

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему **“Побудова геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки”**

Виконав:

магістрантка II курсу, групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Мариневич Марія Дмитрівна

Керівник *Заторський Роман Андрійович*

Рецензент _____

Івано-Франківськ – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ	6
1.1. Основні теоретичні відомості про побудову геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки	Error! Bookmark not defined.
1.2. Методи та процес побудови геометричних фігур	12
РОЗДІЛ 2. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ СКЛАДНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ	7
2.1. Методи побудови круга, еліпса, прямокутника, квадрата, трикутника	19
2.2. Приклади побудов геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки	28
2.3. Основні помилки під час побудов геометричних фігур та способи їх уникнення.	34
РОЗДІЛ 3. ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ	37
3.1. Застосування побудов геометричних фігур у геометрії, архітектурі, мистецтві тощо	37
3.2. Проблеми, пов'язані з побудовою геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки у виробничих процесах.	45
РОЗДІЛ 4. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ	49
4.1. Результати проведеного дослідження	49
4.2. Аналіз отриманих даних та порівняння зі знаннями, що вже існують	51
4.3. Аналіз і порівняння підручників	52
ВИСНОВОК	56
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ	61
ДОДАТКИ	64

ВСТУП

Актуальність теми. Для вивчення геометрії та розвитку просторового мислення важливо здійснювати практичні побудови. Вони допомагають учням краще розуміти абстрактні концепції та відносини між геометричними об'єктами.

Побудова геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки залишається актуальною темою в геометрії з кількох важливих причин. Освітня значимість цієї теми полягає в тому, що вона сприяє кращому розумінню абстрактних концепцій та розвитку просторового мислення через практичні побудови. Використання циркуля та лінійки вимагає точності та уваги до деталей, що сприяє розвитку моторики рук та удосконаленню координації рухів.

Навички побудови геометричних фігур мають практичне застосування в різних галузях, таких як архітектура, інженерія та графічний дизайн. Знання основ конструювання може бути корисним у подальшій професійній діяльності. Крім того, вивчення геометрії сприяє розвитку логічного мислення та аналітичних навичок, що становлять основу для подальшого вивчення вищої математики.

Практичні заняття, пов'язані з побудовою геометричних фігур, активно залучають учнів до навчання, роблячи матеріал цікавим та зрозумілим. Таким чином, тема побудов геометричних фігур є не лише традиційною, але й актуальною у сучасній освіті, сприяючи комплексному розвитку учнів та формуванню їхнього математичного та геометричного мислення.

Метою дослідження є систематизація та узагальнення знань про побудову геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки, розгляд методики та прийомів, які дозволяють з точністю та креативністю використовувати ці інструменти для створення різноманітних геометричних форм.

Для реалізації мети варто виконати наступні **завдання**:

- Проаналізувати методи побудови геометричних фігур за допомогою циркуля і лінійки;
- Ознайомитися з математичними аспектами побудови геометричних фігур;
- Дослідити використання на практиці методів побудови геометричних фігур;
- Порівняти інструментарій для створення геометричних фігур;
- Дослідити процес створення навчальних матеріалів, що мають в основі побудову геометричних фігур.

Об'єктом дослідження є процес побудови геометричних фігур.

Предметом дослідження є методи та прийоми побудови геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки.

Під час написання магістерської роботи було використано наступні **методи дослідження**: літературний аналіз (розглянуто публікації та підручники, дослідження наявних матеріалів, що стосуються методів побудови геометричних фігур); експеримент (проведення уроків та лабораторних робіт для вивчення ефективності методів та розуміння труднощів, з якими можуть зіткнутися учні); математичне моделювання (розглянуто процес створення математичних моделей алгоритмів, розробка формул та математичних виразів, які відображають процес побудови геометричних фігур); порівняльний аналіз (визначено переваги та недоліки різних методів, щоб визначити їхню застосовність в конкретних випадках); опитування та інтерв'ю (отримано враження та думки від фахівців та тих, хто вивчає цю тему);

Наукова новизна полягає у впровадженні нових методів, що можуть бути більш ефективними для учнів, та в наданні математичного обґрунтування обраних методів побудови. Дослідження вперше було спрямоване на створення інтерактивних навчальних матеріалів для полегшення засвоєння матеріалу та удосконалення процесу роботи з інструментами.

Окрім того, важливим аспектом є систематизація труднощів, з якими можуть зіткнутися учні, та розробка рекомендацій для подолання цих труднощів.

Психолого-педагогічні аспекти також є об'єктом вивчення, спрямованого на розуміння сприйняття та усвідомлення матеріалу учнями. Крім того, дослідження включає аналіз викликів, пов'язаних з педагогічним процесом та вивченням математики.

Врахування результатів дослідження в практичному плані передбачає розробку рекомендацій для вчителів та методистів, спрямованих на ефективне використання отриманих результатів у навчальному процесі. Ці аспекти створюють основу для подальших досліджень та інновацій у галузі вивчення геометрії.

Практичне значення отриманих результатів полягає в поліпшенні методів викладання геометрії та розвитку навичок учнів у побудові геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки. Розроблені методи та матеріали можуть бути використані в шкільній практиці, підвищуючи ефективність процесу навчання та сприяючи зростанню інтересу учнів до математики.

Отримані результати можуть бути використані для створення інноваційних навчальних програм та електронних ресурсів, що полегшать роботу вчителів та розширять можливості для самостійного навчання учнів. Це також відкриває можливості для використання сучасних технологій та інтерактивних методів викладання, що відповідають потребам сучасного освітнього середовища.

Застосування рекомендацій та педагогічних підходів, розроблених у результаті дослідження, сприятиме покращенню математичної підготовки учнів, розвитку їхнього критичного мислення та творчих здібностей. Такий підхід має потенціал зробити навчання математики більш доступним та цікавим для учнів.

Апробація результатів дослідження...

Структура роботи. Робота складається із вступу, чотирьох розділів, дев'яти підрозділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.

Загальний обсяг роботи складає 69 сторінок, із яких 60 сторінок основного тексту. Список використаних джерел складений із 42 позиції літератури.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ

1.1. Основні теоретичні відомості про побудову геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки

Побудова геометричних фігур є важливою галуззю геометрії, яка вимагає не лише вміння конструювати, але й розуміння принципів та логіки заходів. Задачі на побудову можуть бути як простими, так і складними, і вирішення їх допомагає розвивати аналітичні та творчі навички.

Н. Бугаєць стверджує, що вирішення проблеми побудови складається з чотирьох етапів [6]. На першій фазі аналізу важливо ретельно вивчити стан проблеми та знайти можливі шляхи її вирішення. План креслення, розроблений на другому етапі, повинен бути чітким і логічним. Сам процес побудови – це третя фаза, де важливо дотримуватися встановлених кроків і використовувати правильні інструменти. На четвертому етапі важливим є доведення, де потрібно переконатися, що побудована фігура дійсно відповідає умовам задачі. Це вимагає використання логічних міркувань і математичних методів. Заключний етап дослідження допомагає визначити умови, за яких задача є розв'язною, і може включати в себе аналіз варіацій задачі для різних вхідних даних. Такий підхід до розв'язання задач інженерного проектування не лише розвиває математичні навички, але й заохочує логічне мислення та творчість.

Р. Ульшин та А. Паюк зазначають, що до задач на побудову належать і ті, що розв'язуються за допомогою креслярських інструментів, але найчастіше за допомогою циркуля та лінійки. З давньоєгипетських папірусів відомо, що люди

вміли вирішувати елементарні задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки ще у XX столітті до нашої ери:



Рис. 1.1. Задачі на побудову за допомогою циркуля та лінійки

Складено на основі джерела [34].

Варто зазначити, що найбільшого розквіту розв'язання задач на побудову набуло в школі Піфагора, яка бере свій початок у п'ятому столітті до нашої ери. Піфагорійці розробили низку методів: метод геометричних місць точок, методи перетворення площин, алгебраїчний метод тощо.

Загальновідомим є те, що лінійка використовується для таких конструкцій, як:

- Побудова довільної прямої.
- Прокладання прямої через задану точку.
- Побудова прямої, яка проходить через дві задані точки.
- Циркуль же дозволяє здійснювати наступні конструкції:
- Побудова кола будь-якого радіуса з центром у будь-якій точці.
- Створення кола з даним радіусом та довільним центром.
- Побудова кола з визначеним радіусом і довільним центром.
- Розташування відрізка, що дорівнює заданому, на заданій прямій у визначеному напрямку.

Ми вважаємо, що використання цих інструментів у геометричних побудовах є ключем до розв'язання таких задач, як побудова суми та різниці двох відрізків, поділ відрізка на дві половини, побудова бісектриси кута та інших завдань, що розширюють математичне мислення учнів.

Геометричне тіло – важлива фігура в тривимірному просторі. Ми бачимо різноманітні фігури в нашому оточенні, наприклад, столи, будинки, автомобілі тощо. Фігура стає просторовою, якщо не існує площини, на якій лежать всі точки цієї фігури. У повсякденному житті ми завжди маємо справу з просторовими фігурами [1].

Існують інструменти, які залишають слід на площині (наприклад, олівець, пензлик тощо), але немає такого інструменту, який залишає слід, коли він рухається в просторі. Таким чином, на папері можна зобразити будь-який плаский предмет невеликого розміру, і не виникає питання, як його зобразити. Фігуру, зображення якої отримують на площині, називають оригіналом, а плоску фігуру, яка відтворює оригінал – зображенням.

До просторових геометричних фігур належать так звані геометричні тіла (або просто тіла). За визначенням І. Писішніченка, геометричне тіло – це частина простору, обмежена замкненою поверхнею своєї зовнішньої границі. Геометричне тіло можна розрізнити за його замкненою поверхнею, тобто межею. Всі геометричні тіла поділяються на многогранники та тіла обертання [21].

Іншими словами, геометричне тіло – це частина простору, яку займає фізичне тіло. Слід пам'ятати, що хоча геометрія має справу з відносно простими тілами, більшість реальних тіл, які можуть мати складну форму, можна розглядати (у відповідній абстракції і, звичайно, приблизно) як геометричні тіла. Щоб ввести визначення геометричного тіла, корисно ввести деякі терміни.

В «Українській радянській енциклопедії» зазначається, що окіл точки простору визначається як множина точок у метричному просторі, віддалі яких

від даної точки P менші за певне число. У загальному, окіл – це будь-яка відкрита множина, елементом якої є P [33].

Фігура вважається відкритою (областю), якщо всі її точки лежать всередині неї.

Точка називається граничною для фігури, якщо в одній з її околиць є точки, які належать фігурі, а в іншій - ні. Точка може належати або не належати фігурі. Множина всіх точок границі фігури називається її межею або поверхнею.

Просторова фігура отримує назву «тіло», якщо:

- вона має внутрішні точки;
- її межа належить їй;
- будь-які дві точки фігури можна з'єднати ламаною, всі точки якої, за винятком можливо, кінців, є внутрішніми точками фігури.

Межа тіла також відома як площа його поверхні. Тіло є обмеженим, якщо існує таке натуральне число, що відстань між будь-якими двома його точками менша за це число.

Многогранник – це аналог простого плоского многокутника на площині. Це тривимірна фігура, що складається з багатокутників. Існує лише п'ять особливих многогранників, відомих як правильні многогранники або платонові тіла. Вони були названі на честь одного з найважливіших філософів в історії людства, Платона. Він виявив, що можна утворити тетраедр (чотири грані), куб (шість граней), октаедр (вісім граней), додекаедр (12 граней) або ікосаедр (20 граней), якщо скласти однакові грані правильного многогранника разом [38].

Сторони граней многогранника називаються ребрами, а вершини граней – кутами [27]. Многогранник називається опуклим, якщо він лежить по один бік від площини, якій належить одна з його граней.

Многогранник називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані [19].

Науковці визначають призму як многогранник, у якого дві грані, так звані основи призми, є рівними многокутниками, а інші грані - паралелограмами, кожна з яких має дві сторони, що є відповідними сторонами основ. Грані призми, які не є основами, називаються бічними гранями, а ребра, які не належать основам призми, називаються бічними ребрами [4, с. 22].

Перпендикуляр, опущений з однієї основи призми на іншу, а також довжина цього перпендикуляра називається висотою призми. Призма, основою якої є "n-кутник", називається n-кутною призмою. Призма, бічні ребра якої перпендикулярні до основи, називається прямою призмою. Висота прямої призми дорівнює або довжині бічного ребра, або довжині самого ребра. Призма називається правильною, якщо вона пряма і має правильний прямий кут при основі. Типи призм показані в Додатку А.

Паралелепіпед і куб є особливими типами призм: У паралелепіпеда всі бічні грані – паралелограми; у куба всі бічні грані – рівні квадрати [4, с.22]. Паралелепіпед називається прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. Прямий паралелепіпед, в основі якого лежить прямокутник, називається прямокутним паралелепіпедом. Всі сторони кубоїда – прямокутники.

Піраміда – многогранник, у якого одна грань, основа, є довільним многокутником, а всі інші грані - трикутниками, що мають спільну вершину [4, с. 23].

Піраміда, в основі якої лежить n-вершина, називається n-вершинною пірамідою. Піраміда називається правильною, якщо в її основі лежить правильний многокутник і висота піраміди припадає на центр многокутника (Додаток Б).

Всі типи правильних многогранників були відомі давньогрецьким математикам. Тверді тіла Платона часто використовуються в кристалографії, оскільки більшість кристалів мають форму правильних многогранників.

Наприклад, кухонна сіль утворює кристали кубічної системи, алмаз зазвичай кристалізується у вигляді октаедрів і так далі.

