клас

У 9 класі вивчають квадратичну функцію, її графік та властивості.

При цьому порівнюють вже раніше засвоєні поняття нулів функції, область визначення та область значень, вводять визначення проміжків знакосталості функції, зростаючої та спадної функції на деякому проміжку.

Учні повинні вміти :

- будувати графік функції $y=ax^2+bx+c$, та знати властивості цієї функції,

- за графіком знаходити значення функції;
- значення аргументу;
- нулі функції;
- найбільше та найменше значення функції;
- розв'язки нерівностей: $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, тощо;
- область значень функції;
- проміжки зростання та проміжки спадання функції;

а також розв'язувати завдання типу:

(Високий рівень)

- при яких значеннях b і c точка $M(5;7)$ є вершиною параболи $y=x^2+bx+c$;
- при якому значенні C найбільше значення функції $y=-x^2+6x+c$ дорівнює 16?

В 9 класі вивчають також “Найпростіші перетворення функцій”, зокрема:

1. Побудова графіка функції $y=f(x) \pm n$, де $n > 0$

$$y=\sqrt{x}, y=\sqrt{x}+2, y=\sqrt{x}+3$$

2. Побудова графіка функції $y=f(x \pm n)$, де $n > 0$

$$y=x^2, y=(x-2)^2, y=(x+1)^2$$

3. Побудова графіка функції $y=-f(x)$

$$y=\sqrt{x} \text{ і } y=-\sqrt{x}$$

4. Побудова графіка функції $y=k f(x)$, де $k > 0, k \neq 1$

$$y=|x|, y=2|x|, y=|x-2|+3, y=|x|, y=-2\sqrt{x}$$

5. Побудова графіка функції $y=|f(x)|$

$$y=|2x-3|$$

(Достатній рівень)

Побудувати графіки функцій:

(Достатній рівень)

$$y=\sqrt{x-1}+2; \quad y=-2x^2; \quad y=|x|; \quad y=(x+1)^2-4; \quad y=x-1$$

1. Розв'язати графічно рівняння (Високий рівень)

$$1+5/x = \sqrt{x-1}; \quad |x-2| = (x+1)^2$$

2. Побудувати графік функції $y = (x+2)/(x-4)$

10 клас. Показникова і логарифмічна функція

В 10 класі вивчають функцію виду $y = a^x$, її властивості при $a > 1$ та $0 < a < 1$.
Учні повинні вміти будувати графіки, визначати властивості, розв'язувати вправи типу:

1. Порівняй числа $(2,5)^{-\sqrt{2}}$ і 1 , $3^{\sqrt{2}}$ і $(1/3)^{2,8}$

2. Побудувати графік функції $y = 3^{x+1} - 3$, $y = |2^x - 2|$.

Перед введенням показникової функції розширюють поняття степеня, щоб учні зрозуміли, що надалі вираз $y = a^x$ можна розглядати при довільному додатному a і дійсному x . Після цього можна вводити поняття показникової функції.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ (обернена до показникової)

Учні повинні вміти будувати графіки, визначати властивості логарифмічних функцій, застосовувати ці властивості до розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей та їх систем.

3.2. Системи вправ на узагальнення та систематизацію знань із застосуванням комп'ютерних технологій та огляд завдань із ЗНО та ДПА

Функція є одним із найважливіших понять сучасної математики. Від того, наскільки сумлінно засвоюють учні поняття функції, її властивості, залежить успішне оволодіння подальшим курсом математики.

Тому тема «Функції, їх властивості та графіки» має як освітню так і прикладну значимість.

Як вже зазначалось вище, у навчальній програмі з математики до головних чотирьох завдань вивчення теми віднесено розвиток графічної культури учнів, оскільки робота з діаграмами, рисунками, графіками є одним із поширених видів практичної діяльності людини, зокрема потребує вміння «читання» графіків, тобто встановлення властивостей функції за її графіком.

У 9 класі розглядається побудова графіків функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(|x|)$ та функції $y = |f(x)|$ за допомогою функції $y = f(x)$.

Систематизуємо правила, які дозволяють виконати такі побудови.

- Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$ і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 3.2.1 та 3.2.2, виконаних із допомогою графічного калькулятора Geogebra, показано, як працює це правило для побудови графіка функцій $y = x^2 - 4$ і $y = \sqrt{x+3}$

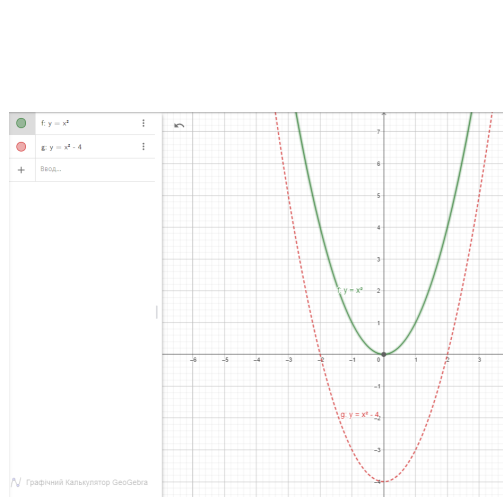


Рисунок 3.2.1

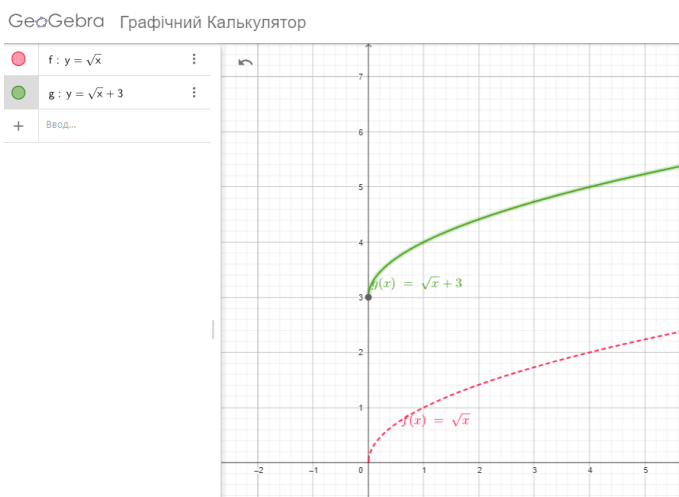


Рисунок 3.2.2

- Графік функції $y = f(x+a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць вліво, якщо $a > 0$ і на $-a$ одиниць вправо, якщо $a < 0$.

На рисунках 3.2.3 та 3.2.4 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = (x-2)^2$ і $y = \sqrt{x+3}$.

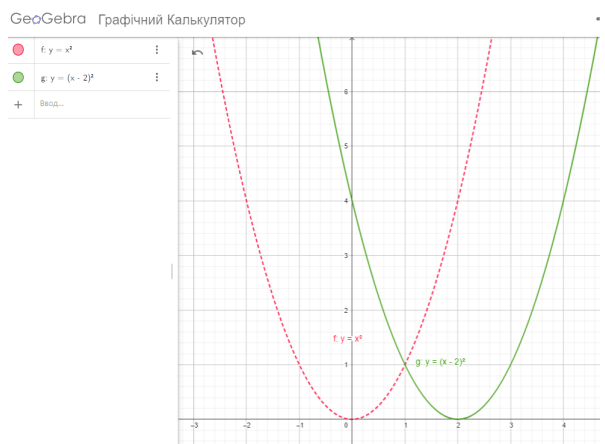


Рисунок 3.2.3

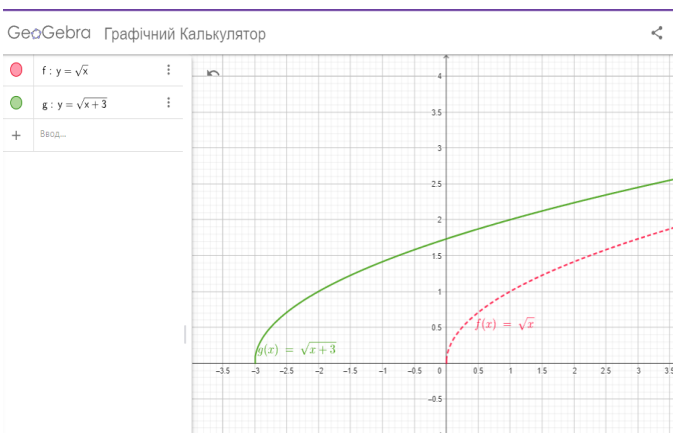


Рисунок 3.2.4

- Графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k . Кажуть, що графік функції $y = k f(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті розтягу в k разів від осі абсцис, якщо $k > 0$, або в результаті стиску в $1/k$ разів до осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.

