

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему “ Методика навчання учнів 7-9 класів розв’язуванню олімпіадних задач
з геометрії ”

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Бейсюк У. Ю.

Керівник Никифорчин І. В.

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. Історія математичних олімпіад і їх роль у розвитку математичних здібностей учнів	5
Історія математичних олімпіад в Україні і світі.....	5
Роль олімпіад у розвитку математичних здібностей учнів.....	17
РОЗДІЛ 2. Основні типи задач підвищеної складності з геометрії і методи їх розв'язування.....	30
Геометричне застосування принципу Діріхле.....	30
Задачі на розфарбування.....	34
Відрізки, кути, вписані кути	38
Задачі на перерозподіл площ.....	39
Визначні точки та лінії в трикутнику	41
РОЗДІЛ 3. Розробка факультативного заняття.....	44
ВИСНОВКИ	49
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	51

ВСТУП

Сучасні реалії освіти ставлять перед школою нові вимоги: підготовка учнів до життя в інформаційному суспільстві вимагає розвитку в них критичного мислення, аналітичних здібностей та здатності до творчого розв'язування проблем. У цьому контексті особливого значення набуває формування математичної компетентності, яка є основою для розвитку аналітичного та логічного мислення. Математичні олімпіади відіграють важливу роль у цьому процесі, адже вони стимулюють учнів до глибшого занурення в предмет, розширення знань і набуття навичок, необхідних для розв'язування задач підвищеної складності.

Актуальність дослідження обумовлена необхідністю вдосконалення методичних підходів до підготовки учнів до олімпіад, а також використання олімпіадних задач як засобу для формування математичної компетентності. Дослідження ролі математичних олімпіад дозволяє не тільки оцінити їхню освітню цінність, але й виокремити підходи, які сприяють розвитку у школярів здатності до логічного та критичного мислення, що важливо для їхнього успіху в сучасному суспільстві.

Об'єкт дослідження: процес формування математичної компетентності учнів середніх та старших класів при підготовці до математичних олімпіад.

Предмет дослідження: методи та підходи до формування математичної компетентності учнів через розв'язування олімпіадних задач з математики, зокрема задач підвищеної складності з геометрії.

Мета дослідження: розробити та обґрунтувати методичні підходи, що сприятимуть ефективному формуванню математичної компетентності учнів шляхом розв'язування олімпіадних задач, а також дослідити вплив участі в олімпіадах на розвиток аналітичного мислення та мотивації до саморозвитку.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

- Проаналізувати історію математичних олімпіад, їх роль і вплив на розвиток математичних здібностей учнів.
- Дослідити основні типи олімпіадних задач з геометрії, що сприяють розвитку логічного мислення.
- Виявити методи та прийоми, що сприяють успішному розв'язанню задач підвищеної складності з геометрії.
- Розробити факультативне заняття, орієнтоване на підвищення математичної компетентності учнів за допомогою олімпіадних задач.

Методи дослідження: теоретичний аналіз літературних джерел, історико-методологічний аналіз, порівняльний аналіз та методи практичного розв'язування олімпіадних задач з геометрії.

Структура роботи складається з трьох розділів. У першому розділі розглянуто історію розвитку математичних олімпіад у світі та в Україні, їхню роль у розвитку математичних здібностей учнів. Другий розділ присвячено типам задач підвищеної складності з геометрії та методам їх розв'язування. У третьому розділі представлено розробку факультативного заняття, спрямованого на покращення математичних знань і вмінь учнів у контексті підготовки до математичних змагань.

Очікувані результати дослідження можуть знайти практичне застосування в шкільній освіті, оскільки запропоновані методи здатні підвищити зацікавленість учнів у математиці та сприяти розвитку навичок розв'язування задач, що матиме позитивний вплив на їхню академічну успішність і професійну підготовку.

РОЗДІЛ 1. Історія математичних олімпіад і їх роль у розвитку математичних здібностей учнів

Історія математичних олімпіад в Україні і світі

Історія математичних олімпіад має давнє коріння, і хоча перші формалізовані змагання з'явилися лише в XIX столітті, змагання на математичну тематику були відомі вже з часів античності. Розвиток математики й потреба у вирішенні складних завдань спонукали до організації інтелектуальних змагань у різних формах протягом століть.

Антична Греція була одним із перших центрів, де математичні знання розвивалися в змагальному середовищі. У школах і філософських академіях, таких як Академія Платона, учні та вчителі дискутували, вирішували проблеми й демонстрували свої навички. Ці обговорення і дебати можна вважати ранньою формою інтелектуальних змагань, хоч і не настільки формалізованою, як сьогоденні олімпіади.

У Середньовіччі інтелектуальна діяльність була переважно зосереджена в релігійних та філософських колах, але в арабському світі та в Китаї математичні знання продовжували розвиватися. Змагання між науковцями тих часів сприяли поширенню й розвитку математичних методів, хоча це ще не набуло форми сучасних олімпіад.

Формальні змагання з математики з'явилися в Європі в другій половині XIX століття. Одним із перших таких заходів стала угорська математична олімпіада, що відбулася у 1894 році. Це було важливе нововведення, яке поклало початок традиції проведення національних математичних змагань серед учнів шкіл.

Математичні змагання в Угорщині стали прикладом для багатьох інших країн, де також почали проводити подібні конкурси. Ці заходи сприяли поширенню математичних знань і формуванню майбутніх математичних еліт.

XX століття стало переломним моментом у розвитку математичних олімпіад. У 1959 році в Румунії було проведено першу Міжнародну математичну олімпіаду (ММО), що об'єднала учасників із семи країн. Ця подія швидко набула популярності, і з кожним роком кількість країн-учасниць зростала. З часом ММО стала глобальним змаганням, у якому брали участь тисячі учнів з усього світу.

Слідом за ММО почали з'являтися й інші міжнародні математичні змагання, такі як Європейська математична олімпіада для дівчат (EGMO) та Азійсько-Тихоокеанська математична олімпіада (APMO). Ці події стали платформою для розвитку математичних здібностей школярів та підготовки до подальшої наукової діяльності.

Особливе значення математичні олімпіади мали в країнах колишнього Радянського Союзу. У СРСР математичні змагання почали активно розвиватися в середині XX століття, і вони відігравали важливу роль у підготовці учнів до подальшого навчання та роботи в науковій сфері. Радянські математичні школи активно підтримували участь учнів у різних олімпіадах, що дозволяло їм удосконалювати свої знання та здобувати нові навички.