Плоский многокутник або многокутна область – це скінченна частина площини, яка обмежена многокутником [20]. У плоскому многокутнику основними елементами є вершини та сторони, причому кількість вершин завжди дорівнює кількості сторін. У просторовому многограннику аналогом багатокутника є многогранник з вершинами, ребрами та гранями.

Аналізуючи та переглядаючи інформацію про геометричні та математичні поняття, які з'явилися з часів Стародавньої Греції, стає зрозумілим, наскільки важливими були лінійка та циркуль для розв'язання геометричних задач на побудову. За допомогою лінійки можна креслити різноманітні лінії, а за допомогою циркуля - будувати кола та вимірювати відстані. Обидва інструменти сформували світ геометричних фігур. З іншого боку, вивчення просторових форм, таких як геометричні тіла, вказує на важливість їхніх властивостей і застосування. Багатогранники, піраміди та призми стали важливими елементами для розуміння простору і широко використовуються в різних науках, таких як кристалографія та геометрична топологія.

1.2. Методи та процес побудови геометричних фігур

Креслення відіграє вирішальну роль на уроках геометрії, коли йдеться про те, щоб навчити учнів візуалізувати геометричні образи в просторі. Вчитель поєднує викладення теоретичного матеріалу з використанням малюнків для наочного пояснення геометричних понять. Для створення зображень використовуються різні методи, такі як складні креслення в ортогональних проекціях (діаграми), аксонометрія, лінійна перспектива тощо. Варто зазначити,

що О. Баран та В. Дармосюк вважають, що геометрія як наука розглядає широке коло різних типів геометричних задач. Серед цих задач велике значення для практичного застосування мають задачі на побудову зображень геометричних фігур. Методи побудови зображень відіграють особливу роль у конструкторській діяльності, мистецтві, картографії тощо. Залежно від поставленої задачі використовуються різні методи побудови зображень, найвідомішими з яких є наступні:



Рис.1.2. Методи побудови зображень

Складено на основі джерела [2].

Одним з найбільш зрозумілих і простих методів є центральна проекція, оскільки перегляд об'єкта подібний до центральної проекції на сітківці ока. Однак на великих відстанях центральну проекцію можна наблизити до паралельної проекції. У навчальному процесі використовують зображення, створені за допомогою паралельного проектування, оскільки вони наочні і простіші в побудові, але не обов'язково відтворюють точну проекцію оригіналу, а лише схоже зображення. Для ілюстрації використовується проекція оригіналу, в якій елементи не перетинаються, щоб зберегти наочність і якість зображення.

У шкільній практиці часто використовують проекційні малюнки, так звані «вільні зображення». Це зображення, які можна розглядати як невироджену

паралельну проекцію оригіналу або подібної фігури, не вказуючи напрямок проекціювання. Л. Швець стверджує, що для того, щоб вільне зображення було коректним, необхідно дотримуватися низки правил, серед яких такі: трикутник може бути проекцією трикутника, подібного до будь-якого наперед заданого трикутника; якщо відомі зображення трьох неколінеарних точок плоскої фігури, то однозначно визначені зображення всіх інших точок фігур; паралельною проекцією кола є еліпс тощо [37].

Цей тип фігур відіграє визначальну роль на уроках геометрії. З одного боку, вчитель використовує їх на дошці для ілюстрації викладу матеріалу, щоб стимулювати розвиток зорової просторової уяви учнів і пов'язати теоретичні пояснення з практикою. Такий підхід робить навчання більш конкретним і відповідає практичним вимогам курсу.

З іншого боку, друга мета геометрії – розвивати в учнів уміння працювати з просторовими образами і фігурами та розв'язувати задачі, пов'язані з просторовими фігурами – вимагає навчити їх розв'язувати за допомогою конкретних побудов. Такі креслення називаються «кресленнями моделей». Між цими двома типами креслень є принципова різниця. Як зазначає Л. Швець, «картинний малюнок» залишає вчителю свободу вибору зображувальних елементів, тоді як «модельний малюнок» використовується для ефективного розв'язування задач і не допускає довільного вибору потрібних елементів, оскільки вони визначаються заданими умовами [37, с.154].

Існує також три основні вимоги до малюнка. По-перше, малюнок повинен бути правильним, тобто всі елементи повинні бути намальовані з використанням одного і того ж методу проекції. По-друге, він має бути наочним, тобто передавати повне уявлення про оригінал. І, нарешті, третя вимога полягає в тому, що ілюстрація повинна бути простою в побудові, зрозумілою для учнів і не перевантажувати урок.

Оскільки рисунок має бути коректним, тобто побудованим методом проєкцій, то вибір будь-якого методу і застосування його згідно з нарисної геометрії порушує третю вимогу – простоту побудови. Це означає, що такий підхід може ускладнити процес навчання. Порівняння двох підходів показує глибоку різницю, зумовлену третьою вимогою - звільненням процесу виконання зображення від додаткових побудов, що допускають довільність.

Щодо довільності побудови зображень важливо зазначити, що вона не є безмежною. Це пов'язано з тим, що не всі характеристики оригіналу спотворюються під час проєкції, тому їх не можна представляти довільно. Що стосується властивостей проєкції оригіналу, то тут будь-яка довільність виключена. Однак, інакше йде справа з метричними властивостями оригіналу, які можуть бути спотворені під час проєкції. Ці спотворення залежать від вибору проєкційного пристрою і положення оригіналу.

Для зображень, створених за принципами конструювання в рамках педагогічного процесу, вирішальним фактором є умови, яким відповідає оригінал. Ці умови, які завершують зображення, визначають оригінал, проєкційний пристрій і його положення по відношенню до оригіналу.

Поняття правильного зображення тісно пов'язане з поняттям повноти зображення положення, особливо в задачах на побудову, які можна розв'язати лише за умови, що зображення заданих фігур є повним. Зображення призм, циліндрів, пірамід і конусів завжди є повними. Для пірамід і конусів, наприклад, можна вибрати бічне ребро або загальне ребро в напрямку проєкції, що забезпечить повноту зображення цих фігур.

Поняття правильного зображення також пов'язане з його метричним визначенням. Зображення таких фігур, як куби, сфери та інші правильні многогранники, завжди є метрично визначеними. Однак зображення правильних призм і пірамід, а також кругових циліндрів і конусів можуть бути метрично невизначеними.

Тому ми дійшли висновку, що під час розв'язування задач або дослідження теоретичних питань, де потрібна лише візуалізація, доцільно використовувати неповні зображення. Вони дають можливість довільно розміщувати точки, лінії, що перетинаються, та інші елементи фігури. З іншого боку, при використанні повних зображень для розв'язування задач на положення вибір елементів двох фігур, які потрібно намалювати, обмежений.

Важливо також пам'ятати, що повне і метрично невизначене зображення може передбачати вільний вибір визначальних елементів при розв'язуванні метричних задач, спрощуючи процес побудови. Тому умови конкретних задач бажано формулювати в загальних рисах (без числових співвідношень), щоб зображення залишалось метрично невизначеним.

Існує таке поняття, як нарисна геометрія. Нарисна геометрія – це розділ геометрії, який вивчає фігури, що проектуються на площину. До завдань нарисної геометрії входить зображення фігур на площині та розв'язування метричних задач. Для розв'язування задач нарисної геометрії потрібен креслення, на якому спроектовані фігури і позначені всі точки. Нарисна геометрія використовується в таких сферах людської діяльності, як будівництво, архітектура та мистецтво [11]. Після розмежування методів нарисної геометрії та методу, що використовується в навчальному процесі, і визначення вимог до креслення, переходимо до завдання піднавичок у виконанні просторових зображень. Діяльність учня складається з окремих, різнорідних дій, організованих у складну ієрархічну структуру. Серед них особливе місце займають найпростіші дії, які називаються навичками. Дії, що виконуються за допомогою навичок, стають операціями, які входять до складу більш складних дій. Для того, щоб мати можливість виконувати більш складні дії, учень повинен володіти діями, які дозволяють йому застосовувати знання і навички. У загальній психології здатність до оволодіння складною системою розумових і практичних дій, необхідних для доцільної регуляції діяльності, називається умінням.

Ми виходимо з того, що діяльність включає різноманітні дії: пізнавальні, розумові, практичні, а загальне вміння виконувати такі дії включає підвміння, тому можна зробити висновок, що формування вмінь є складним і тривалим процесом. У системі загальної освіти вміння креслити просторові фігури вважається піднавичкою, оскільки є частиною загального вміння розв'язувати стереометричні задачі.

Отже, якщо розглядати вміння зображати стереометричні фігури та їх комбінації як загальне, то воно складається з таких часткових умінь:

1. Аналіз умови: Переведення словесних даних в графічний образ.
2. Виділення суттєвих ознак та властивостей геометричного образу і його числових характеристик.
3. Вибір просторового положення даного образу та його структури задля унаочнення зображення.
4. Побудова зображення просторового образу, за допомогою методу паралельного проєкціювання (косокутного або ортогонального).
5. Позначення на рисунку даних елементів й побудова шуканих елементів в разі необхідності.
6. Побудова базових планіметричних фігур, що є складовими стереометричного зображення, задля полегшення сприйняття й усвідомлення завдання.

Важливо зазначити, що деякі з навичок згодом стають звичними, що значно полегшує виконання побудов. Шоста піднавичка демонструє здатність учнів бачити стереометричний об'єкт з різних позицій, що дозволяє розглядати його з різних точок зору. Це вміння допомагає розбити цілісний просторовий образ на планіметричні підобрази, що спрощує розуміння завдання. Створення таких планіметричних малюнків не завжди є необхідним, але в багатьох випадках доцільно, щоб учні краще розуміли просторове уявлення.

Отже, навчання зображенню стереометричних фігур та їх комбінацій включає кілька етапів, зокрема аналіз умови, визначення суттєвих ознак графічного зображення, вибір просторового положення, побудову зображення та позначення елементів на зображенні. Перші три етапи пов'язані з обробкою геометричних зображень, яка ґрунтується на аналізі та розумінні завдання.

Наступний етап стосується здатності учнів створювати просторові уявлення, що є результатом переходу від формування уявлення про об'єкт до його конкретного зображення на папері. Це відбувається завдяки використанню елементарних побудов, таких як зображення площини, точки, прямої, відрізка, кола, трикутника та чотирикутника.

Важливим аспектом є також розвиток навичок, що базуються на отриманих знаннях. Окремі елементарні побудови трансформуються у навички, щоб їх можна було виконувати легше і краще.

Остання навичка, зазначена шостою, показує важливість сприйняття стереометричного зображення з різних позицій, що полегшує розуміння об'єкта і дозволяє розглядати його з різних точок зору.

Все це свідчить про те, що навчання вмінню зображати стереометричні фігури – складний процес, який включає аналіз, творчість, практичні навички та розвиток просторового мислення.

РОЗДІЛ 2

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ СКЛАДНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ

2.1. Методи побудови круга, еліпса, прямокутника, квадрата, трикутника

Побудова геометричних фігур є важливим етапом у ході вирішення математичних завдань та під час інженерних розрахунків. Для того, щоб ефективно вирішувати завдання, які пов'язані з кругами, еліпсами та прямокутниками, квадратами і трикутниками необхідно оволодіти певними методами їхньої побудови. Наприклад, лінійкою можна намалювати коло, але якщо відомий центр та радіус для окружності. За допомогою циркуля можна провести пряму лінію, тому існує така думка, що пряма задана двома своїми точками [18].

Існує декілька методів для побудови круга за допомогою лінійки та циркуля. Перший метод – це побудова за радіусом. Першим етапом для побудови за радіусом є задати точку, яка стане центром майбутнього круга. Після чого потрібно виміряти заданий радіус за допомогою лінійки та поставити циркуль у початковій точці, а вже після цього проводиться дуга круга зазначеного радіуса.

Існує ще один метод – побудова за допомогою діаметра. Для цього необхідно задати центр круга та виміряти діаметр. Після чого треба встановити циркуль так, щоб його радіус дорівнював половині діаметра та провести дугу.

Круг можна також побудувати за допомогою ще одного методу – побудова за трьома точками. Необхідно задати точки, які лежать на колі або навколо кола.

Проводиться дуга через ці точки за допомогою циркуля, а там, де ці дуги перетинаються є центр круга.

Серед інших методів побудови круга є побудова за допомогою таємничої лінії, коли визначається центр круга та одну точку на колі, або побудова касацією, коли круг будується так, щоб циркуль торкався точки та перетинав коло. Варто зазначити, що кожен з цих методів застосовується у різних завданнях та забезпечує ефективну побудову кругів.

У геометрії існує така фігура як еліпс, яка немає сторін або вершин, як і коло. Але потрібно розуміти, що коло цілком кругле, а еліпс ніби стиснутий. Еліпси бувають великі та малі, одні еліпси можуть бути плоскіші за інші [40].

Для побудови еліпсу використовують також різні методи, один з яких називається способом двох кіл. Для цього необхідно побудувати два концентричних кола, діаметр яких дорівнює великій та малій осям шуканого еліпса.

Існує також ще один метод – це метод трамеля. Необхідно накреслити велику та малу осі під прямим кутом. Потім взяти смужку паперу для трамеля та позначити на ній половину великої та малої осей, які обидві виміряні з одного кінця.