На рисунках 3.2.5, 3.2.6 та 3.2.7 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = 2x^2$, $y = 1/3 \sqrt{x}$, $y = 1/2 \sqrt{x}$ і $y = -2 \sqrt{x}$.

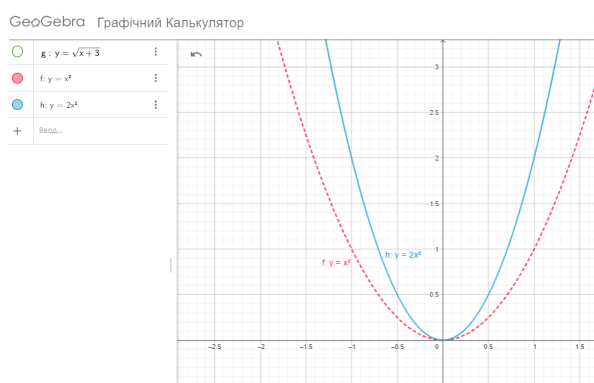


Рисунок 3.2.5

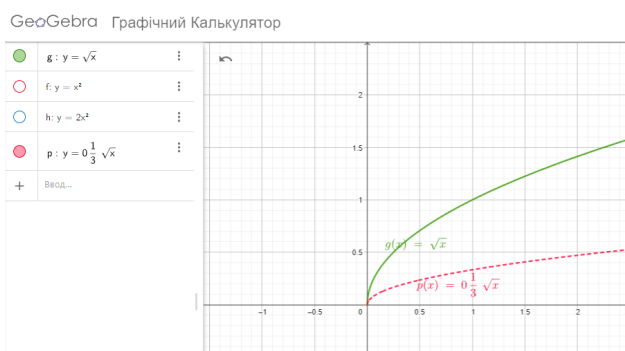


Рисунок 3.2.6

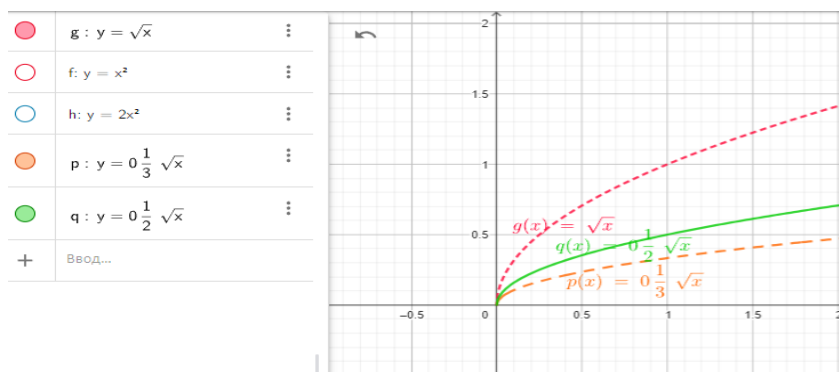


Рисунок 3.2.7

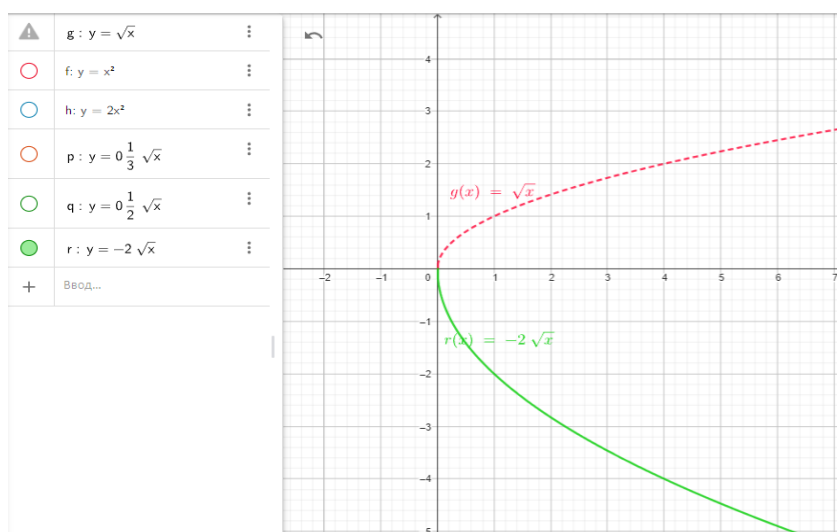


Рисунок 3.2.7

- Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$. Графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожену точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k .