Традиції проведення олімпіад збереглися й після розпаду СРСР, а математичні олімпіади продовжують відігравати важливу роль у системі освіти в країнах пострадянського простору, зокрема в Україні.

Таким чином, математичні олімпіади мають багатовікову традицію, що бере початок ще з часів античності. Протягом століть ці змагання еволюціонували від неформальних інтелектуальних дискусій до сучасних формалізованих міжнародних заходів, що сприяють розвитку математичних здібностей школярів і підтримують наукові таланти.

Математичні олімпіади на міжнародному рівні стали важливим інструментом для поширення математичних знань, стимулювання талановитих учнів і сприяння розвитку глобальної математичної спільноти. Важливим етапом у

становленні цього руху стало виникнення Міжнародної математичної олімпіади (ММО), яка об'єднала учнів із різних країн і сприяла встановленню нових міжнародних стандартів математичної освіти.

Перші спроби організації міжнародних математичних змагань відбулися в 1950-х роках. Після Другої світової війни країни почали шукати нові шляхи для розвитку наукового співробітництва і підвищення рівня освіти, особливо в галузі точних наук. Математика, як фундаментальна наука, стала ідеальним полем для міжнародного співробітництва та змагань.

Першою офіційною подією такого роду стала Міжнародна математична олімпіада (ММО), яка вперше відбулася в 1959 році в Румунії. У першому змаганні взяли участь сім країн: Румунія, Болгарія, Угорщина, Польща, Німецька Демократична Республіка, Чехословаччина та СРСР. Формат олімпіади полягав у вирішенні шести складних математичних задач протягом двох днів, що стало традиційною структурою для подальших олімпіад.

З кожним роком кількість країн, які брали участь у ММО, збільшувалася. Олімпіада швидко набула популярності, і до 1970-х років до неї долучилися країни з усього світу, включно з державами Західної Європи, Північної Америки, Азії та Африки. Сьогодні в ММО беруть участь понад 100 країн, що робить її однією з найпрестижніших математичних змагань у світі.

Окрім ММО, з часом з'явилися й інші важливі міжнародні математичні олімпіади та змагання, які мають свою специфіку та аудиторію. Серед них варто виділити такі події:

- **Європейська математична олімпіада для дівчат (EGMO):** Ця олімпіада, заснована в 2012 році, була створена для того, щоб заохотити більше дівчат до участі в математичних змаганнях. EGMO є важливим кроком до гендерної рівності в математичній спільноті та створює платформу для талановитих дівчат із різних країн.

- **Азійсько-Тихоокеанська математична олімпіада (АРМО):** Ця олімпіада проводиться для учнів з Азійсько-Тихоокеанського регіону. Вона має за мету стимулювати розвиток математичних здібностей у регіоні, який вирізняється значною науково-технічною конкуренцією.
- **Балканська математична олімпіада:** Змагання для країн Балканського регіону, засноване в 1984 році. Олімпіада сприяє не лише математичному розвитку, але й зміцненню культурних зв'язків між країнами цього регіону.
- **Олімпіада "Кенгуру":** Це змагання є найбільш масовим серед учнів середніх шкіл і охоплює мільйони учасників по всьому світу. Воно спрямоване на популяризацію математики серед широкого кола учнів і створює більш доступний формат змагань.

Ці олімпіади стали важливими подіями у світі математичних змагань, і кожна з них відіграє свою роль у підтримці й розвитку математичних здібностей серед молоді.

Міжнародні математичні олімпіади не лише заохочують розвиток інтелектуальних здібностей серед учнів, але й сприяють формуванню глобальної математичної спільноти. Вони створюють платформу для обміну знаннями, досвідом і культурними надбаннями між представниками різних країн. Участь у міжнародних олімпіадах дозволяє учасникам не лише покращувати свої математичні навички, але й встановлювати зв'язки з майбутніми колегами та партнерами з інших країн.

ММО та інші міжнародні змагання також стимулюють розвиток математичної освіти в різних країнах. У багатьох країнах участь у міжнародних олімпіадах є престижною подією, що спонукає школи й освітні заклади до поліпшення рівня викладання математики. Крім того, ці змагання часто стають поштовхом для талановитих учнів до подальшої наукової кар'єри, що в результаті позитивно впливає на загальний розвиток науки і техніки у світі.

Завдяки міжнародним олімпіадам, математичні спільноти отримують можливість взаємодіяти на глобальному рівні, обмінюючись ідеями та досвідом, що в кінцевому підсумку сприяє розвитку науки та відкриттю нових горизонтів для молодих математиків.

Україна має довгу і багату історію математичних змагань, яка бере свій початок ще з радянського періоду. Однак математична освіта в Україні розвивалася іще раніше, до входження до складу Радянського Союзу. На початку ХХ століття українські математики почали формувати підвалини тієї освітньої системи, яка пізніше дозволила українським школярам досягати значних результатів у галузі математики.

Засновником національної системи математичних олімпіад у Радянському Союзі, до складу якого входила і Україна, стала ініціатива щодо розвитку науково-освітніх конкурсів серед молоді. Ці змагання спершу мали на меті виявлення і підтримку найталановитіших учнів у галузі математики, фізики та інших точних наук. Математика стала однією з основних дисциплін, які розглядалися як стратегічно важливі для науково-технічного прогресу країни.

Перша всесоюзна математична олімпіада відбулася в Москві в 1934 році. Олімпіади швидко поширилися по всій території СРСР, зокрема в Україні. Радянські освітні органи запровадили багаторівневу систему змагань, яка починалася з шкільних і закінчувалася всесоюзними етапами, де переможці отримували можливість вступати до найпрестижніших університетів країни без вступних іспитів. Олімпіади стали не лише престижними змаганнями, але й важливим інструментом для відбору та заохочення майбутніх науковців.

Значну роль у популяризації олімпіад відіграли математичні школи, які створювалися у великих містах України, таких як Київ, Харків, Одеса та Львів. Важливою подією став розвиток спеціалізованих фізико-математичних шкіл, зокрема Київської фізико-математичної школи (КФМШ) та Харківської спеціалізованої школи №27, випускники яких неодноразово ставали переможцями всесоюзних і міжнародних математичних змагань.