Варто зауважити, що цей метод ґрунтується на різниці між половиною довжини великої та малої осей, і якщо ці осі майже однакові за довжиною, важко позиціонувати перемикач із високим ступенем точності. Можна також використовувати наступний альтернативний метод. Треба намалювати велику та допоміжну осі, але зробити їх довгими у кожному напрямку. Взяти смужку паперу та відмітити половину великої та малої осей на лінії, і нехай цими точками на опорі будуть E, F та G. Треба розташувати трамель на кресленні так, щоб точка G завжди рухалася вздовж лінії, що містить CD; також розмістити точку E уздовж лінії, що містить AB. Для кожного положення трамеля позначити точку F і з'єднати ці точки плавною кривою, щоб отримати необхідний еліпс.

Метод двох фокусів здійснюється наступним чином: треба накреслити велику і малу осі, що перетинаються в точці O . Нехай ці осі будуть AB і CD . З радіусом, що дорівнює половині великої осі AB , варто провести дугу від центру C до перетину AB у точках $F1$ і $F2$. Ці дві точки є фокусами. Для будь-якого еліпса сума відстаней $PF1$ і $PF2$ є константою, де P – будь-яка точка на еліпсі. Сума відстаней дорівнює довжині великої осі. Треба провести перпендикуляр до прямої QPR у точці P , і це буде дотична до еліпса в точці P . Це поширені методи побудови еліпса.

Як визначає Р.Верещак, прямокутник є замкнутою двовимірною фігурою, яка має чотири сторони та чотири прямі кути. Протилежні сторони прямокутника є рівними та паралельними. Оскільки прямокутник є двовимірною формою, то він характеризується двома вимірами: довжиною та шириною. Довжина прямокутника – це довша сторона прямокутника, а ширина – це коротша сторона. Прямокутник, будучи найпоширенішою формою, є частиною нашого повсякденного життя [7].

Властивості прямокутника збігаються з усіма властивостями паралелограма:

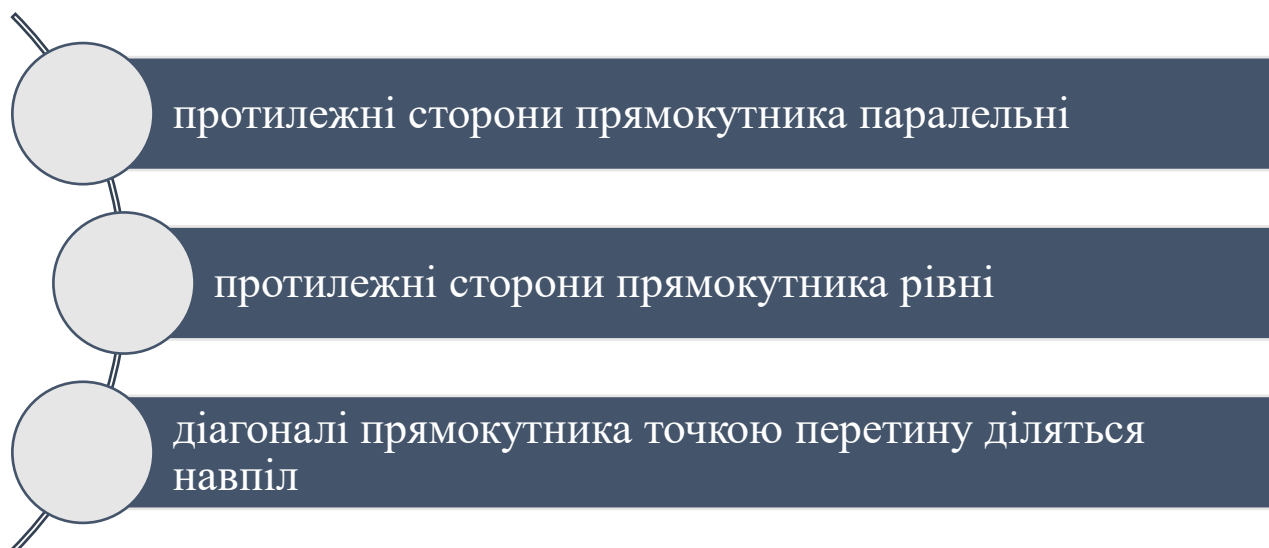


Рис. 2.1. Властивості прямокутника та паралелограма

Складено на основі джерела [7].

Існує три способи побудови прямокутника в залежності від відомого параметра побудови. Побудувати унікальний прямокутник можна, якщо:

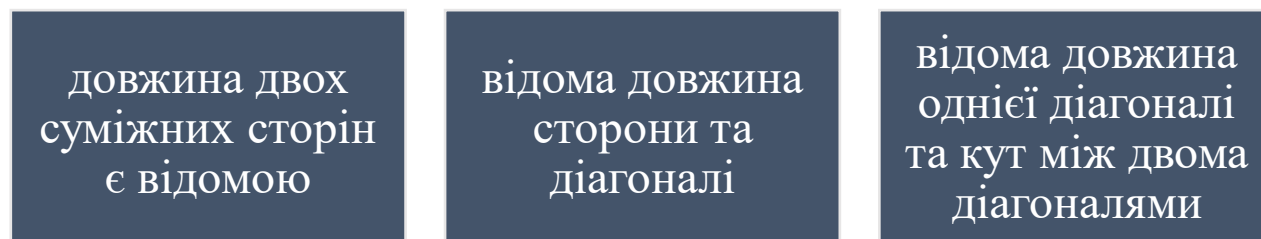


Рис.2.2. Умови побудування прямокутника

Якщо відома довжина двох суміжних сторін прямокутника, можна скористатися наступним методом побудови: задати довжини сторін, позначити довжину однієї сторони як «а», іншої суміжної сторони як «b». Таким чином побудувати перший відрізок. За допомогою лінійки та олівця відкласти відрізок довжиною «а» вздовж прямої лінії. Уздовж одного з кінців цього відрізка побудувати пряму взаємно перпендикулярну до першої лінії. Довжина цього відрізка повинна дорівнювати «b». І після цього варто провести відрізок для завершення прямокутника. Необхідно з'єднати кінці цього відрізка з іншими кінцями першого відрізка. Отриманий чотирикутник буде прямокутником із сторонами «а» та «b». Цей метод гарантує побудову прямокутника, якщо відомі довжини двох суміжних сторін.

Другий метод побудови можна використовувати у тому випадку, коли відома довжина однієї сторони і діагоналі. Спочатку потрібно відобразити одну сторону таким чином: за допомогою лінійки відкласти відрізок довжиною «а». Після цього побудувати половину діагоналі. Далі треба знайти середню точку цього відрізка і побудувати відрізок, який є половиною діагоналі і вже тоді провести діагональ. З'єднати кінці відрізка діагоналлю прямокутника. Цей метод

дозволяє побудувати прямокутник, враховуючи відому довжину сторони та діагоналі.

Коли відома довжина однієї діагоналі та кут між двома діагоналями то можна використати третій метод побудови. На початку треба побудувати одну діагональ. За допомогою лінійки відобразити довжину однієї діагоналі. Потім побудувати кут. Від точки одного кінця діагоналі відкласти відрізок під кутом, який нам відомий. Після цього побудувати другу діагональ. З'єднати кінці першої діагоналі з кінцями відрізка, що представляє кут. І після цього завершити прямокутник. Цей метод дозволяє побудувати прямокутник за відомою довжиною однієї діагоналі та кутом між двома діагоналями.

Квадрат – це чотирикутник, який має усі чотири сторони та кути однаковими. квадрати відрізняються між собою лише довжиною сторони, але усі чотири кути у них є прямими та дорівнюють 90° . Серед основних властивостей квадрату є те, що квадрат також може бути паралелограм, ромбом або прямокутником, якщо вони мають однакові довжини діагоналей, сторін та однакові кути. Також можна виділити такі властивості: всі чотири сторони квадрата мають однакову довжину; протилежні сторони квадрата паралельні; всі чотири кути квадрата прямі; сума кутів квадрата дорівнює 360° ; діагоналі квадрата мають однакої довжини [14].

Існує кілька методів побудови квадрата. Розглянемо декілька базових методів:

1. Метод за допомогою циркуля та лінійки. Задаючи довжину однієї сторони квадрата та використовуючи циркуль, можна легко побудувати круг, використовуючи кінець сторони як центр. Точка перетину цього круга з відрізком визначає край квадрата. Відомо, що внутрішні кути квадрата під прямим кутом або дорівнюють 90 градусам. Отже, інші вимірювання для побудови квадрата не є необхідними та важливими. Вимірювання довжини всіх чотирьох сторін квадрата, рівних і перпендикулярних одна одній.

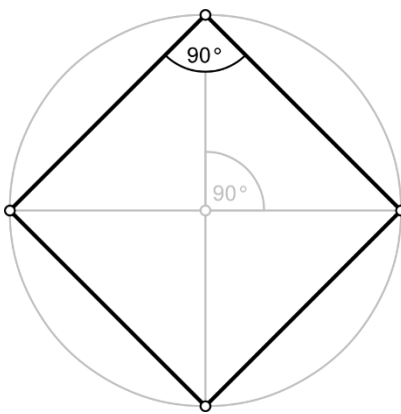


Рис. 2.1. Метод побудови квадрата за допомогою циркуля та лінійки

2. Метод побудови за допомогою діагоналей. Зображуючи будь-яку діагональ квадрата та проводячи перпендикуляр через кінець діагоналі, можна визначити один із кутів квадрата, де цей перпендикуляр перетинає діагональ.

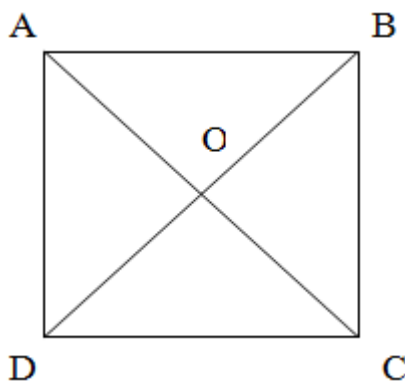


Рис. 2.2. Методи побудови квадрата за допомогою циркуля та лінійки

3. Метод за допомогою кута в 45 градусів. Задаючи відрізок та проводячи лінію під кутом 45 градусів до нього, точка перетину цієї лінії з відрізком визначить один із кутів квадрата.

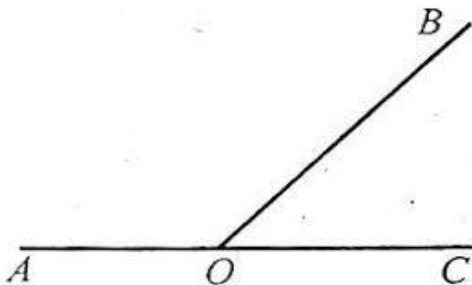


Рис. 2.3. Методи побудови за допомогою кута в 45°

4. Метод за допомогою трикутників. Створюючи прямокутний трикутник, де одна сторона – сторона квадрата, а інші дві – його діагоналі, знаходження точки перетину діагоналей прямокутного трикутника визначає кут квадрата.

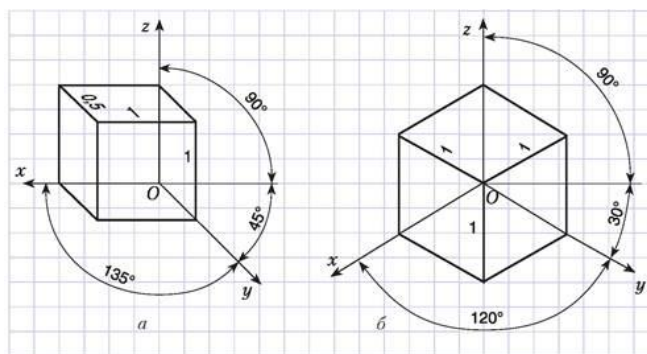


Рис. 2.4. Метод побудови за допомогою трикутників

Складено на основі джерела [13].

Ми можемо зробити висновок, що ці методи надають гнучкості у побудові квадрата в різних умовах та геометричних задачах. За допомогою даних методів можна побудувати фігуру квадрату у різних умовах та різними способами.

Розглянемо таку фігуру як трикутник. Трикутник – це геометрична фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і відрізків, які з'єднують ці точки. Точки називають вершинами трикутника, а відрізки – його сторонами [30].

Існують такі види трикутників:

- рівносторонні трикутники – трикутник називається рівностороннім, якщо усі його сторони мають однакову довжину;
- рівнобедрені трикутники – трикутник називається рівнобедреним, якщо дві його сторони мають однакову довжину;
- прямокутні трикутники – трикутник називається прямокутним, якщо один з його кутів прямий, тобто 90° ;

– різносторонні трикутники – це трикутник, який має сторони з різними довжинами та жоден з кутів не є прямим [42].

Існує кілька методів побудови трикутників.

1. Побудова за трьома сторонами. Для побудови трикутника за трьома сторонами задаються три відрізки. Перевіряється певна умова трикутника: кожна пара сторін повинна мати сумарну довжину більше третьої сторони. Якщо умова виконується, тоді з'єднуються кінці відрізків лініями і отримується трикутник. Цей метод дозволяє однозначно визначити трикутник за його сторонами. Якщо умова не виконується, трикутник неможливо побудувати.