На рисунках 3.2.8 та 3.2.9 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{5x}$ і $y = \sqrt{x/2}$.

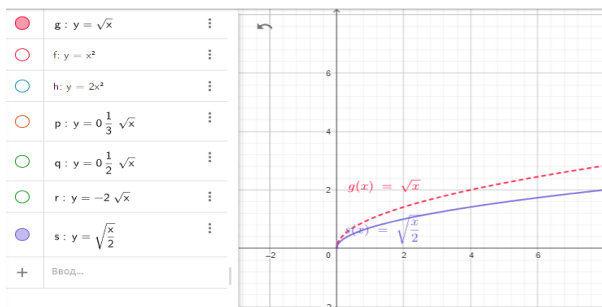
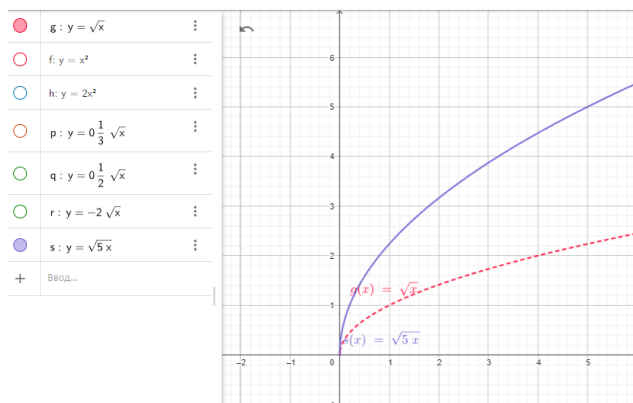


Рисунок 3.2.8 та 3.2.9

- Побудова графіка функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.
Усі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожен точку графіка функції $y = f(x)$ на точку, симетричну їй відносно осі ординат, тобто відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають *симетрією відносно осі ординат*. На рисунку 3.2.10 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудовано графік функції $y = \sqrt{-x}$.



Рисунок 3.2.11

- Правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$.

Наприклад, на рисунку 3.2.11 показано, як можна за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$ і $y = \sqrt{(-x/2)}$.

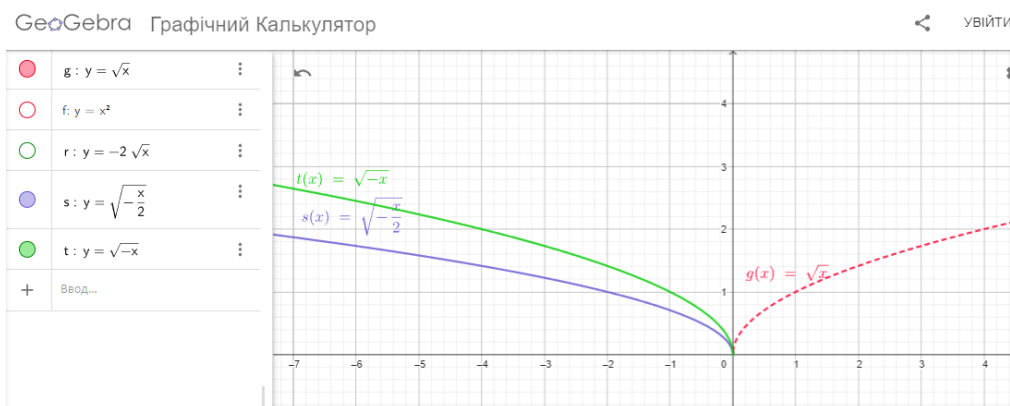


Рисунок 3.2.12

У 10 класі вивчаємо квадратичну функцію, графік її та властивості.

Квадратична функція.

Квадратичною називається функція, яка задається формулою $y=ax^2+bx+c$, де a, b, c , - дійсні числа, причому $a \neq 0$.

Графіком функції є парабола. Рис.3.2.13

1. Координати вершин параболи:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

2. Точки перетину параболи з осями координат.

$$Oy: y = (0) = c(0; c)$$

$Ox: y=0, ax^2+bx+c=0$ треба розв'язати квадратне рівняння і корені будуть точками перетину осі Ox .

3. $a>0$, вітки параболи направлені вгору

$a<0$, вітки параболи направлені вниз.