Після здобуття незалежності Україною в 1991 році національні математичні олімпіади продовжили свою роботу. Однак на початку 1990-х років система математичних змагань опинилася в кризі через економічні та соціальні труднощі, з якими стикнулася країна. Проте завдяки зусиллям ентузіастів та підтримці наукових спільнот математичні олімпіади в Україні не лише вижили, але й зміцнили свої позиції.

Україна вперше взяла участь у Міжнародній математичній олімпіаді (ММО) як незалежна країна в 1992 році. Цей етап став важливим моментом у становленні національної команди, яка змогла вийти на міжнародну арену і швидко завоювати авторитет серед інших країн-учасниць. З 1992 року українські учасники регулярно демонструють високі результати на ММО, що є свідченням високого рівня математичної освіти та підготовки в Україні.

Українські математики відіграли ключову роль у розвитку олімпіадного руху як в Україні, так і на міжнародному рівні. Ще за часів СРСР, багато українських науковців були залучені до організації та проведення математичних олімпіад, а також до розробки конкурсних завдань.

Однією з найвідоміших постатей у цій галузі був Михайло Остроградський, український математик, який заклав основи математичної освіти в Україні в XIX столітті. Його внесок у розвиток наукового мислення та методів викладання математики продовжує впливати на систему математичної підготовки учнів до сьогодні.

За часів СРСР українські вчені також брали активну участь у підготовці науково-методичних матеріалів для олімпіад і виступали членами журі на всесоюзних та міжнародних змаганнях. Після здобуття незалежності, традиція участі українських математиків у міжнародному олімпіадному русі не тільки збереглася, але й посилилася.

Однією з ключових постатей, яка залишила значний слід в історії олімпіадного руху в Україні, став Володимир Короленко. Ще в середині XX століття, коли

математична спільнота тільки починала організовувати систематизовані олімпіади, Короленко став одним із провідних організаторів і натхненників цієї справи. Завдяки його зусиллям було створено структуру, яка дозволила шкільним змаганням стати важливою частиною освітнього процесу.

Інша видатна постать — Леонід Печорін, математик і педагог, який багато років працював у Харкові. Він був не тільки організатором численних змагань, але й сам писав задачі для олімпіад, які ставали відомими за межами України. Завдяки його внеску, українські учні отримували завдання високої складності, що дозволяло їм демонструвати свій потенціал на міжнародному рівні.

Значну роль також відігравав Михайло Кравчук, один із найвидатніших українських математиків. Його праці не лише лягли в основу багатьох наукових теорій, але й стали поштовхом для розвитку інтересу до математики серед школярів. Хоча Кравчук не брав безпосередньої участі в організації олімпіад, його спадщина залишила глибокий слід у розвитку математичної освіти в Україні. Ім'я Кравчука нині часто згадують під час проведення різноманітних математичних заходів, і багато шкіл вшановують його пам'ять.

Українські науковці брали участь у створенні нових математичних завдань для міжнародних змагань. Наприклад, серед найуспішніших творців завдань для ММО були професори українських університетів, які мали глибокі знання та досвід у галузі теоретичної математики. Вони внесли нові ідеї та завдання, що сприяли розвитку міжнародного олімпіадного руху.

Не менш важливу роль відіграють українські викладачі та тренери, які готують команди до участі в міжнародних олімпіадах. Завдяки їхнім зусиллям, українські школярі досягають високих результатів на міжнародних змаганнях і продовжують традицію математичних перемог на світовій арені.

Математичні олімпіади в Україні мають свою унікальну структуру, яка охоплює декілька етапів і дозволяє залучити до участі в змаганнях учнів з різних регіонів країни. Ця система гарантує рівні можливості для всіх школярів,

незалежно від місця їх проживання чи соціального статусу, і дозволяє найталановитішим учням вийти на високий рівень.

Перший етап олімпіад проходить на рівні шкіл, де завдання зазвичай орієнтовані на загальний рівень підготовки учнів. Цей етап є найбільш масовим і дозволяє виявити учнів, які мають схильність до математики та бажання продовжувати змагатися на наступних рівнях.

Районний та обласний етапи є більш складними і включають завдання, що вимагають від учасників не тільки знання шкільної програми, але й вміння застосовувати ці знання для вирішення нестандартних завдань. Завдання на цих етапах зазвичай мають більш абстрактний характер і спрямовані на розвиток логічного мислення.

Всеукраїнський етап є найвищим рівнем математичних олімпіад в Україні. Це змагання об'єднує переможців обласних етапів і є вирішальним у відборі команди, яка представлятиме Україну на Міжнародній математичній олімпіаді. Завдання на цьому рівні є надзвичайно складними і відповідають міжнародним стандартам, що дозволяє підготувати учнів до участі в ММО.

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД В УКРАЇНІ



В Україні проводяться різні математичні олімпіади на різних рівнях, що

охоплюють учнів від початкової до старшої школи. Нижче наведено основні математичні олімпіади, що проводяться на національному рівні:

В Україні проводяться різні математичні олімпіади на місцевому, обласному та національному рівнях. Серед них основна – Всеукраїнська учнівська математична олімпіада для учнів 7–11 класів, організована Міністерством освіти і науки України, переможці якої представляють Україну на міжнародних змаганнях. Мала академія наук України (МАН) також проводить конкурс-захист наукових робіт з математики, де учні можуть презентувати свої наукові дослідження.

Олімпіади для молодших школярів організовуються на місцевому рівні та орієнтовані на учнів 4–6 класів. Турнір юних математиків (ТЮМ) – це командне змагання для старшокласників, спрямоване на розвиток навичок командної роботи. Київська математична олімпіада, що проводиться Київським національним університетом, є престижним змаганням для школярів різного віку з усієї України.

Серед міжнародних змагань популярною є олімпіада «Кенгуру» для учнів 2–11 класів. Все більшого поширення набувають Інтернет-олімпіади з математики, які проводяться онлайн для різних вікових груп. Турніри математичних боїв, що організовуються в Києві, Харкові та інших містах, пропонують учасникам командний формат змагань, де команди вирішують задачі й змагаються одна з одною.

Ці заходи сприяють розвитку математичних здібностей українських учнів і готують їх до міжнародних змагань, розвиваючи критичне та логічне мислення.