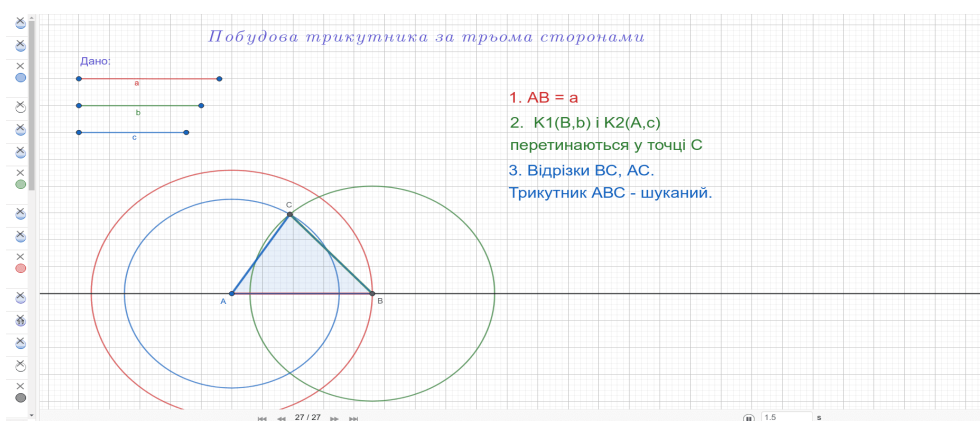


Рис. 2.5. Побудова трикутника за трьома сторонами

Складено на основі джерела [23].

2. Побудова за двома сторонами та кутом. В такому випадку задаються дві сторони та вимірюється кут між ними. Перша сторона розташовується на площині, а друга сторона відкладається, враховуючи виміряний кут. Третя сторона будується між кінцями першої та другої сторін, з'єднуючи їх. Цей метод дозволяє побудувати трикутник за довільною парою сторін, а також кута між ними. Треба враховувати той факт, що іноді може існувати два різні трикутники з однаковими сторонами та кутами.

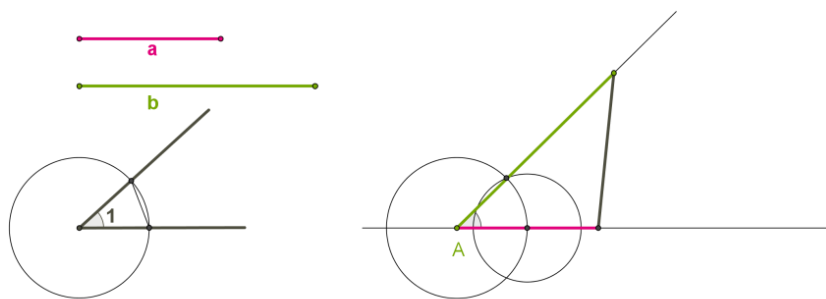


Рис. 2.6. Побудова трикутника за двома сторонами та кутом

Складено на основі джерела [24].

3. Побудова за двома кутами та стороною. Задаються два кути та одна сторона. Один кінець цієї сторони використовується як вершина першого кута, а інший кінець – як вершина другого кута. Задається дуга від кожної вершини на площині, область перетину яких визначає третю вершину трикутника. Третя сторона будується між точками перетину цих дуг. Цей метод дозволяє побудувати трикутник за допомогою двох кутів та однією стороною:

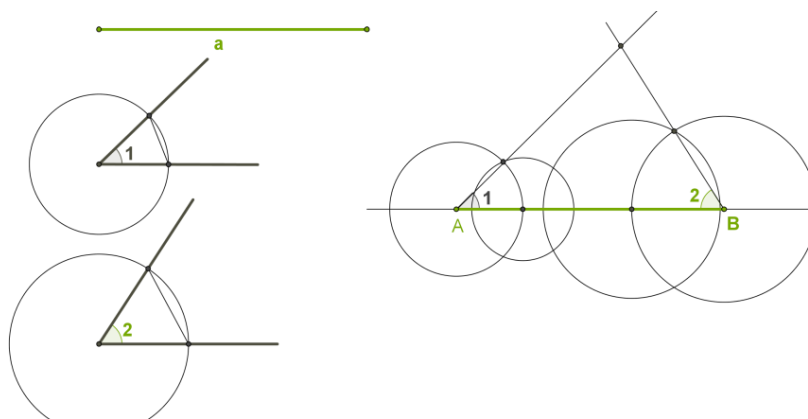


Рис. 2.7. Побудова трикутника за двома кутами та стороною

Складено на основі джерела [24].

Ми можемо зробити висновок, що методи побудови геометричних фігур є основними інструментами для конструювання різноманітних фігур та об'єктів у геометрії. Вони містять у собі різні підходи, такі як побудова за сторонами, кутами, діагоналями, радіусами тощо. Використовуючи дані методи ми можемо вирішувати різноманітні геометричні завдання та створювати складні конструкції.

2.2. Приклади побудов геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки

В геометрії існує таке поняття «евклідова побудова», що трактується як побудова фігур за допомогою лінійки та циркуля. Це поняття ввів видатний вчений Евклід. Для нього знайти площу або об'єм означало побудувати циркулем і лінійкою квадрат чи куб потрібної площі або ж об'єму. Евклід є автором книг «Начал», які присвячені геометрії на площині, і в них вивчаються основні властивості прямолінійних фігур та кіл. Евклідом було визначено п'ять постулатів:

- 1) від усякої точки до всякої точки можна провести пряму лінію;
- 2) обмежену пряму можна безперервно продовжити по прямій;
- 3) з усякого центру і всяким розхилом може бути описаний круг;
- 4) всі прямі кути рівні між собою;
- 5) якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні і по одну сторону кути, менше двох прямих, то продовжені необмежено ці дві прямі зустрінуться з тієї сторони, де кути менше двох прямих [31].

Ідеалізована лінійка, або просто лінійка, має нескінченну довжину та лише одне ребро, лишаючись без будь-яких поділок. Циркуль, у свою чергу, не має обмежень на радіус і може «згортатися» під час підняття зі сторінки. Ці конструкції відповідають першим трьом постулатам елементів Евкліда. Важливо враховувати, що ця методика передбачає обмеження, зокрема, циркуль, який не згортається, прилягає до лінійки, що може здатися еквівалентом маркування.

Спроби розв'язати старі геометричні задачі за допомогою лінійки та циркуля були обмеженими. Гаусс показав, що хоча деякі багатокутники можна побудувати, більшість задач, таких як поділ будь-якого кута на три рівні частини або подвоєння об'єму куба, не можна розв'язати за допомогою звичайних

евклідових побудов. Багато з цих задач стають розв'язними, коли допускаються інші геометричні перетворення.

З іншої точки зору, довжина є конструктивною, якщо вона представляє певне конструктивне число, а кут є конструктивним, якщо його косинус є конструктивним числом. Конструктивні числа можна виразити за допомогою чотирьох основних арифметичних дій і вилучення квадратних коренів, але не за допомогою коренів вищих порядків.

Накреслені лінії та кола характеризуються нескінченною точністю та нульовою шириною. Справжні циркулі не можна згорнути, і сучасні геометричні конструкції часто використовують цю властивість. «Складний циркуль» може здаватися менш потужним інструментом, але він зберігає свою силу відповідно до теореми про еквівалентність циркуля. Навіть якщо ця теорема правильна, її доведення має складну і довгу історію.

Важливо, щоб кожна конструкція була математично точною, і будь-яка оцінка відстаней або використання відміток лінійки є неприйнятною. Будь-яка конструкція повинна бути повною, тобто мати скінченну кількість кроків, а не просто наближатися до межі незбалансованими наближеннями. Якщо розрахунок має скінченну кількість кроків, це гарантує точність розв'язку і дозволяє уникнути нескінченних послідовностей, які можуть виникнути при необмеженій кількості кроків.

З вище сказаного можна зробити висновок, що конструкції лінійки та циркуля є більше інтелектуальним завданням, аніж серйозною практичною задачею. Проте такі обмеження ставляться для того, щоб доказати, що всі конструкції можна точно довести

Всі конструкції лінійки та циркуля базуються на повторному використанні п'яти основних етапів, які включають створення точок, ліній і кіл. Ці етапи визначаються наступним чином:

- Побудова прямої через дві точки. Починаючи з двох різних точок, можна побудувати пряму, яка їх з'єднує.
- Створення кола, що містить одну точку і має центр в іншій точці. Цей етап дозволяє створити коло, визначаючи його центр та точку, яка лежить на колі.
- Створення точки на перетині двох (непаралельних) прямих. З'єднавши дві непаралельні прямі, отримуємо точку їх перетину.
- Створення однієї або двох точок на перетині прямої та кола (якщо вони перетинаються). Цей етап включає в себе визначення точок, де пряма і коло перетинаються.
- Створення однієї або двох точок на перетині двох кіл (якщо вони перетинаються). Тут визначаються точки, де перетинаються два кола.

Починаючи з обмеженого набору точок і ліній, можна застосовувати ці п'ять етапів для побудови складних геометричних фігур. Геометрія, розглядаючи цей підхід, еквівалентна аксіоматична алгебра, де геометричні елементи замінені символами. Цей підхід, можливо, сприяв відкриттю Гауссом неможливості деяких геометричних конструкцій, і тільки згодом Гільберт встановив повний набір аксіом для геометрії.

І.Ленчук та М.Працьовитий зазначають, що в евклідовій геометрії синтезується інтуїтивність сприйняття об'єктів та чітка логіка міркувань. Вона поєднує у собі дві протилежності у математиці: інтуїтивізм бачення фігур та логізм у пошуку зв'язків між їх елементами [17].

С.Драганюк та О.Синюкова розглядають геометрію тривимірного евклідового простору у вигляді сконструйованої згідно визначених вимог аксіоматичної теорії, виокремлюючи у межах цієї теорії елементарну геометрію як її конструктивну складову [12].

Еквівалентно (і без необхідності довільно вибирати дві точки) можна визначити, що для будь-якої обраної орієнтації множина точок визначає

комплексні відношення за різницями між будь-якими двома парами точок. Множина відношень, які можна побудувати за допомогою лінійки та циркуля з цієї множини, є саме тим найменшим полем, що містить вихідні відношення і є замкненим відносно комплексного спряження та квадратного кореня.

Давні греки поділяли побудови на три основні категорії відповідно до складності інструментів, необхідних для їх розв'язування. Якщо конструкція вимагала лише лінійки та циркуля, її називали плоскою; якщо ж вона вимагала також конічних розрізів (за винятком кола), їй надавали статус твердої; до третьої категорії відносили всі конструкції, які не вписувалися в жодну з попередніх двох категорій. Така категоризація гармонійно відображає алгебраїчний підхід до цих питань. Комплексне число, яке можна виразити лише за допомогою операцій над полем і квадратним коренем (як описано вище), є плоскою конструкцією. Комплексне число, яке також передбачає вилучення кубічних коренів, має тверду конструкцію.

Мовою алгебри комплексне число, що є плоским, має ступінь двійки та входить у розширення поля, яке розкладається на вежу полів, де кожне розширення має ступінь два. Комплексне число, яке має тверду конструкцію, має ступінь із простими множниками два та три і входить у розширення поля, що знаходиться на вершині вежі полів, де кожне розширення має ступінь 2 або 3.

Точка вважається маючи міцну конструкцію, якщо можна побудувати за допомогою лінійки, циркуля та, можливо, гіпотетичного інструменту для малювання конічної форми, який здатний намалювати будь-яку конічну криву із заданим фокусом. Часто той самий набір точок може бути побудований за допомогою меншого числа інструментів. Наприклад, використовуючи циркуль, лінійку та аркуш паперу із параболою $y=x^2$ та точками $(0,0)$ і $(1,0)$, можна побудувати будь-яке комплексне число, яке має тверду структуру. Так само, інструмент, який може малювати будь-який еліпс із визначеними фокусами та

великою віссю (наприклад, дві шпильки та мотузка), є таким самим потужним [22].

Стародавні греки визнавали, що подвоєння куба і поділ будь-якого кута на три рівні частини є міцною конструкцією. Архімед ввів тверду структуру прямокутного 7-кутного трикутника. Але квадрат кола не має твердої структури. Що, якби, крім лінійки і циркуля, існував інструмент, за допомогою якого можна було б розділити будь-який кут на три частини? Такі побудови вважаються твердими, але існують фігури з твердими побудовами, які не можна побудувати за допомогою такого інструменту. Наприклад, за допомогою такого інструменту неможливо подвоїти куб. З іншого боку, будь-який правильний n -кутник із суцільною конструкцією можна побудувати за допомогою такого інструменту.

Між кутами, які можна побудувати, і точками, які можна побудувати на будь-якому побудовному колі, існує бієкція. Кути, які можна побудувати, утворюють абелеву групу при додаванні за модулем 2π (що відповідає множенню точок на одиничному колі, які розглядаються як комплексні числа). Кути, які можна побудувати, це саме ті кути, чий тангенс (або, що еквівалентно, синус або косинус) можна побудувати як число. Група конструктивних кутів замикається відносно операції ділення кутів навпіл (що відповідає витягуванню квадратного кореня з комплексних чисел). Єдині кути скінченного порядку, які можна побудувати, починаючи з двох точок, це ті, порядок яких є або степенем двійки, або добутком степеня двійки та набору різних простих чисел Ферма. Крім того, існує щільний набір конструктивних кутів нескінченного порядку.

Теорія орігамі в математиці виявляється потужнішою, ніж традиційні конструкції з лінійки та циркуля. Складки, які задовольняють аксіоми Хузіта-Хаторі, здатні побудувати той самий набір точок, який можна отримати за допомогою більш складних конструкцій з використанням циркуля та інструменту для малювання конічної форми. Отже, орігамі може бути використане для розв'язання кубічних рівнянь та вирішення інших математичних задач.

З історії математики ми знаємо, що Архімед, Нікомед та Аполлоній використовували побудови за допомогою вимірювальної лінійки. Наприклад, вони могли взяти відрізок, дві прямі (або кола) і точку, а потім провести пряму, яка проходить через точку і перетинає дві прямі так, щоб відстань між точками перетину дорівнювала відрізку. Греки називали це «neusis» («нахил», «тенденція» або «перехід»). Ці методи використовували для розв'язування різних геометричних задач, наприклад, потрійного ділення Архімеда.