GeoGebra Графічний Калькулятор

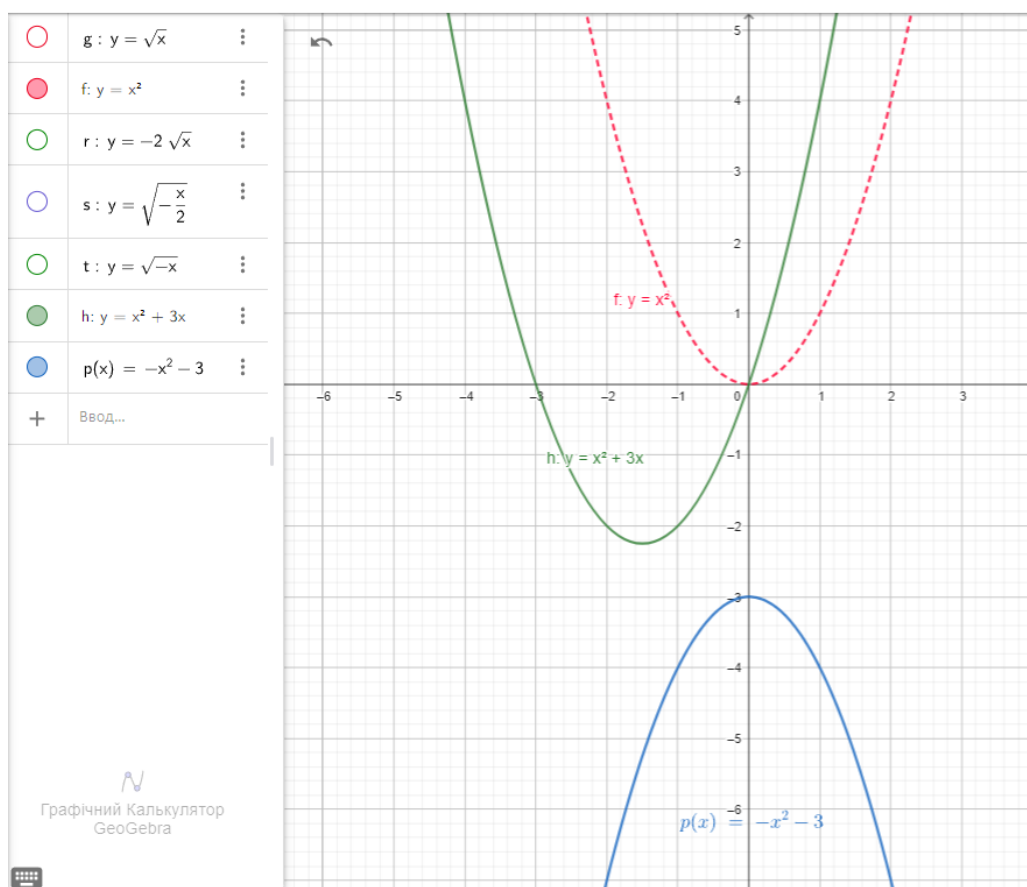


Рисунок 3.2.13

Вправи з поясненням

- 1) Дано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графік функції $y = -f(x)$?
- 2) Дано графік функції $y = f(x)$. Як побудувати графіки функцій $y = 2f(x)$ та $y = 1/2f(x)$?
- 3) Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
 - 1) на 5 одиниць угору;
 - 3) на 10 одиниць униз;
 - 2) на 8 одиниць вправо;
 - 4) на 6 одиниць вліво;
 - 5) на 3 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз;
 - 6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

Евристична бесіда

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x+a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Як можна отримати графік функції $y = f(x)+a$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
3. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
4. Як можна отримати графік функції $y = f(kx)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
- 5.

№	Функція	Область визначення
1	$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + D$ (многочлен n-ого степеня)	
2	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ дріб	
3	$y = \sqrt{f(x)}$	
4	$y = \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$	

В ЗНО часто трапляються завдання на дослідження графіків функцій та рідше на перетворення графіків геометричними методами. Ось декілька прикладів завдань за минулі роки.

За 2019 рік з-поміж завдань: два - на властивості функцій (нулі, ОДЗ) , одне - на перетворення графіка та ще одне, - безпосередньо на побудову графіків функцій.

ЗНО онлайн 2019 року з математики – основна сесія

◀ 25 26 27 28 29 30 31 32 33

Завдання 31 з 33

Задано функції $f(x) = \frac{2}{x}$ і $g(x) = 5 - 8x$

- 1 Побудуйте графік функції f .
- 2 Побудуйте графік функції g .
- 3 Знайдіть похідну функції f .
- 4 До графіка функції f проведено дотичні, паралельні графіку функції g .
Визначте абсциси точок дотику.