Окрім класичних математичних олімпіад, в Україні також популярні інші форми змагань, такі як математичні бої, конкурси-захисти наукових робіт, математичні турніри. Особливу увагу привертають математичні бої, де команди учнів не тільки розв'язують задачі, але й захищають свої рішення перед журі, що сприяє розвитку навичок аргументації та публічних виступів.

Українська система математичних олімпіад забезпечує високий рівень підготовки учнів, стимулює їх до постійного розвитку та самовдосконалення. Вона є важливим елементом освітньої системи, що дозволяє виявляти таланти та підтримувати їх на шляху до наукових досягнень.

Цей багаторівневий підхід, а також зосередження на творчих і нестандартних завданнях, дозволяють українським школярам успішно виступати на міжнародних змаганнях і продовжувати традицію математичних олімпіад.

Однією з ключових особливостей математичних олімпіад в Україні є те, що ці змагання спрямовані не лише на перевірку теоретичних знань учнів, але й на розвиток їхньої здатності до творчого мислення та пошуку нестандартних рішень. Завдання, що пропонуються на різних етапах олімпіад, часто є складнішими, ніж ті, що входять до шкільної програми, і вимагають від учнів оволодіння певними додатковими навичками.

Завдання на олімпіадах мають декілька рівнів складності. Наприклад, на шкільному етапі учні зазвичай розв'язують відносно прості задачі, що ґрунтуються на базових знаннях шкільної програми. Однак, на районному та обласному рівнях завдання стають значно складнішими і часто передбачають розв'язання логічних, комбінаційних або геометричних проблем, що вимагають глибокого розуміння математичних принципів та здатності до абстрактного мислення.

Вплив математичних олімпіад на освіту в Україні є надзвичайно вагомим. Олімпіади стали важливою складовою процесу підготовки учнів у багатьох школах, особливо в спеціалізованих навчальних закладах, таких як фізико-математичні ліцеї та гімназії. У цих закладах створюються спеціальні програми для підготовки учнів до математичних змагань, а викладачі мають великий досвід роботи з талановитими дітьми.

Багато шкіл і вчителів активно заохочують учнів брати участь у математичних змаганнях, розуміючи, що це не тільки можливість перевірити свої знання, але

й шанс для особистого розвитку. Математичні олімпіади сприяють розвитку критичного мислення, навичок аналізу й синтезу інформації, що є важливими не тільки для математики, але й для будь-якої іншої галузі науки.

Особливу роль у підготовці учнів до математичних олімпіад відіграють спеціалізовані фізико-математичні ліцеї, гімназії та школи з поглибленим вивченням математики. Важливим елементом роботи таких закладів є позакласні заняття з математики, під час яких учні розглядають складніші теми, вчаться розв'язувати нестандартні задачі, а також опановують навички швидкого і правильного мислення. Позакласна робота охоплює не лише підготовку до олімпіад, але й участь у математичних гуртках, семінарах і конференціях.

Крім того, у багатьох регіонах України активно працюють математичні гуртки, які допомагають учням краще підготуватися до змагань. У цих гуртках учні мають можливість працювати з викладачами, які мають великий досвід у підготовці до олімпіад, а також обмінюватися досвідом і знаннями з однолітками, які поділяють їхню любов до математики.

Не менш важливою є роль українських університетів, які також залучаються до підготовки учнів до олімпіад. Наприклад, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут" та Київський національний університет імені Тараса Шевченка активно співпрацюють зі школами та ліцеями, надаючи допомогу в організації олімпіад, а також залучаючи студентів та аспірантів до тренування команд.

Однією з особливостей проведення математичних олімпіад в Україні є підтримка з боку місцевих органів освіти та регіональних наукових спільнот. У багатьох областях створені спеціалізовані комісії, які відповідають за організацію та проведення районних і обласних етапів олімпіад. Це дозволяє залучати учнів з різних регіонів України, включаючи сільські райони, що є важливим фактором у забезпеченні рівних можливостей для всіх дітей.

Особливий акцент робиться на залученні учнів з регіонів, де немає спеціалізованих шкіл або ліцеїв з поглибленим вивченням математики. Завдяки ініціативам місцевих освітніх органів, учні з менших міст і сіл також мають можливість брати участь в олімпіадах, що сприяє виявленню та підтримці талановитих дітей по всій країні.

На рівні країни також проводяться спеціалізовані тренувальні табори для найкращих учнів, де вони мають можливість готуватися до міжнародних змагань. Наприклад, щорічно в Києві проходить тренувальний табір для учасників національної збірної, яка представляє Україну на Міжнародній математичній олімпіаді. У цих таборах учні не тільки розв'язують складні математичні задачі, але й працюють з професійними тренерами, викладачами університетів та колишніми олімпіадниками, що дозволяє їм значно підвищити свій рівень підготовки.

Таким чином, система математичних олімпіад в Україні є багаторівневою і включає в себе різноманітні етапи та форми підтримки талановитих учнів. Це дозволяє забезпечити постійний потік талановитих математиків, які згодом продовжують свою кар'єру в науці, техніці та інженерії, роблячи вагомий внесок у розвиток цих галузей в Україні та на міжнародній арені.

Математичні олімпіади в Україні мають давню та багату історію, яка розпочалася ще в радянські часи і продовжує активно розвиватися після здобуття незалежності. Вони стали важливим інструментом для виявлення та підтримки математично обдарованих учнів, стимулюючи їх до досягнення високих результатів як на національному, так і на міжнародному рівнях.

Українські математики відіграють ключову роль у розвитку олімпіадного руху, залучаючи талановитих учнів до наукової діяльності. Особливості проведення математичних змагань в Україні включають багаторівневу систему відбору, значну підтримку з боку спеціалізованих навчальних закладів і університетів, а також активну участь місцевих органів освіти.

Українська система математичних олімпіад є одним із найважливіших елементів у структурі математичної освіти країни, що дозволяє формувати нові покоління науковців, інженерів і викладачів, які здатні робити вагомий внесок у розвиток математики та інших галузей знань.

Роль олімпіад у розвитку математичних здібностей учнів

Участь у математичних олімпіадах має значний вплив на інтелектуальний розвиток учнів. Цей процес не лише сприяє покращенню їхніх математичних навичок, але й формує комплексний підхід до навчання, розвиває аналітичні та когнітивні здібності, стимулює творчий підхід до вирішення проблем і сприяє розвитку самостійного мислення. Олімпіади є важливою складовою освітнього процесу, яка значно розширює рамки традиційного навчання, пропонуючи учням нові можливості для інтелектуального зростання.