За допомогою розмічальної лінійки можна розділити будь-який кут на три частини або витягти кубічний корінь, що дозволяє візуалізувати відстані, які є розв'язками кубічних або квартільних рівнянь. Крім того, можна будувати правильні багатокутники з фіксованою структурою, такі як семикутник, як показали Джон Х. Конвей і Річард К. Гай.

Конструкція Нейсе виявляється потужнішою, ніж інструмент для малювання конічних фігур, оскільки дозволяє будувати складні фігури, які не мають твердих конструкцій. Цей інструмент навіть здатен розв'язувати деякі квінти, на відміну від радикалів. Наприклад, за допомогою побудови Нейзіса можна розв'язувати рівняння, які не мають аналітичних розв'язків з коренями.

Підсумовуючи, можна сказати, що лінійка і циркуль є потужними інструментами для геометричних побудов, навіть якщо вони мають свої обмеження. Деякі прості фігури, такі як відрізки, лінії, кола та певні багатокутники, легко накреслити за допомогою цих інструментів. Однак для складніших завдань, таких як побудова кубічних коренів або інших складних геометричних об'єктів, ці інструменти можуть бути непридатними.

Важливо пам'ятати, що на додаток до основних геометричних методів, таких як малювання ліній або кіл, існують також більш складні техніки, такі як використання конічних форм, вимірювальної лінійки або техніки орігамі та нейсіс. Ці методи розширюють можливості геометричних побудов і дозволяють розв'язувати складніші математичні задачі.

Таким чином, хоча циркуль та лінійка залишаються важливими інструментами у вивченні геометрії, розвиток додаткових методів і концепцій дозволяє вирішувати більше різноманітних завдань у світі геометричних конструкцій.

2.3. Основні помилки під час побудов геометричних фігур та способи їх уникнення

Вивчення математики вважається дуже важливою базовою освітою, оскільки навички математичних розрахунків використовуються в усіх сферах життя. За допомогою математики учні можуть навчитися мислити логічно, критично, творчо та послідовно. Метою викладання математики є розвиток в учнів навичок розв'язання проблем та заохочення високого рівня зацікавленості та мотивації до математики. Оскільки математичні навички можна використовувати для вирішення повсякденних проблем, розв'язування задач відіграє важливу роль у вивченні математики. Математика викладається на всіх рівнях освіти.

Математика, що вивчається на початковому рівні, включає арифметику, алгебру, геометрію, тригонометрію та статистику. Математичний аспект геометрії стосується вивчення різних форм. Геометрія не тільки розвиває пізнавальні здібності учнів, а й формує мислення від конкретного до абстрактного. Геометрія допомагає учням аналізувати та інтерпретувати світ, а також озброює їх інструментами, які можна застосовувати в інших математичних галузях.

Геометричний матеріал є одним із важких для учнів, адже вони повинні володіти здатністю візуалізувати, описувати зображення, малювати фігури та пізнавати форми. Вивчення геометрії не тільки включає в себе визначення, але й

аналіз геометричних властивостей двох вимірів (2D) і трьох вимірів (3D), а також розвиває геометричні зв'язки для визначення розташування, застосування трансформації, використання симетрії, візуалізації, просторового мислення та геометричного моделювання розв'язувати задачі.

Н.Богатинська зазначає, що навчити учнів розв'язувати математичні задачі, зокрема геометричні, було та є одним із важливих завдань навчання математики. Дослідження викладання геометрії у середній школі свідчить про те, що учні не можуть самостійно обирати знання для розв'язання стереометричної задачі [5].

Для того, щоб визначити, як студенти розуміють вирішення проблеми, слід проводити роботу над виявленням помилок. В такому випадку, учні легше оволодівають навичками з геометричної науки, коли розуміють та знають свої помилки під час розв'язування задачі. Найчастіше спостерігаються саме помилки у розумінні змісту задачі.

Помилки учнів у розв'язуванні геометричних задач описуються за допомогою аналізу помилок Ньюмена. Процедура Ньюмена є кроком у розумінні та аналізі того, як учні вирішують проблеми. Ідентифікація помилок учнів потрібна як орієнтир у виборі відповідних моделей навчання та медіа на основі просторового інтелекту учнів на геометричному матеріалі. Учні не усвідомлюють допущених помилок, адже вони не знають місця помилки, тому не можуть поміркувати, щоб виправити ті помилки, які були зроблені.

Помилки завжди зустрічаються, в тому числі і при вивченні математики. Середнім значенням математичної помилки є відхилення від реального рішення. Помилки аналізуються на основі розв'язання проблем учнями та відповідей на запитання співбесіди. Результати тестування та співбесід із суцільними геометричними матеріалами (кубами, прямокутними паралелепіпедами, призмами та пірамідами) показують, що учні допускають декілька типів помилок. Перша помилка, яку слід визначити, це помилка читання. Помилки читання

включають помилки учнів у читанні та пошуку ключових слів або символів, про які йдеться.

Ще одна помилка, яку необхідно відмітити – це помилка розуміння. Помилки розуміння включають помилки, які виникають, коли учні можуть прочитати всі слова в питанні, але не розуміють значення використаного терміну, тому не можуть продовжувати правильно розв'язувати задачу.

Наступний тип помилки, який слід визначити, це помилка навичок процесу. Такі помилки виникають, коли учень може визначити послідовність операцій, необхідних для вирішення проблеми, але не використовує процедуру правильно. Більшість помилок виникає тому, що учні допускають помилки в процедурі обчислення. Навички учнів у менш математичних обчисленнях змушують учнів робити помилки в типі помилок навичок процесу.

Помилка кодування є останнім типом помилки. Вони включають помилки, які розкривають рішення задачі в письмовій формі. Учні неправильно визначають відповідь.

Ми можемо зробити такий висновок, що учням вкрай необхідно знати, яких помилок вони припускаються під час розв'язування задач з геометрії, щоб вони могли подумати про них і виправити їх.

РОЗДІЛ 3

ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ПОБУДОВИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ

3.1. Застосування побудов геометричних фігур у геометрії, архітектурі, мистецтві тощо

Геометрія вважається однією з найдавніших наук. Ця галузь розглядає геометричні фігури та їхні властивості як на площинах, так і в просторах. Під цією наукою розуміють розділ математики, який займається вивченням властивостей різних фігур на площині та у просторі. Саме слово «геометрія» з давньогрецької мови означає «вимірювання землі», тобто будь-яких реальних або уявних об'єктів, які мають кінцеву довжину вздовж хоча б однієї з трьох осей координат, піддаються вивченню даної науки [39].

Люди використовували геометричні знання у своєму повсякденному житті з давніх-давен. Геометричні фігури були не лише предметами побуту, а й культурними артефактами. Геометрія – це наука, яка дозволила людям визначати поверхні та об'єми, а також правильно креслити проекти будівель і машин. Тому вона є найважливішою частиною «фундаменту», на якому будується не менш важлива сфера людської діяльності – архітектура. Архітектура є поєднанням мистецтва, науки та виробництва [10].

Геометрія була присутня в архітектурі з самого її початку. У цьому контексті в класичній архітектурі – від Стародавньої Греції та Риму – вона набуває власної мови та стилю, коли елементи пов'язані один з одним, а геометричні форми створюють гармонію та пропорції в будівлях.

У геометричній архітектурі різні елементи та дизайни створюються простими та специфічними штрихами. Правильна інтерпретація використання геометрії в архітектурі спрощує розрахунок структурного навантаження, а також враховує його зв'язок з логікою будівництва.

Н.Шаповалова зазначає, що, наприклад, в орнаменті застосовується ритмічний повтор (лінійний і центричний), дзеркальна симетрія (дзеркальна симетрія і/або поворот), накладання декількох елементів (створення сітки) геометричних фігур, сполучень та закономірних кривих. Основою для побудови орнаменту є геометричні побудови, а тематика може бути різною, як технічною, так і рослинною [36].

Є аспекти, пов'язані з геометрією, які безпосередньо впливають на архітектурну практику. До найважливіших відносять:

- *Модульність* [16, с.13]

Коли проектується будь-який архітектурний твір, є модулі, схожі на інші, щоб підсилити конструкцію гармонією, симетрією та пластичністю. Модульність також спрощує будівництво в цілому.

- *Багатокутні та круглі форми* [16, с.20]

Багатокутні фігури складаються з частини поверхні, що містить кілька точок, вирівняних у площині, так що жодна з сполучних ліній не проходить через більше ніж дві з них одночасно. Наприклад, дверні та віконні рами. Вони являють собою прямокутники або квадрати, які обертаються на 180 градусів, коли їх відкривають.

- *Геометричне зображення.* [9]

Відображення геометричних форм здебільшого виконується спеціальним програмним забезпеченням з дотриманням симетрії, куди вводяться дані та, якщо необхідно, проводяться відповідні розрахунки для виконання архітектурних робіт. Також відзначаємо, що симетрія в архітектурі фактично має на увазі «єдину концепцію»/

- *Структурний нахил.*

Геометричні ресурси, доступні сьогодні, дозволяють розробити методи вертикального розрахунку для роботи зі збільшенням висоти багатьох будівель або житла.

- *Гіперболоїди [15, с. 31].*

Гіперболоїд виходить обертанням гіперболи навколо однієї з осей симетрії. Ця геометрична форма часто використовується для виготовлення колон, димоходів і світлових входів з великою площею поверхні.

- *Коноїдальні та циліндричні форми. [35]*

Якщо візуалізувати гвинтові сходи, можна побачити коноїдну геометричну форму, що міститься в ній, вона також використовується в колонах, тунелях або димоходах.

- *Вигини і дуги.*

Вигини і дуги також використовуються у вікнах і дверях. Півкола, еліптичні, параболічні тощо. Існує багато геометричних форм, які використовуються для створення арок і кривих і за допомогою яких досягаються підковоподібні форми, пелюстки, арки тощо.

- *Багатогранні форми. [26]*

Багатогранники, які найчастіше використовуються в архітектурі, це куби та октаедри. Застосування цих форм в архітектурі характеризуються досягненням пропорційних і гармонійних просторів, отриманням функціонально зручних і стійких просторів, які також сприяють їх інтеграції з іншими просторами в будівлі.

У минулому вважалося, що дотримання суворих геометричних правил є ключем до створення найгарнішої будівлі. У XX столітті до нашої ери римський архітектор Марк Вітрувій написав десять книг про архітектуру, в яких пояснював «ідеальні» пропорції будівлі на основі пропорцій людського тіла.

Через 1500 років його роботи були заново відкриті вченими епохи Відродження, такими як Леонардо да Вінчі (який показав їх у своєму малюнку Вітрувіанської людини) та Леон Баттіста Альберті (який написав власну версію «Десяти книг про архітектуру»).

Серед принципів, які розробив Альберті, було те, що проектування релігійних споруд завжди має починатися з кола, оскільки це «досконала» форма, яку може створити лише Бог, і що взаємозв'язок між елементами має зберігатися впродовж усієї будівлі. Ці ідеї пережили століття, а деякі з них рідко ставляться під сумнів і на сьогодні.

Сучасні архітектори використовують геометрію в способі «біоморфних» геометричних форм, тобто копіювання форм, які зустрічаються в природному світі. Звичайно, Вітрувій та його послідовники певною мірою робили це, коли використовували пропорції людського тіла [25]. Але сучасні архітектори також дивляться на тварин і рослини, черпаючи натхнення з шестикутників сот (як у музеї Сумайя, Мехіко) або бульбашок на поверхні води (як Національний плавальний центр, Пекін). Природна геометрія включає такі шаблони, як симетрія, спіралі, тесселяції та фрактали.

З одного боку, геометрія обмежує можливості архітекторів. Наприклад, міські будівлі зазвичай будують перпендикулярно до землі, не тільки тому, що це робить їх більш стійкими, але й тому, що це дозволяє створити більш щільне планування. Геометрія, з іншого боку, дає архітекторам інструменти для роботи. Форми можна комбінувати нескінченною кількістю способів, що дозволяє архітекторам будувати будівлі, використовуючи квадрати і куби в якості будівельних блоків.

Візьмемо, наприклад, трикутник. Він вважається найміцнішою формою і тому є гарною відправною точкою для проектування. Він з'являється всюди як основний композиційний елемент, від великих пірамід Гізи до Ейфелевої вежі, яка не тільки трикутна, але й складається з менших залізних трикутників.

Архітектура без геометрії була б неможливою. Будівлі руйнувалися б, якби були неправильно розраховані. Однак найбільш інноваційні сучасні будівлі базуються саме на «новій геометрії». Проекційна геометрія, наприклад, має місце у «спроектованому», а не евклідовому просторі, тоді як фрактальна геометрія базується на ієрархіях, що існують у природі, таких як ієрархія черепашки наутилуса або броколі по-романськи [29].

Кількість геометричних фігур, які регулярно використовуються в архітектурі, насправді дуже мала. Багато з них досить непрактичні, коли йдеться про будівництво - за винятком трикутників, квадратів/прямокутників і кіл.

Як вже згадувалося вище, трикутник є «найсильнішою» формою, тому що його неможливо спотворити. Прямокутник стане паралелограмом, якщо на нього досить сильно натиснути, але трикутник завжди зберігає свою форму. Ось чому його так часто використовують у мостах, дахах і опорах електропередач, обвал яких був би катастрофічним.

Квадрати та прямокутники також вважаються практичними формами для архітектури. Їх легко побудувати зі звичайних будівельних матеріалів, таких як метал і бетон; їх прямі кути забезпечують міцність і надійність; і вони просто поєднуються один з одним, зменшуючи витрати та відходи. Також легко збільшити або зменшити масштаб квадрата чи прямокутника, чого не можна сказати про складніші багатокутники.