Рисунок 3.2.14, 2019 рік

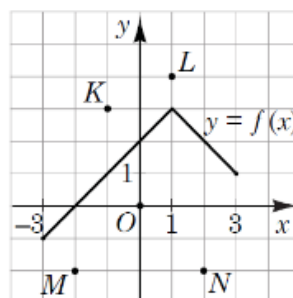
ЗНО онлайн 2019 року з математики – основна сесія

◀ 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ▶

Завдання 15 з 33

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Одна з наведених точок належить графіку функції $y = -f(x)$. Укажіть цю точку.

А	Б	В	Г	Д
K	L	O	M	N



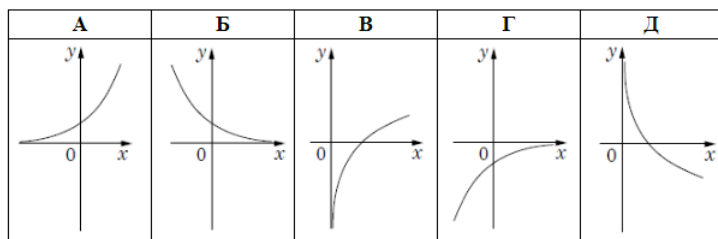
Рисунок

3.2.15, 2019 рік

ЗНО за 2020 рік представлене двома завданнями на функції та їх графіки.

Рисунки 3.2.15 та 3.2.16

На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції $y = (0,5)^x$?



Позначте відповіді:

А Б В Г Д

☐
☐
☐
☐
☐

Пропустити

Наступне

Рисунок 3.2.16, 2020 рік

Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Графік якої з наведених функцій отримали?

А	Б	В	Г	Д
$y = f(x + 3)$	$y = f(x) + 3$	$y = 3f(x)$	$y = f(x) - 3$	$y = f(x - 3)$

Позначте відповіді:

А Б В Г Д

☐
☐
☐
☐
☐

Пропустити

Наступне

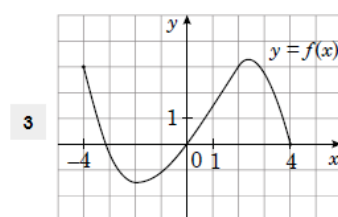
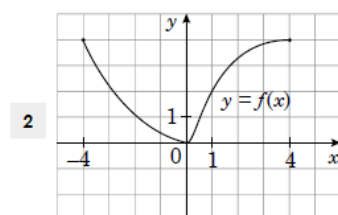
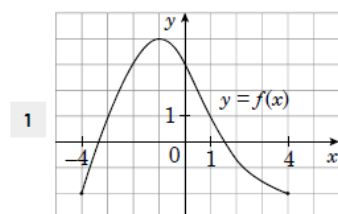
Рисунок 3.2.17,

2020р

В ЗНО за 2021 рік наявне лише одне завдання на дослідження функції, воно представлене на рисунку 3.2.18.

Установіть відповідність між графіком (1-3) функції, визначеної на проміжку $[-4; 4]$, та її властивістю (А – Д).

Графік функції



Властивість функції

- А функція є непарною
- Б найменше значення функції на проміжку $[1; 3]$ дорівнює 2
- В функція є парною
- Г графік функції не має спільних точок із графіком рівняння $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$
- Д графік функції тричі перетинає пряму $y = 1$

Рисунок 3.2.18, 2021 рік

Серед завдань зовнішнього незалежного оцінювання за 2022 рік також лише одне на функції, а саме на побудову графіка функції методами геометричних перетворень. Рисунок 3.2.19

Графік довільної функції $y = f(x)$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз. Графік якої з наведених функцій отримали?

- А $y = f(x + 3)$
- Б $y = f(x) + 3$
- В $y = 3f(x)$
- Г $y = f(x) - 3$
- Д $y = f(x - 3)$

Позначте відповіді:

- А Б В Г Д
- ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Пропустити

Наступне

Рисунок 3.2.19, 2022 р

В завданнях ЗНО за 2023 рік вправ на перетворення графіків функцій не представлено. Лише одне завдання на знаходження нулів функції, рис.3.2.20.

НМТ онлайн 2023 року з математики – 1 сесія

Тестові завдання першої сесії національного мультитесту (ЗНО) 2023 року з математики



Завдання 6 з 22

На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-3; 3]$. Укажіть нуль цієї функції.