Математичні олімпіади дають учням можливість заглибитися в матеріал набагато глибше, ніж це дозволяє стандартна шкільна програма. Завдання олімпіад часто включають такі математичні проблеми, що вимагають глибокого осмислення, а також творчого підходу до їх вирішення. На відміну від традиційних навчальних завдань, олімпіадні задачі зазвичай передбачають використання не лише знаних формул і алгоритмів, але й нестандартних методів, які необхідно винайти самостійно. Це стимулює учнів до глибшого розуміння математичних теорій і принципів, що розвиває їх здатність використовувати теоретичні знання на практиці.

Участь в олімпіадах також заохочує учнів до самостійного навчання, оскільки для досягнення успіху часто потрібно опанувати матеріал, який не охоплюється шкільною програмою. Це стимулює до вивчення додаткових джерел, самостійного пошуку інформації та вирішення завдань на вищому рівні складності. Таке навчання не лише розвиває інтелектуальні здібності, але й формує у дітей важливу навичку самостійної роботи з новою інформацією.

Математичні олімпіади значно впливають на розвиток аналітичного мислення, оскільки вирішення складних задач вимагає систематичного підходу. Учні вчаться структурувати інформацію, аналізувати дані та розділяти проблему на окремі частини для подальшого розв'язання. Цей підхід дозволяє глибше зрозуміти суть проблеми та знайти оптимальний шлях до її вирішення. Наприклад, задачі, які стосуються теорії чисел або геометрії, зазвичай потребують багатоступеневої логічної аргументації та побудови математичних моделей, що розвиває в учнів здатність бачити проблему в її комплексності.

Олімпіадні завдання також стимулюють розвиток логічного мислення. Учні вчаться знаходити логічні зв'язки між різними елементами задачі, а також перевіряти правильність кожного кроку розв'язку. Логічне мислення є однією з ключових навичок, яку учасники олімпіад удосконалюють через постійне вирішення задач, що мають складну структуру і вимагають ретельного підходу до розв'язання.

Крім того, математичні олімпіади розвивають здатність до абстрактного мислення, яке є важливим для вирішення багатьох наукових і технічних проблем. Наприклад, комбінаторні задачі вимагають від учнів вміння працювати з абстрактними об'єктами та системами, які не мають конкретного фізичного прояву, але є важливими для математичних теорій.

Участь у математичних олімпіадах також стимулює розвиток творчого мислення. Це відбувається тому, що задачі, які використовуються на олімпіадах, часто є незвичними та потребують нетрадиційного підходу до їх розв'язання. Відповідно, учні змушені шукати нові, інноваційні способи вирішення проблем, що виходять за межі стандартних підходів, вивчених у школі.

Творче мислення розвивається в процесі пошуку різних варіантів вирішення задачі та порівняння їхньої ефективності. Часто олімпіадні задачі можуть бути вирішені кількома способами, і важливо не лише знайти правильне рішення, але й обрати найбільш ефективний і оптимальний шлях до його досягнення. Це

стимулює учнів до винахідливості та пошуку нових підходів до розв'язання проблем, що є важливою рисою для наукової діяльності.

Творчий підхід до вирішення математичних задач також впливає на здатність мислити креативно в інших сферах. Вміння знаходити нестандартні рішення та застосовувати оригінальні підходи до вирішення проблем є корисними не лише в математиці, але й у багатьох інших галузях, таких як інженерія, програмування, бізнес тощо.

Ще одним важливим аспектом інтелектуального розвитку, який забезпечує участь у математичних олімпіадах, є формування навичок самостійного навчання. У процесі підготовки до олімпіад учні змушені самостійно опрацьовувати великий обсяг додаткового матеріалу, вирішувати складні задачі та шукати відповіді на незвичні питання. Це вимагає від них здатності організувати свій навчальний процес, планувати час і ставити перед собою конкретні навчальні цілі.

Крім того, участь у математичних олімпіадах сприяє розвитку критичного мислення. Учні вчаться оцінювати правильність своїх рішень, аналізувати власні помилки і вносити корективи у свій підхід до розв'язання задач. Вони також отримують можливість оцінювати різні варіанти вирішення задач, обираючи найбільш ефективний із них. Це формує у дітей вміння критично оцінювати як свої досягнення, так і результати інших, що є важливим для подальшого інтелектуального розвитку та наукової діяльності.

Окрім розвитку академічних навичок, участь у математичних олімпіадах готує учнів до майбутньої професійної діяльності. Знання та навички, здобуті під час підготовки до змагань, є надзвичайно корисними для тих, хто прагне займатися наукою, інженерією, програмуванням, економікою та іншими галузями, що потребують логічного мислення і здатності до розв'язання складних проблем.

Таким чином, участь у математичних олімпіадах є потужним інструментом для інтелектуального розвитку учнів. Вона сприяє поглибленню знань, розвитку

аналітичного та логічного мислення, підвищує творчий потенціал і готує учнів до подальшої академічної та професійної діяльності. Олімпіади відкривають перед учнями нові можливості для самовдосконалення, що стає міцним підґрунтям для їхнього успішного майбутнього.

Участь у математичних олімпіадах відіграє вирішальну роль у формуванні аналітичного та критичного мислення учнів. Математичні змагання стимулюють глибше осмислення завдань, вимушують учасників оцінювати кожен крок у процесі вирішення проблеми, розвиваючи навички структурованого підходу до аналізу й синтезу інформації. Завдяки цьому учні навчаються вирішувати завдання, які виходять за межі стандартних шкільних програм, а також критично підходять до перевірки та вдосконалення своїх рішень.

Аналітичне мислення — це здатність детально вивчати проблему, розділяти її на менші частини та знаходити рішення для кожної з них. Математичні олімпіади є чудовим інструментом для розвитку цієї здатності, оскільки більшість завдань, що пропонуються учасникам, мають складну структуру, в якій важливо чітко розуміти логічні зв'язки між різними компонентами задачі.

Олімпіадні задачі часто мають кілька рівнів складності. Для успішного вирішення учень повинен систематично аналізувати всі наявні дані, робити припущення та випробовувати різні підходи до розв'язання. Цей процес вимагає детального розуміння всіх аспектів задачі та вміння створювати ефективні стратегії для розв'язання. Наприклад, задачі з комбінаторики або теорії чисел зазвичай передбачають розгляд багатьох можливих варіантів, що спонукає учнів до глибокого аналізу можливих рішень і вибору найоптимальнішого.