Що стосується кіл, не слід думати, що вони рідко використовуються в проектуванні. Вони добре працюють у екологічній архітектурі з кількох причин (наприклад, загалом потрібно менше матеріалу; вони дозволяють вітру легше обтікати їх), і вони майже такі ж міцні, як трикутники, оскільки напруга рівномірно розподіляється по всій формі. Однак з колами набагато важче працювати.

Традиційно геометричні фігури визначалися як ті, які можна побудувати за допомогою евклідової геометрії: квадрати, трикутники, конуси, призми тощо. Їх

протиставляли органічним формам, які вважалися складними та нерегулярними. Але нова геометрія почала надавати сенсу очевидному хаосу природи. Деякі люди навіть вірять в ідею «сакральної геометрії» – що все в природі, від листка до галактики, має свій власний геометричний малюнок. Проблема лише в тому, що люди не розуміють їх усіх, тому дотримуються практичних речей, таких як прямокутники.

Тому, не дивно, що геометричні форми та візерунки вплинули на мистецтво та дизайн. Від ісламського мистецтва до руху Баугауз, кубізму, ар-деко та інших, геометричні візерунки завжди відігравали й продовжуватимуть відігравати ключову роль у дизайні [3].

Геометричні візерунки походять із геометрії, яка вивчає форми та зв'язки між лініями та поверхнями в математиці. Візерунок визначається як «декоративний малюнок, що повторюється».

У графічному дизайні форми та лінії завжди використовуються в геометричних візерунках для створення оригінальних та привабливих дизайнів. Будь-що, від простої форми до складного цифрового візерунка, може бути використано для створення привабливого візуального контенту.

Геометричні візерунки чудово підходять для дизайну, оскільки вони природно привертають людське око. Поєднуючи геометричні візерунки з цікавими кольоровими схемами, ви можете створювати захопливий візуальний контент, який використовує психологію форми та мистецтва.

Психологія є невід'ємною частиною маркетингу та дизайну, від формулювань до кольорів та зображень. Усе це відіграє роль у тому, як це впливає на споживачів. Психологія форми стосується впливу певних форм на людей. Використовуючи психологію форми, графічні дизайнери можуть свідомо вибирати форми, навколо яких вони хочуть створити візерунок, щоб надіслати певне повідомлення. Розуміючи та використовуючи психологію форми,

дизайнери можуть створювати користувацькі інтерфейси та успішні фірмові стилі.

Знання психологічної асоціації та загального значення кожної основної форми є життєво важливими, оскільки дає можливість дізнатися смаки споживача. Основні асоціації з кожною основною формою наводимо нижче.

- Квадрати і прямокутники. Вони символізують надійність, стабільність, структуру та порядок. Вони часто асоціюються з будівлями, символізуючи авторитет, силу та безпеку.
- Круги. Округлі та вигнуті форми м'якіші та символізують завершеність, цілісність, гармонію, креативність, спільноту та жіночність.
- Трикутники. Трикутники дають відчуття руху. Вони асоціюються з напрямком, силою, рухом і дією.

Дослідимо типи геометричних візерунків, з якими можна експериментувати. Хоча можна створювати будь-що за допомогою геометричних фігур і розвивати власний унікальний стиль і застосування, це допомагає надихатися різними техніками. Градієнт – це поступове змішування одного кольору з іншим. Градієнт – це міра зростання або спадання у просторі якоїсь фізичної величини на одиницю довжини [28]. Геометричні градієнти поєднують градієнтні колірні схеми з геометричними фігурами для створення цікавих візерунків, які можна використовувати як фон або інші елементи дизайну (дод. В).

Спіралі – це потужні елементи дизайну, наповнені символізмом і привабливістю. Спіралі відразу привертають увагу. Існує безліч способів застосувати спіральний візерунок до графічного дизайну та ілюстрації. Його можна використовувати, щоб створити оптичну ілюзію, яку можна було б включити в дизайн взаємодії з користувачем або публікацію в соціальних мережах (дод. Г).

Геометрія вважається священною в ісламській культурі, оскільки вона становить основу природного світу і космосу. Ісламська культура бере свій початок з XX століття нашої ери, коли Мухаммед ібн Абд Аллах проповідував у Мекці. Мистецтво мало міцну прив'язку до теології, тому фігури людей і тварин були обмежені, хоча й не скасовані. Це дозволило процвітати і розвиватися рослинним або астральним фігурам. Він математичне дослідження це також сприяло і заохочувало до включення геометричних візерунків у мистецтво [32].

Ісламські візерунки засновані на цих священних геометричних фігурах і відіграють центральну роль в ісламському мистецтві. Вони прикрашають багато елементів ісламського дизайну, зокрема архітектурні поверхні, предмети побуту, ювелірні вироби, одяг тощо. Ці геометричні візерунки неймовірно складні і мають велике символічне значення. Графічні дизайнери можуть черпати натхнення з цього стилю, звертаючи особливу увагу на символізм і значення, які можуть бути притаманні геометричному візерунку. Однак при цьому слід бути обережними. Важливо заздалегідь провести дослідження, щоб переконатися, що дизайнер розуміє художній стиль і поважає іншу культуру (дод. Д).

Лінії є невід'ємною частиною геометрії, а проста лінія вважається формою. Існує безліч дивовижних геометричних візерунків, які можна створити за допомогою простих ліній (дод. Е).

Низькополігональні візерунки вже деякий час є трендом у світі графічного дизайну. Це відноситься до купи форм, поєднаних разом, щоб створити один великий візерунок або зображення. Низькополігональні візерунки можна застосовувати декількома способами, від створення простого фону до створення цілих ілюстрацій.

Мандали походять з індуїстської та буддистської культур і, по суті, є способом представлення всесвіту. Подібно до ісламської культури, ці культури розглядають геометрію як священну. У стародавній санскритській мові індуїзму і буддизму мандала означає «коло». Традиційно мандала – це геометричний

дизайн або візерунок, що представляє космос або божества у різних небесних світах [41].

Мандали наповнені символізмом і мають усі види духовного використання. З популяризацією східної культури в усьому світі мандали стали більш популярними і часто використовуються в графічному дизайні. Їх можна використовувати для створення книжок-розмальовок для арт-терапії, брендингу та соціальних мереж. Вони добре працюють у дизайні завдяки своїй симетрії [41]. Різноманітність візерунків, які можна створити за допомогою мандал, нескінченна. Мандали також часто зустрічаються в дизайні татуювань.

Радіальні візерунки є круговими і зазвичай містять елементи, розташовані вздовж окружності кола, наприклад лінії або кілька кіл. Цей візерунок створює вигляд круглої форми, що росте назовні. Радіальні візерунки можуть бути виражені в різних формах, наприклад мінімальний чорний візерунок угорі або яскравий і складний візерунок унизу.

3.2. Проблеми, пов'язані з побудовою геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки у виробничих процесах

У виробничих процесах використання циркуля та лінійки для побудови геометричних фігур може супроводжуватись рядом проблем:

- Точність вимірювань.

Виробничі процеси часто вимагають високої точності, але точність вимірювань за допомогою циркуля та лінійки може бути обмеженою.

- Складні геометричні форми.

Деякі геометричні фігури, особливо складні та нетривіальні, можуть бути важко або навіть неможливо точно побудувати за допомогою циркуля та лінійки.

- Обмеженість інструментів.

Виробничі потреби можуть вимагати використання інших інструментів, таких як комп'ютерне моделювання або більш точні технічні прилади [23, с. 31].

- Швидкість та ефективність.

У виробничих умовах може бути важко досягти великої швидкості та ефективності при використанні традиційних геометричних методів з циркулем та лінійкою.

- Помилки людського фактору.

Побудова геометричних фігур вручну за допомогою інструментів може призвести до помилок, пов'язаних із людським фактором.

- Специфічні вимоги виробництва.

У деяких виробничих галузях можуть бути специфічні вимоги до геометричних форм, які не можуть бути задоволені традиційними методами.

- Підтримка інновацій.

Для сучасних інноваційних виробничих процесів часто потрібні нові методи та техніки, які виходять за межі звичайного використання циркуля та лінійки.

Вирішення цих проблем може включати в себе використання сучасних технологій, комп'ютерного моделювання та автоматизованих систем контролю як додаткових інструментів у виробничих процесах.

Точність вимірювань у геометричних конструкціях з використанням циркуля та лінійки може бути обмеженою декількома факторами:

- Ліміти інструментів. Циркуль та лінійка мають свої фізичні обмеження, такі як розмір поділки на лінійці та максимальний радіус циркуля. Це може обмежити точність, з якою можна вимірювати відстані та кути.
- Помилки паралаксу. Явище паралаксу можна трактувати як видиму зміну положення об'єкта в полі зору щодо прицільної стіки. Під час вимірювань можуть виникати помилки паралаксу, які пов'язані з тим, що спостерігач

спрямовується на об'єкт під кутом. Це може спричинити неточності при вимірюванні довжин та кутів.

- Абоцентричність. Не завжди можна точно визначити центр циркуля, що призводить до абоцентричної помилки. Це може впливати на точність побудови кола або вимірювання відстаней.
- Обмежена кількість поділок. Лінійка має обмежену кількість поділок, що може призводити до недостатньої точності вимірювань.
- Розмір об'єктів. Для малих об'єктів або деталей точність вимірювань може бути обмеженою роздільною здатністю інструментів.
- Умови середовища. Фактори, такі як освітлення, температура та вологість, можуть впливати на точність вимірювань, зокрема при роботі на польових умовах.
- Навички оператора. Навички та досвід оператора грають важливу роль у точності вимірювань. Неналежне використання інструментів може викликати неточності.

Щоб уникнути або мінімізувати ці проблеми, важливо дотримуватися вимог до вимірювань, використовувати прилади відповідного класу точності, проводити калібрування, уникати помилок паралакса і звертати увагу на правильність та обладнання.

Вирішення цих проблем є дуже важливим. По-перше, важливо вирішувати питання точності вимірювань у виробничих процесах, оскільки навіть невеликі похибки можуть призвести до значних відхилень у якості. По-друге, підвищення швидкості та ефективності виробничих процесів призводить до збільшення продуктивності та зменшення витрат часу і ресурсів. По-третє, людський фактор можна усунути або мінімізувати за допомогою автоматизованих або прецизійних процесів, що сприяє підвищенню якості продукції.

По-четверте, вирішення специфічних вимог виробництва допомагає забезпечити відповідність продукції стандартам та нормативам, що є важливим для конкурентоспроможності на ринку. Крім того, здатність впроваджувати нові методи та техніки виробництва дозволяє підтримувати інновації та залишатися конкурентоспроможними в швидкозмінюваному виробничому середовищі.

РОЗДІЛ 4

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

4.1. Результати проведеного дослідження

Результати проведеного дослідження вказують на важливі аспекти та проблеми, які на пряму пов'язані з використанням традиційних методів у виробництві та науці. Зокрема, було розглянуто основні кроки та обмеження при побудові геометричних фігур з використанням цих інструментів.

Дослідження дозволило виокремити наступні ключові висновки:

- Розглянуті базові конструкції лінійки та циркуля, такі як побудова прямих, кола та їх перетинів. Ці елементи є вихідними для подальших геометричних побудов та мають важливе значення в теорії.
- Зазначено, що геометричні побудови можна розглядати як аксіоматичний процес, аналогічний алгебрі, де базові операції відповідають певним конструкціям.
- Розглянута інтерпретація точок як комплексних чисел, що відкриває можливість використання алгебраїчних методів для побудов геометричних об'єктів.
- Визначено, що традиційні методи мають свої обмеження, особливо у виробництві. Розглянуті варіанти використання сучасних технік, таких як комп'ютерне моделювання та орігамі, за допомогою яких розширюються можливості геометричних конструкцій.
- Зазначено проблеми, такі як обмеженість інструментів, швидкість та ефективність виробництва, помилки людського фактору та специфічні вимоги

виробництва, що впливають на використання геометричних методів у виробництві.

- Це дослідження важливе з кількох причин. Перша причина полягає у тому, що дослідження надає ретроспективу традиційних геометричних методів, дозволяючи розуміти їхню суть та обмеження. Друга причина в тому, що дослідження відкриває можливості використання сучасних підходів для вирішення проблем та розвитку нових методів. Зокрема, в контексті виробництва, виявлення та вирішення проблем, пов'язаних із геометричними конструкціями, може призвести до покращення якості та ефективності виробничих процесів.

Це дослідження свідчить про необхідність розвитку інноваційних методів у геометричних побудовах, зокрема у виробництві, для вирішення складних завдань та оптимізації технологічних процесів.

У ході проведення дослідження виникли деякі труднощі:

1. Відсутність доступу до широкого спектру конкретних виробничих даних та технологічних параметрів у різних галузях.
2. Різноманітність виробничих умов у різних секторах створює виклики у встановленні загальних та універсальних рекомендацій.
3. Деякі теоретичні концепції можуть виявитися менш застосованими у практичних виробничих сценаріях.
4. У певних випадках може виникнути неоднозначність при інтерпретації результатів та їх застосуванні у конкретних виробничих умовах.
5. Дослідження підкреслили потребу у додаткових наукових роботах та експериментах для визначення конкретних параметрів у різних галузях виробництва.

Урахування цих викликів можуть сприяти покращенню точності, ефективності та інновацій в виробництві. Незважаючи на ці виклики, у ході дослідження вдалося визначити основні аспекти проблем геометричних побудов

у виробничих процесах та висвітлити шляхи для подальших досліджень і вдосконалення методів виробництва.