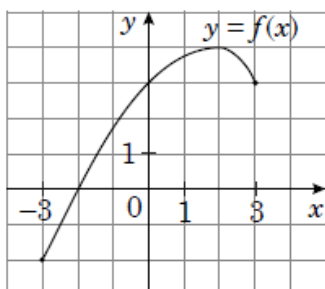


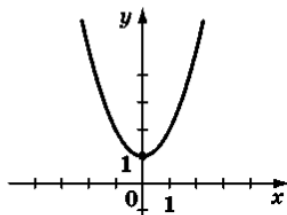
Рисунок 3.2.20

Збірники завдань ДПА з математики (а саме: ДПА 2013р, 2015р та 2020р) переважно містять завдання на основні властивості функцій та загальний вигляд їх графіків. Наприклад: знайти абсцису/ординату точки за графіком функції; вказати область допустимих значень або область визначень; вказати проміжки спадання/ зростання; вказати функцію за її графіком; побудувати графіки заданих функцій. Зауважимо, що загалом не у кожному варіанті представлені вправи графіки функцій та на геометричні перетворення при побудові графіків функцій.

Зразки описаних завдань наведені нижче на рисунках 3.2.21, 3.2.22, 3.2.23 та 3.2.24.

1.7. Графік якої з функцій зображено на рисунку?

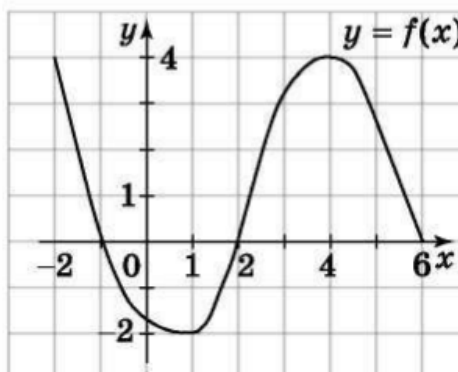
- А) $y = (x + 1)^2$; В) $y = x^2 + 1$;
Б) $y = (x - 1)^2$; Г) $y = x^2 - 1$.



1.8. Яка із запропонованих функцій спадає на проміжку $(0; +\infty)$?

А) $y = \sqrt{x}$; Б) $y = \frac{2}{x}$; В) $y = x^2$; Г) $y = -\frac{2}{x}$.

1.8. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначений на проміжку $[-2; 6]$. Укажіть проміжок зростання даної функції.



А) $[2; 6]$; В) $[-2; 4]$;
Б) $[1; 4]$; Г) $[-1; 4]$.

1.8. Укажіть, графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо на 2 одиниці вгору і на 3 одиниці праворуч.

А) $y = (x - 3)^2 + 2$; В) $y = (x - 3)^2 - 2$;
Б) $y = (x + 3)^2 + 2$; Г) $y = (x + 3)^2 - 2$.

Підсумовуючи аналіз завдань в ЗНО та ДПА за минулі роки, можна зробити висновок про зменшення кількості вправ на властивості та дослідження функцій та побудову їх графіків, а також суттєве зниження рівня складності цих завдань.

ВИСНОВКИ

В роботі було розглянуто теоретичні та практичні аспекти методики навчання учнів побудови графіків функцій, зокрема геометричним перетворенням.

Перший розділ - це теоретичний матеріал, зосереджений на побудові графіків функцій методом геометричних перетворень. Його розбито на три основні підпункти:

1.1. Графіки функцій, загальні методи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

1.2. Побудова графіків складних функцій та їх властивості.

1.3 Аналіз програми з математики на рівні стандартному і профільному

Тобто аналіз проведено шляхом покрокового вивчення теми: загальна методична схема, елементарні перетворення графіків функцій, побудови більш складних графіків функцій від простого до складного. Кожен етап супроводжується наглядними прикладами з теми. Що допомагає структурувати та систематизувати знання учнів з даної теми.

Другий розділ роботи - це безпосередньо розгляд доцільності та практичності використання графічних калькуляторів для побудови графіків функцій.