Здатність учня аналізувати задачу включає такі етапи:

1. Визначення умов задачі: Важливо зрозуміти, які саме дані надані та що потрібно знайти.

2. Побудова логічного плану: Учні повинні вміти визначити стратегію розв'язку, яка включає пошук закономірностей або методів спрощення задачі.
3. Проведення аналізу: Цей етап включає послідовне виконання всіх кроків згідно з побудованим планом, тестування можливих варіантів рішень.
4. Перевірка результату: Необхідно оцінити правильність і доцільність отриманого результату, що вимагає здатності до самоконтролю і оцінки своїх дій.

Такий системний підхід розвиває навички аналітичного мислення, які стають основою для успіху не тільки в математиці, але й у багатьох інших галузях, зокрема науці, інженерії та бізнесі.

Математичні олімпіади також сприяють розвитку логічного мислення, яке є важливою складовою аналітичного процесу. Логічне мислення полягає у здатності робити послідовні висновки, які випливають з початкових умов або припущень, і є критично важливим для вирішення складних математичних задач.

Олімпіадні завдання зазвичай вимагають чіткого логічного мислення, оскільки кожен етап розв'язку повинен бути обґрунтованим і логічно пов'язаним з попереднім. Учасники математичних змагань повинні вміти робити висновки на підставі наданих умов і дедуктивно виводити правильні рішення, часто застосовуючи відомі математичні теореми або методи в нових контекстах.

Крім того, на багатьох етапах учасникам потрібно перевіряти свої припущення або підхід до розв'язку, використовуючи контрприкладі або логічний аналіз. Це допомагає уникнути помилок і формує здатність до критичного осмислення своїх дій.

Прикладом розвитку логічного мислення є завдання з геометрії або алгебри, де необхідно будувати послідовні ланцюги міркувань для доведення теорем або знаходження невідомих величин. Логічні вправи формують у учнів здатність до

точних і ретельних розрахунків, що є основою для подальших наукових і технічних досліджень.

Один із найважливіших елементів, які формуються через участь у математичних олімпіадах, — це критичне мислення, що включає здатність оцінювати свої дії та рішення, а також бачити можливі помилки або недоліки в обраній стратегії.

Критичне мислення дозволяє учням аналізувати отримані результати й оцінювати їх з точки зору логічної коректності та доцільності. Це дуже важлива навичка, оскільки учасники олімпіад часто стикаються з ситуаціями, коли знайдене рішення може бути одним із багатьох можливих, і необхідно вибрати найкращий варіант. Учень повинен бути в змозі оцінити свої дії, визначити сильні та слабкі сторони свого підходу й у разі потреби знайти більш ефективний спосіб вирішення проблеми.

Уміння критично мислити також включає здатність до аналізу помилок. Наприклад, під час участі в командних змаганнях, таких як математичні бої, учасники часто повинні захищати свої рішення перед журі або суперниками, що змушує їх оцінювати власні аргументи й шукати можливі прогалини у своїх доведеннях. Така практика допомагає розвивати здатність до самокорекції та підвищує навички аргументації.

Крім того, критичне мислення формує в учнів здатність аналізувати рішення інших учасників. Це особливо важливо у форматі командних змагань, де учні повинні працювати разом і оцінювати ідеї один одного. У процесі такої взаємодії формується навичка критичного осмислення чужих рішень і пропозицій, що розвиває здатність до конструктивної критики та самовдосконалення.

Участь у математичних олімпіадах розвиває також здатність до синтезу інформації, що полягає в умінні поєднувати різні знання та методи для вирішення однієї складної проблеми. Зазвичай, олімпіадні задачі є

міждисциплінарними й можуть вимагати застосування кількох методів одночасно. Наприклад, деякі завдання можуть поєднувати елементи геометрії, алгебри й комбінаторики, що змушує учасників мислити гнучко та шукати нестандартні шляхи вирішення.

Такий синтез знань є особливо важливим для подальшого наукового розвитку, оскільки наука часто вимагає поєднання різних підходів для вирішення нових або складних проблем. Учні, які брали участь у математичних олімпіадах, отримують навичку бачити загальну картину проблеми та застосовувати різні інструменти для досягнення бажаного результату.

Таким чином, математичні олімпіади значно сприяють розвитку аналітичного та критичного мислення учнів. Вони допомагають учасникам розвивати систематичний підхід до вирішення проблем, покращують навички логічного мислення та формують здатність критично оцінювати власні рішення. Ці навички є основою для подальшого інтелектуального та професійного розвитку учнів, що готує їх до успішної кар'єри в науці, техніці та інших галузях, де необхідні глибокі знання та здатність

Участь у математичних олімпіадах є не лише інтелектуальним викликом для учнів, але й потужним психологічним досвідом, який впливає на їхню мотивацію та стимулює до саморозвитку. Математичні змагання допомагають формувати особистісні якості, які є важливими не тільки для успіху в навчанні, але й у житті. До таких якостей належать наполегливість, цілеспрямованість, вміння працювати в стресових ситуаціях і приймати виклики. Математичні олімпіади стають для учасників важливою платформою для розвитку цих навичок і створюють середовище, в якому учні можуть відчувати справжній інтелектуальний виклик.

Одним із ключових психологічних аспектів участі в математичних олімпіадах є мотивація до самовдосконалення. Змагання дають учням можливість перевірити свої знання та навички, а також побачити, наскільки вони просунулися порівняно з однолітками. Це стимулює їх до подальшого

вдосконалення своїх здібностей, адже олімпіади показують, що завжди є нові вершини, яких можна досягти.

Перемоги на олімпіадах або навіть участь у них стають важливим стимулом для учнів продовжувати розвивати свої знання. Усвідомлення того, що вони здатні вирішувати складні математичні завдання, мотивує учнів заглиблюватися в предмет, шукати нові знання та техніки для вирішення ще складніших задач. Важливим фактором є те, що участь в олімпіадах дозволяє учням отримати визнання за їхні зусилля, що додає додаткового стимулу до навчання.