4.2. Аналіз отриманих даних та порівняння зі знаннями, що вже існують

Дослідження визначило кілька наукових новинок. По-перше, акцент на використанні геометричних структур у виробничому середовищі відкриває нові можливості для оптимізації та вдосконалення виробничих процесів. По-друге, дослідження питань точності вимірювань, пов'язаних з геометричними фігурами, забезпечує поглиблене розуміння факторів, що впливають на точність у виробництві. По-третє, запропоновано можливі технічні рішення для підвищення швидкості, точності та ефективності виробничих процесів з використанням геометричних методів. Також було наголошено на необхідності нових технологічних рішень та інновацій для покращення проектування геометричних форм у виробничих умовах. Крім того, були розглянуті можливості автоматизації процесів проектування геометричних форм на виробництві як перспективний шлях підвищення ефективності та зменшення кількості помилок.

Це дослідження сприяє розвитку наукового рівня в галузі виробничої геометрії та відкриває можливості для подальших наукових та технологічних розвідок.

Вперше визначили специфічні вимоги виробничих процесів при використанні геометричних конструкцій. Аналіз ефективності та точності застосування циркуля та лінійки у виробництві впливає на оптимізацію простору та матеріалів у виробничих локаціях. Виявлені конкретні фактори, що впливають на точність геометричних конструкцій, такі як витрати на енергію, терміни служби інструментів та вимоги до підтримки обладнання. Такий аналіз дозволяє

розробляти стратегії для зменшення відхилень та покращення загальної якості виробничих процесів. Запропоновані інженерні підходи, такі як використання нових матеріалів для виробництва інструментів та вдосконалення конструкцій циркуля та лінійки, створюють практичні шляхи для вдосконалення технічних аспектів геометричних робіт у виробничому середовищі.

Дослідження вказує на потребу у впровадженні новітніх технологій, таких як використання комп'ютерних програм для точних обчислень та віртуального моделювання, що може поліпшити якість та швидкість побудов геометричних фігур. Окрім покращень у використанні інструментів, дослідження акцентує на важливості впровадження автоматизованих систем для побудов геометричних форм у виробничих умовах. Це може значно підвищити продуктивність та знизити ймовірність помилок.

Загальною метою цього дослідження є не тільки виявлення проблем, але й пропозиції щодо практичних та інноваційних рішень для поліпшення геометричних виробничих процесів. Новітні підходи та технології, які виявлені під час нашого дослідження, можуть відкрити нові можливості для ефективного та точного виробництва.

Отже, проведене дослідження виявило важливі аспекти використання геометричних конструкцій у виробничих процесах. Виявлені проблеми точності та швидкості, а також визначено проблеми людського фактору, які можуть впливати на результативність геометричних побудов.

4.3. Аналіз і порівняння підручників

Метою цього підручника з геометрії є забезпечення соціально ефективної геометричної освіти. Ця освіта має бути достатньою для успішного вивчення

інших предметів, особливо природничих, а також для подальшого навчання у закладах вищої освіти, особливо на спеціальностях, де математика відіграє центральну роль.

Зміст підручника має відповідати основним функціям навчання геометрії. Ці функції включають викладання геометрії як такої, застосування геометрії в інших предметах і спеціалізовану підготовку в контексті професійної освіти. Виконання цих функцій вимагає розроблення навчальних матеріалів, системи завдань і методичного апарату підручника з урахуванням компетентнісного підходу. Згідно з цим підходом результатом навчання геометрії є формування компетентностей, як геометричних, так і ключових.

В учнів мають розвиватися різні типи геометричних навичок. Змістовні навички включають розуміння ідей і методів геометрії, а також знання формальних, логічних і операційних аспектів геометричних фігур, формул і моделей. Операційні вміння включають вміння представляти та класифікувати геометричні фігури, обґрунтовувати їхні властивості, вимірювати та розв'язувати геометричні задачі.

Враховуючи мету навчання геометрії та її вплив на інші предмети, важливо розвивати міжпредметні та спеціалізовані вміння, щоб підготувати учнів до подальшого освітнього та професійного вибору.

Зміст підручника має сприяти розвитку ключових компетентностей, зокрема загальнонавчальних (прагнення до навчання), комунікативних (грамотне формулювання та висловлення суджень, аргументована дискусія) і загальнокультурних (логічне мислення, цілеспрямованість, розвинена увага, пам'ять, інтуїція, критичне та творче мислення). Забезпечення мотивації та зацікавленості в набутті навичок є однією з найважливіших вимог до змісту підручника. Важливо також, щоб учні усвідомлювали значення математичної грамотності, особливо геометричної.

Важливу роль у забезпеченні мотивації та підвищенні інтересу до вивчення геометрії відіграє систематичне використання історичного матеріалу. Це стимулює наукову творчість, пробуджує критичне ставлення до фактів і надає учням уявлення про геометрію як невід'ємну складову загальнолюдської культури. Показ важливих прикладів, як розвивалися геометричні поняття та теорії, може сприяти усвідомленню учнями геометрії як науки. У нових підручниках цьому надається велика роль.

Головний метод геометрії, впливає із визначення її предмета – це метод абстракції. Абстрагування спрямоване на створення мисленнєвих образів, які адекватно відображають практичний досвід. Від цього залежить науковість викладу матеріалу в підручнику та його прикладна спрямованість. Старі підручники у цьому плані відстають, тому важливо правильно абстрагуватися від властивостей реальних предметів при виборі змісту для забезпечення мислених переходів від предметів до відповідних наочних образів і навпаки.

При формуванні змісту профільного курсу геометрії важливо враховувати можливість самостійного складання учнями алгоритмічних приписів чи евристик. Цей процес передбачає кілька етапів:

1. Встановлення завдань і визначення необхідних знань, які дозволять їх вирішити.
2. Детальне розуміння способу розв'язання групи задач за допомогою моделей, які включають всі операції, що притаманні даному способу.
3. Розробка раціональної послідовності виконання операцій і створення евристичної схеми діяльності.
4. Розуміння того, наскільки ефективно застосовується розроблений спосіб вирішення завдань та його відповідність програмним вимогам.

Підручник має бути орієнтований на диференційоване навчання, включаючи три рівні складності матеріалу: для академічного курсу, для поглибленого вивчення та додаткові запитання. Задачі в підручнику повинні бути

різноманітними і цікавими, з чотирма рівнями складності. Важливо те, що задачі високого рівня включають елементи середнього та достатнього рівнів, а ті – елементи початкового рівня. Це допомагає створити систему диференційованого навчання, враховуючи різний рівень підготовки учнів.

Підручник повинен передбачати систематичне використання програмно-педагогічних засобів з метою активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, підвищення їхньої самостійності та стимулювання інтересу до геометрії. У цьому контексті важливо враховувати різноманітні можливості таких засобів:

- Забезпечення однакової наочності з різним цільовим призначенням, поєднання наочно-образної інформації із знаково-символічною, що сприяє виробленню евристичних та дослідницьких умінь.
- Перенесення комп'ютерних зображень реальних предметів на відповідні моделі, під час чого увага приділяється етаповому їх створенню. Це сприяє тому, що учень самостійно формулює означення нових понять, властивості геометричних фігур або способи діяльності.
- Використання програмно-педагогічних засобів у різних методичних технологіях, підтримка активних методів навчання, моделювання та конструювання геометричних об'єктів, логічна організація невеликих фрагментів навчального матеріалу.
- Використання динамічних моделей абстрактних геометричних понять, їх візуалізація та перетворення (переміщення, зміна форми і розмірів, розташування на площині) для розвитку образного мислення, творчих та евристичних здібностей учнів.

Тому ми можемо зробити висновок, що одним із основних завдань підручника з геометрії є забезпечення оволодіння учнями предметними, надпредметними геометричними та ключовими вміннями.

ВИСНОВОК

У процесі дослідження теми було детально розглянуто та вивчено методи та прийоми побудови різноманітних геометричних об'єктів. Отримані знання не лише розширюють уявлення учнів про властивості та характеристики геометричних фігур, але й розвивають їхні навички аналітичного та конструктивного мислення.

Ця тема є важливою, адже вона не лише розкриває конкретні методи побудови, але й фундаментальні принципи геометрії, які застосовуються у різних сферах життя. Вивчення способів побудови різноманітних фігур сприяє розвитку в учнів математичного мислення, логічного аналізу та творчих здібностей.

Важливо підкреслити, що отримані вміння і навички можуть бути успішно використані у таких сферах діяльності, як інженерія, архітектура, дизайн тощо. Учні, оволодіваючи навичками побудови геометричних фігур, розвивають практичні навички та готуються до використання своїх знань у майбутньому.

Методи та прийоми виявляються не лише важливими для вивчення геометрії, а й є фундаментальними для розвитку аналітичного та просторового мислення учнів. Важливим аспектом є освоєння правил використання циркуля та лінійки для точного відтворення геометричних форм. Учні повинні оволодіти навичками точного вимірювання та побудови відрізків, кутів, та інших елементів геометричних фігур. Чітка розбудова теоретичних концепцій створює основу для подальших вправ та завдань.

Також, важливо наголосити на важливості практичного застосування отриманих знань. Побудова геометричних фігур за допомогою циркуля та лінійки має практичне значення в інженерних, архітектурних, технічних та інших галузях. Ці навички не лише розвивають математичний аналіз учнів, а й підготовлюють їх до застосування геометричних принципів у реальному житті.

Застосування алгоритмів побудови сприяє не лише розвитку аналітичних та конструктивних навичок, але й вдосконаленню логічного мислення учнів. Вивчені алгоритми створюють фундамент для розв'язання більш складних завдань та підготовляють учнів до вирішення проблем, які трапляються у реальному житті, а також застосовувати математичні концепції у практичних задачах. Деякі алгоритми можуть мати кілька варіантів виконання. Це стимулює учнів розглядати геометричні завдання з різних точок зору та шукати нестандартні рішення.

Практична реалізація алгоритмів побудови геометричних фігур виявилася важливим етапом у вивченні геометрії та розвитку навичок у роботі з циркулем та лінійкою. Практичне застосування дозволяє учням отримати конкретний досвід у побудові різноманітних геометричних фігур, що розвиває їхню творчість та вміння вирішувати завдання на основі математичних принципів.

Важливо відзначити, що практичні завдання з геометрії засновані на алгоритмах побудови допомагають створити певний контекст для вивчення математики, роблячи її більш доступною та захопливою для учнів. Такий підхід підсилює зацікавленість учнів у предметі та розвиває їхні навички використання математики в практичному житті.

У ході виконання роботи було вирішено ряд завдань.

1) Нами було проаналізовано методи побудови геометричних фігур за допомогою циркуля і лінійки, та детально описано кожен із них. Також було досліджено математичні аспекти побудови геометричних фігур, їх основні шляхи та помилки під час побудови. Було досліджено процес використання на практиці методів побудови геометричних фігур. Розглянуто основні способи та інструментарій, а також детально описано сам процес побудови фігур.

2) Крім того ми порівняли інструментарій для створення геометричних фігур, оскільки крім лінійки та циркуля можна використовувати інші інструменти для правильної побудови, такі як транспортир та лекало. Також було

досліджено процес створення навчальних матеріалів, що мають в основі побудову геометричних фігур, розглянуто і порівняно підручники з геометрії тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

1. Афанасьєва О. Геометрія: підручник для 10 кл. закладів загальн. серед. освіти : профільний рівень. Тернопіль: Навчальна книга Богдан, 2018. 464 с.
2. Баран О., Дармосюк В. Методи побудови зображень геометричних фігур на площині, як складова професійної підготовки майбутніх вчителів математики. *Науково-методична конференція*. 2013. С. 128.
3. Баугауз: важливий напрям з маленької літери. URL: <https://nachasi.com/creative/2021/10/05/baugauz-vazhlyvyj-napryam-z-malenkoyi-literi/>
4. Бевз Г., Бевз В., Владімірова Н. Геометрія. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2018. 272 с.
5. Богатинська Н. Про розв'язування стереометричних задач у шкільному курсі геометрії. URL: <file:///C:/Users/%D0%90%D0%B4%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B8%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80/Downloads/135-Article%20Text-575-1-10-20131111.pdf>
6. Бугаєць Н. Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв'язування задач на побудову в шкільному курсі планіметрії. 2009.
7. Верещак Р. Прямокутник та його властивості. URL: <https://www.mathros.net.ua/prjamokutnyk-oznachennja-ta-vlastyvosti.html>
8. Відбудова паралакса в оптичних прицілах. URL: <https://opticalmarket.com.ua/ua/vidstrojka-paralaksu-v-optichnih-pritsilah.html>
9. Геометричні перетворення в архітектурі. URL: https://blog22doslidnuku.blogspot.com/p/blog-page_75.html

10. Геометрія в мистецтві та архітектурі. URL: <https://proekt-geometriy.blogspot.com/p/blog-page.html>
11. Геометрія навколо нас. https://geometrianavkolonac.blogspot.com/2017/12/blog-post_52.html
12. Драганюк С., Синюкова О. «Побудови» у тривимірному евклідовому просторі та доцільний характер їх висвітлення у навчальних курсах евклідової стереометрії за умови практико-орієнтованого навчання. URL: <https://pednauk.cuspu.edu.ua/index.php/pednauk/article/view/1127/1055>
13. Елементи графічної грамоти. Технічний рисунок. URL: <https://narodna-osvita.com.ua/6278-elementi-grafchnoyi-gramoti-tehnchniy-risunok.html>
14. Квадрат. Формули та властивості квадрата. URL: <https://ua.onlinemschool.com/math/formula/square/>
15. Керницький І., Нікітенко О., Стукалець І. Геометричне моделювання в архітектурі та техніці спряжених поверхонь обертання другого порядку. *Аналітичні та числові методи в механіці та фізиці руйнування будівельних матеріалів і конструкцій*. 2018. С. 28-32.
16. Коровкіна Г. Архітектурна композиція: конспект лекції (для студентів 1 курсу денної форми навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за освітньою програмою «Архітектура» спеціальності 191.Архітектура та містобудування). Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. 117 с.
17. Ленчук І., Працьовитий М. Евклідова геометрія: конструктивна складова. URL: http://eprints.zu.edu.ua/19651/1/Lenchuk_Evklidova_geometria.pdf
18. Марченко К. Задачі на побудову з використанням циркуля та лінійки та їх вплив на учнів у середній школі. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/270151273.pdf>

19. Мерзляк А., Номіровський Д., Полонський В., Якір М. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 204 с.