Як зауважує автор: “не виникає ніяких сумнівів, що використання інформаційних технологій (або навіть підготовка до такого використання) приводить до суттєвих змін в психіці, перетворює пізнавальні і мотиваційно-емоційні процеси, діяльність і спілкування людини, свідомість і міжособові взаємини” [6]

Інтеграція комп'ютерних технологій в шкільне навчання сприяє більш наочному сприйняттю отримуваної інформації, підвищенню якості та доступності навчального процесу; розглянуті графічні калькулятори є досить ефективним при вивченні, дослідженні і побудовах графіків функцій. Інтерфейс GeoGebra та Desmos є простим у використанні й інтуїтивно зрозумілим.

Актуальним є те, що GeoGebra та Desmos мають засоби для інтеграції із сучасними веб-технологіями (Веб 2.0, Веб 3.0, хмарні обчислення, Wiki-технології, Moodle). А це

робить цілком доцільним їх застосування у випадку дистанційних форм навчання математики.

В третьому розділі розглянуто методичні особливості узагальнення і систематизації знань з теми «Графіки функцій, побудова та перетворення графіків функцій методами геометричних перетворень». Його розбито на два підпункти:

3.1 Методика представлення знань про побудову та перетворення графіків функцій в шкільному курсі алгебри

3.2 Системи вправ із застосуванням комп'ютерних технологій та огляд завдань на функції у ЗНО та ДПА.

На нинішньому етапі розвитку освіти необхідною умовою подальшого підвищення її якості є запровадження в навчальний процес інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) і їх ефективне використання. Один із перспективних напрямів інформатизації шкільної математичної освіти це – використання у навчальному процесі систем комп'ютерної математики (СКМ), зокрема, систем динамічної математики (СДМ) і програм для роботи з функціями та їх графіками [8].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра: підруч. для 7 кл. закл. заг. серед. освіти/ О.С.Істер. – 2-ге вид., переробл.- Київ: Генеза, 2021. – 240с.
2. Алгебра: підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти/ О.С.Істер.- Київ: Генеза, 2021. – 270с.
3. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.-Х.: Гімназія, 2009
4. Алгебра і початки аналізу в 10 класі.: посібник для вчителів./ Івлєв Б.М., Мойсєєва З.І. - К.: "Вища школа", 1979.
5. Бевз Г.П. Математика: 10 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2010. – 320 с. розділ.1
6. Бевз Г.П. Математика: 11 кл.: підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Генеза, 2011. – 320 с. розділ 2
7. Бевз Г.П. Методика викладання математики. - 2-е видання, перероблене та доповнене. - К.: Вища школа, 1977. - 376 с.
8. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів. / Жалдак М. І. — Видання 2-е, перероблене та доповнене. — К. : РННЦ «ДІНІТ», 2003. — 324 с.
9. Математика. Комплексна підготовка до ЗНО І ДПА/ Уклад.: А.М, Капіносов [та ін.]. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2020. - 512 с.
10. Математичний аналіз, ч. І. / Шкіль М.І. /Київ.: Вища школа, 1978.- 384с.
11. Освітній портал математичного спрямування "YukhymCommunity " [Електронний ресурс] : [Веб-сайт].—Електронні дані.—Режим доступу: <https://yukhym.com/uk/>
121. Освітній проект "На Урок" для вчителів [Електронний ресурс] : [Веб-сайт].—Електронні дані.—Режим доступу: <https://naurok.com.ua/>
13. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій : дис. ... доктора пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. — К., 2005. — 381 с.

14. Ракута В. М. GeoGebra для початківців: навчальний посібник. / Ракута В. М. — Чернігів : ЧОППО ім. К. Д. Ушинського, 2011. — 49 с. - Режим доступу: <https://doi.org/10.33407/itlt.v30i4.700>
15. Ракута В. М. Програми для роботи з функціями та графіками. / Ракута В. М. // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2010. — № 7 (87). — С. 29–33.
16. Ракута В. М. Система динамічної математики geogebra як інноваційний засіб для вивчення математики / Ракута В. М. — Чернігів : ІТЗН, вип. 30, вип. 4, Вер 2012. - Режим доступу: <https://doi.org/10.33407/itlt.v30i4.700>
17. Рудченко П.А, Яремчук Ф.П. Алгебра і елементарні функції.: довідник 2-е видання, доп.- К.: Наукова думка,1976.
18. Сайт МОН [Електронний ресурс] : [Веб-сайт].–Електронні дані.–Режим доступу: <https://mon.gov.ua/>
19. Шунда Н.Н. Функції та їх графіки. : посібник для вчителів. - 2-е видання, доп. - К.: Рад.школа, 1983.-190с.