Мотивація до навчання також підсилюється через необхідність постійного вдосконалення та підготовки до майбутніх олімпіад. Учні розуміють, що для досягнення успіху потрібна постійна праця та систематичне вивчення нових матеріалів. Олімпіади спонукають їх до систематичної підготовки, що дозволяє краще організувати власний навчальний процес і виробляє звичку до самостійної роботи з новою інформацією.

Ще одним важливим психологічним аспектом є розвиток внутрішньої мотивації. Багато учнів починають брати участь в олімпіадах через зовнішні стимули, такі як бажання отримати приз або визнання від оточення. Однак, згодом вони починають отримувати задоволення від самого процесу розв'язання складних математичних задач. Ця зміна сприяє формуванню внутрішньої мотивації — коли учні працюють не заради зовнішніх нагород, а для того, щоб досягти особистого прогресу і підняти свій рівень знань.

Внутрішня мотивація є особливо важливою, оскільки вона залишається з учнем на довгі роки. Завдяки участі в олімпіадах, діти починають усвідомлювати, що знання й уміння є цінністю самі по собі. Це усвідомлення може стати основою для подальшого успіху в науковій, технічній або інженерній діяльності, оскільки саме внутрішня мотивація є основою для досягнення високих результатів у складних проектах.

Участь у математичних олімпіадах вимагає значних зусиль і часу, тому учні, які беруть у них участь, розвивають у собі такі риси, як наполегливість і цілеспрямованість. Для досягнення успіху в олімпіаді необхідно витратити багато годин на підготовку, вирішення задач, вивчення нових тем і технік. Процес підготовки часто передбачає неодноразові невдачі, адже не всі задачі вдається розв'язати з першого разу. Однак саме через ці труднощі учні вчаться не здаватися й продовжувати працювати над собою, навіть коли стикаються з труднощами.

Олімпіади також виховують цілеспрямованість, оскільки участь у змаганнях передбачає наявність конкретної мети. Учні працюють на результат, прагнуть поліпшити свої досягнення порівняно з попередніми роками або перемогти на певному етапі змагань. Ця цілеспрямованість формує важливу життєву навичку — здатність ставити перед собою чіткі цілі та докладати всіх зусиль для їх досягнення.

Цілеспрямованість та наполегливість, здобуті через участь в олімпіадах, допомагають учням у подальшій навчальній та професійній діяльності. Вони стають здатними ефективно планувати свої дії, долати труднощі та досягати успіху навіть у складних умовах.

Участь у математичних олімпіадах також сприяє підвищенню впевненості в собі. Для багатьох учнів олімпіади є серйозним викликом, який вимагає від них демонстрації своїх здібностей перед іншими. Успіх у цих змаганнях допомагає учням відчувати свою компетентність і потенціал, що підвищує їхню самооцінку та впевненість у власних силах.

Перемоги в олімпіадах або навіть досягнення певних етапів змагань створюють почуття задоволення від виконаної роботи й мотивують учнів на подальший розвиток. Це допомагає їм усвідомити, що важка праця та наполегливість дають результат, що, своєю чергою, сприяє підвищенню рівня їхньої мотивації.

Крім того, олімпіади розвивають стійкість до стресових ситуацій. Під час змагань учні стикаються з необхідністю вирішувати складні завдання в обмежений час, що є стресовим чинником. Однак участь у таких умовах допомагає розвинути здатність зберігати концентрацію та спокій у стресових ситуаціях, що є важливим як для подальшого навчання, так і для професійної діяльності. Учасники олімпіад вчаться зберігати холонокровність, аналізувати ситуацію і приймати правильні рішення навіть під час тиску, що формує важливу життєву навичку.

Окрім індивідуальних досягнень, участь у математичних олімпіадах часто передбачає роботу в командах або взаємодію з іншими учасниками. Це особливо важливо для розвитку соціальних навичок і здатності працювати в колективі. Математичні змагання, такі як "математичні бої" або командні олімпіади, вимагають від учасників кооперації, обміну ідеями та спільного вирішення завдань.

Такий досвід допомагає учням навчитися спілкуватися, аргументувати свої думки та конструктивно працювати з однолітками. Вони вчаться не лише вирішувати задачі, але й досягати результатів разом з іншими, що формує важливі навички командної роботи, які стануть у пригоді в майбутньому.

Крім того, математичні олімпіади створюють середовище підтримки й мотивації серед однолітків. Учасники часто спілкуються з іншими учнями, які мають схожі інтереси, що допомагає їм отримати натхнення й підтримку для подальшого розвитку. Такі взаємодії сприяють формуванню здорової конкуренції

Математичні олімпіади є не лише змаганнями для учнів, але й важливим етапом у підготовці майбутніх науковців. Участь в олімпіадах дає змогу молодим математикам розвивати критичні та аналітичні навички, які є ключовими у науковій діяльності. Математичні змагання стають платформою для формування наступного покоління дослідників і вчених, що роблять внесок у розвиток світової науки.

Однією з найважливіших ролей математичних олімпіад є їхня здатність готувати учасників до подальшої наукової діяльності. Більшість задач, які пропонуються на олімпіадах, вимагають не просто застосування відомих формул або алгоритмів, але й глибокого осмислення, аналізу проблеми та пошуку оригінальних рішень. Це формує здатність до творчого підходу, який є невід'ємною частиною наукових досліджень.

Математичні олімпіади часто виступають "першим кроком" у наукову кар'єру для багатьох учнів, оскільки вони знайомлять учасників із сучасними проблемами та тенденціями в математиці, стимулюючи їх до подальших досліджень. Учасники олімпіад зазвичай продовжують свою освіту у провідних університетах, де вони вже мають певний досвід у вирішенні складних завдань, що дозволяє їм успішно адаптуватися до вимог вищої математичної та наукової освіти.

Крім того, багато університетів по всьому світу надають особливу увагу переможцям міжнародних математичних олімпіад, пропонуючи їм стипендії та можливість вступу без іспитів. Це дає можливість талановитим молодим математикам не тільки продовжити свою освіту, але й розвивати наукову кар'єру в кращих наукових центрах світу.

Багато з тих, хто брав участь у математичних олімпіадах, згодом стали видатними вченими й дослідниками, що зробили вагомий внесок у різні галузі науки. Вирішення складних математичних завдань на олімпіадах розвиває в учасників навички, необхідні для проведення наукових досліджень: системний підхід до розв'язання проблем, здатність працювати з великими обсягами даних і знаходити нестандартні рішення.