20. Многокутник і його елементи. Опуклі й не опуклі многокутники.
<https://vseosvita.ua/library/embed/001q16-2b4e.doc.html>

21. Пісішніченко І. Геометричні тіла.
<https://pasishnichenko.blogspot.com/p/blog-page.html>

22. Побудова за допомогою циркуля та лінійки. URL:
<https://www.wikidata.uk-ua.nina.az/%D0%9F%D0%BE%D0%B1%D1%83%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%8E%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BA%D1%83%D0%BB%D1%8F%D1%96%D0%BB%D1%96%D0%BD%D1%96%D0%B9%D0%BA%D0%B8.html>

23. Побудова трикутника за трьома сторонами. URL:
<https://www.geogebra.org/m/epzy8yzj>

24. Побудова трикутників за трьома елементами. URL:
<https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/7-klas/kolo-i-krug-24777/zavdannia-na-pobudovu-13634/re-07ee8d45-7913-4975-a140-5382d8ea513f/>

25. Пучков А. Нарис історії архітектурознавства. Київ: Фенікс, 2013. 196 с.

26. Радченко А. О. Основи архітектурної графіки : навч. посібник. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. 248 с.

27. Рего В.Л. Многогранники. URL:
<https://www.uzhnu.edu.ua/en/infocentre/get/51194>

28. Словник. Портал української мови та культури. URL:
<https://slovnyk.ua/index.php?swrd=%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%B4%D1%96%D1%94%D0%BD%D1%82>

29. Термінологічний словник. URL: <https://elearn.nubip.edu.ua/mod/glossary/print.php?id=91530&sortorder&offset=790&sortkey&mode&lang=uk>
30. Трикутники та її види. Ознаки рівності трикутників. URL: <https://advice.org.ua/trykutnyky-ta-ikh-vydy-oznaky-rivnosti-trykutnykiv/>
31. Тука М. Евклідова геометрія. URL: https://matematikavshkoli.blogspot.com/2014/01/blog-post_5.html
32. У пошуках Бога: іслам і його складна геометрія божественного. URL: <https://fahrenheitmagazine.com/uk/%D0%BC%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%86%D1%82%D0%B2%D0%BE/%D1%83-%D0%BF%D0%BE%D1%88%D1%83%D0%BA%D0%B0%D1%85-%D0%B1%D0%BE%D0%B3%D0%B0-%D1%96%D1%81%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D1%83-%D1%82%D0%B0-%D0%B9%D0%BE%D0%B3%D0%BE-%D1%81%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D0%B4%D0%BD%D0%BE%D1%97-%D0%B3%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D1%96%D1%97-%D0%B1%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE>
33. Українська радянська енциклопедія. https://leksika.com.ua/12400902/ure/okil_tochki
34. Ульшин П., Паюк А. Задачі на побудову в курсі геометрії загальноосвітньої школи. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Теорія та методика навчання математики*. 2012. С. 275.
35. Циліндри та архітектури. URL: <http://epkznu.com/wp-content/uploads/2015/09/%D0%91%D0%B0%D0%B4%D0%BB%D0%BE-%D0%AE.-%D0%9F%D0%B5%D1%82%D1%8C%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0.pdf>

36. Шаповалова Н., Бублик А. Використання властивостей геометричних фігур при створенні орнаментів. *Економічний розвиток: теорія, методологія, управління*. 2019. С. 319-320.

37. Швець Л. Побудова зображень просторових фігур в шкільному курсі стереометрії. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*. 2013. №5. С. 153-157.

38. Що означає многогранник?
<https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/heometriya/obyemni-fihury/ohlyad/shcho-oznachaye-mnohohrannyk>

39. Що таке геометрія? Наука «геометрія». URL:
<https://bigbro.com.ua/shho-take-geometriya-nauka-geometriya/>

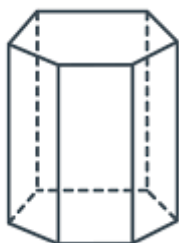
40. Що таке еліпси? URL:
<https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/heometriya/ploski-fihury/kola/elipsy/shcho-take-elipsy>

41. Що таке мандала? URL:
<https://www.adobe.com/ua/creativecloud/design/discover/mandala-art.html>

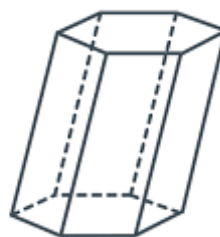
42. Що таке трикутник? URL:
<https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/heometriya/ploski-fihury/trykutnyky/vlastyvosti-trykutnykiv/shcho-take-trykutnyk>

ДОДАТКИ

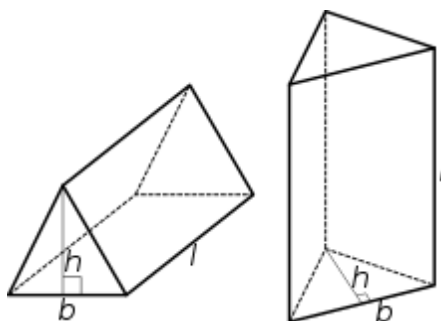
Додаток А



Пряма призма

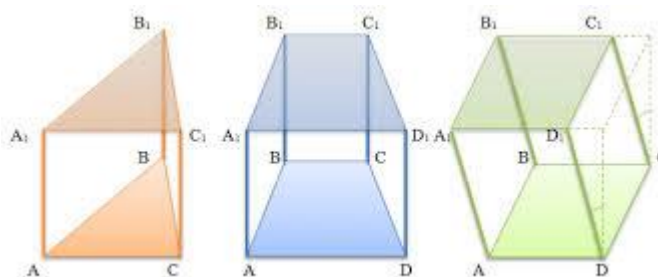
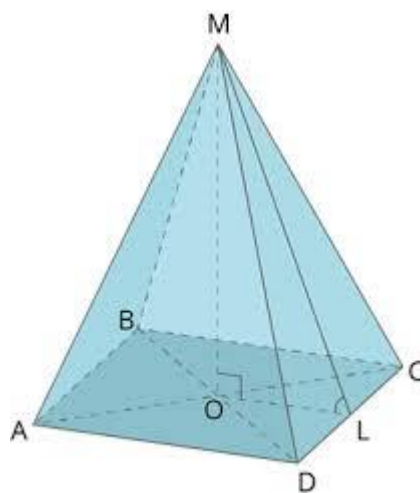


Похила призма

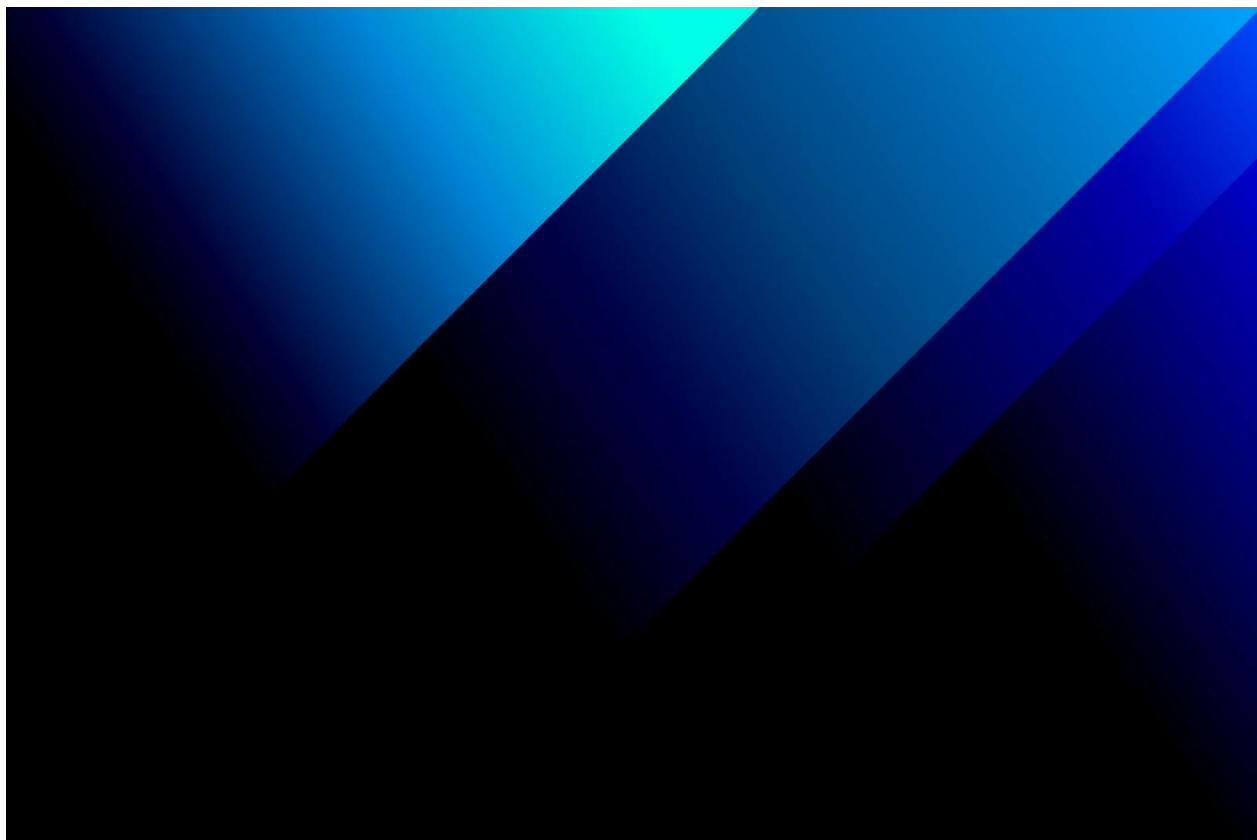


Види призм

Додаток Б



Піраміда (верхній малюнок); трикутник, прямокутник та квадрат (нижній малюнок)

Додаток В

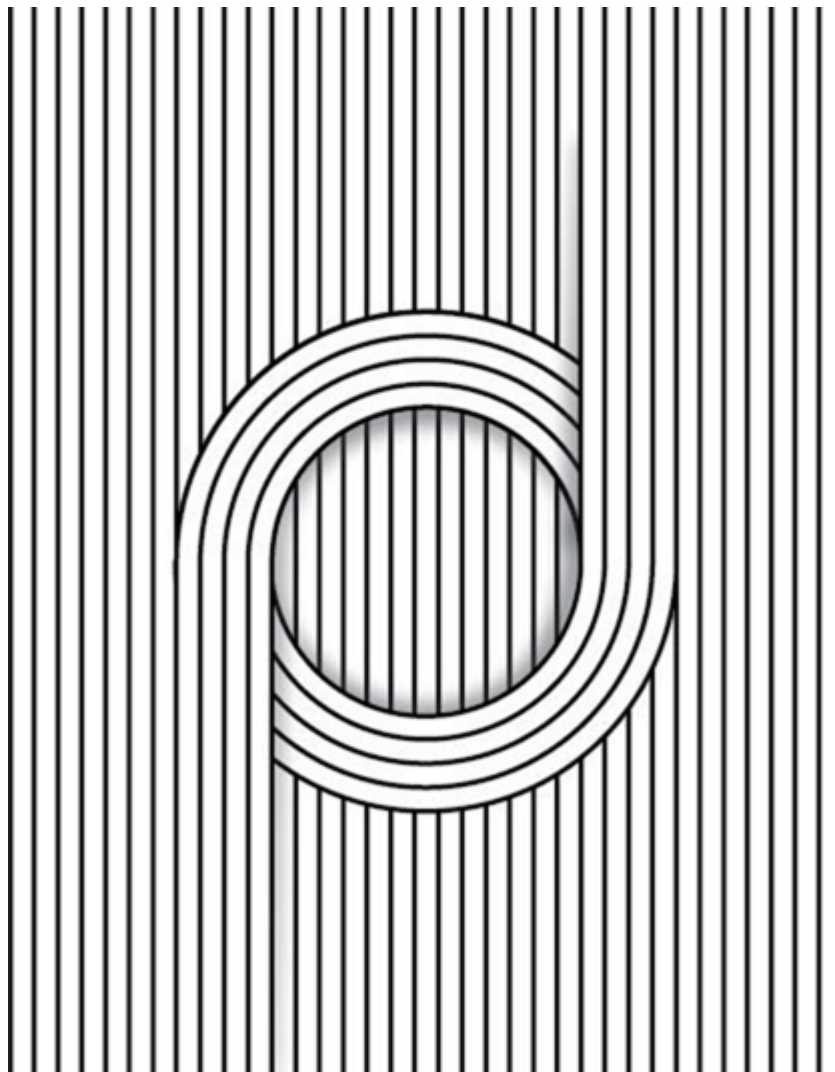
Градiєнт



Спиральний візерунок

Додаток Д

Візерунок ісламського стилю

Додаток Е

Візерунок прямих ліній