Колишні учасники математичних олімпіад активно працюють у таких галузях, як теоретична математика, фізика, інформатика, інженерія та економіка. Їхній внесок у розвиток цих дисциплін є неоціненним, оскільки вони не тільки впроваджують нові методи й підходи, але й сприяють загальному прогресу в науці.

Один із яскравих прикладів впливу математичних олімпіад на світову науку — це розвиток сучасної комп'ютерної науки та криптографії. Багато математиків, що працюють у цих галузях, отримали перші навички розв'язання складних математичних проблем саме під час участі в олімпіадах. Наприклад, колишні олімпіадники брали активну участь у розробці алгоритмів, що використовуються в сучасних системах шифрування й захисту даних, а також у розв'язанні проблем штучного інтелекту.

Крім того, математичні олімпіади часто стають поштовхом для вивчення нових, мало досліджених на той момент галузей науки. Задачі, що пропонуються на міжнародних змаганнях, часто мають дослідницький характер і базуються на новітніх наукових розробках, що стимулює молодих математиків займатися дослідженням цих питань у майбутньому.

Багато відомих науковців у різних галузях починали свій шлях із участі в математичних олімпіадах. Ось кілька прикладів, які демонструють, як участь у таких змаганнях допомогла майбутнім вченим здобути необхідні навички для подальших наукових досягнень:

1. **Теренс Тао** — австралійський математик китайського походження, один із наймолодших учасників Міжнародної математичної олімпіади, де він здобув золоту медаль у 1986 році, коли йому було всього 10 років. Пізніше Теренс Тао став одним із провідних математиків світу, зробивши значний внесок у такі галузі, як гармонійний аналіз, диференціальні рівняння та теорія чисел. Він став лауреатом багатьох престижних премій, зокрема Філдсівської медалі.
2. **Григорій Перельман** — російський математик, який у 1982 році став переможцем Міжнародної математичної олімпіади, здобувши золоту медаль. Він став відомим у наукових колах після того, як розв'язав одну з найскладніших математичних проблем — гіпотезу Пуанкаре, що принесло йому світове визнання.

3. **Меріам Мірзахані** — іранська математик і перша жінка, що здобула Філдсівську медаль. Мірзахані брала участь у Міжнародній математичній олімпіаді двічі — у 1994 та 1995 роках, де здобула дві золоті медалі. Пізніше вона стала провідним науковцем у галузі динамічних систем та геометрії, і її дослідження зробили значний внесок у сучасну математику.
4. **Максим Концевич** — видатний математик російського походження, який здобув золоту медаль на Міжнародній математичній олімпіаді у 1982 році. Він став лауреатом Філдсівської медалі за свої дослідження в галузі симплектичної геометрії та математичної фізики. Його роботи мають значний вплив на сучасну теоретичну фізику.

Усі ці приклади демонструють, як участь у математичних олімпіадах стає важливим стартом для наукової кар'єри. Завдяки розвитку аналітичних і логічних навичок, олімпіадники отримують унікальний досвід, який дозволяє їм досягати успіху в науці та робити вагомий внесок у світову наукову спільноту.

Таким чином, математичні олімпіади є надзвичайно важливою платформою для підготовки майбутніх науковців. Вони надають учням можливість не лише розвивати свої математичні здібності, але й формувати навички, які є ключовими для проведення наукових досліджень і досягнення успіху в різних галузях науки.

РОЗДІЛ 2. Основні типи задач підвищеної складності з геометрії і методи їх розв'язування

Геометричне застосування принципу Діріхле

Існує кілька формулювань даного принципу.

1. Якщо в k клітках сидять m зайців, причому $m > k$, то хоча б в одній клітці сидять, принаймні, два зайці.

Доводиться даний принцип Діріхле методом доказу від супротивного:

Нехай не знайдеться така клітка, в якій сидить два зайці, тоді кількість зайців m повинні бути менше або дорівнює кількості кліток n , що приводить нас до протиріччя.

2. Нехай в n клітках сидять m зайців, причому $n > m$. Тоді знайдеться хоча б одна порожня клітка.

Нехай немає жодної порожньої клітки. Тоді кількість зайців m повинно збігатися з кількістю кліток n (якщо в кожній клітці хоча б по одному зайцю), або бути більше, що суперечить умові.

3. Припустимо, зайці розсаджено в n клітках. Тоді, якщо $m > n$, то хоча б в одній клітці міститься не менше $\frac{m}{n}$ зайців, а так само хоча б в одній іншій клітці міститься не більше $\frac{m}{n}$ зайців.

Не треба боятися дробового числа зайців. Якщо виходить, що в скриньці не менше $\frac{m}{n}$ зайців, тоді їх більш чим два.

Припустимо, що в кожній клітці число зайців менше, ніж $\frac{m}{n}$. Тоді в n клітках разом зайців менше, ніж $n \cdot \frac{m}{n} = m$. Протиріччя.

4. Якщо в n клітках сидять m зайців і $m \geq kn + 1$, то в якийсь із кліток сидять, по крайній мірі, $k + 1$ заєць (*узагальнений принцип Діріхле*)

Нехай не знайдеться така клітка, тобто в кожній з n кліток сидить по k зайців, тоді зайців повинно бути $k \cdot n$, а за умовою зайців як мінімум на одного більше. Прийшли до суперечності з умовою. Отже, є клітка, в якій сидять $k + 1$ заєць.

У завданнях в ролі зайців можуть виступати різні предмети і математичні об'єкти - числа, відрізки, місця в таблиці і т. д. Такий, начебто простий, принцип дозволяє розв'язувати непрості задачі, у тому числі і геометричні.

Головне при використанні цього принципу з'ясувати, кого призначати на роль „ зайця “, а кого на роль „ клітки “

Розглянемо декілька прикладів застосування принципу Діріхле у геометричних задачах.

Задача 2.1. В квадраті розміром 4×4 розміщено 15 точок. Доведіть, що всередині цього квадрата є квадрат розміром 1×1 , який не містить в собі жодної точки.

Розв'язання.

Розіб'ємо квадрат розміром 4×4 см на квадрати зі стороною 1 см (рис. 2.1). Ми отримаємо 16 маленьких квадратів всередині великого. Так як точок дано всього 15, то, за принципом Діріхле, в якомусь із квадратів НЕ буде точки, що й треба було довести.

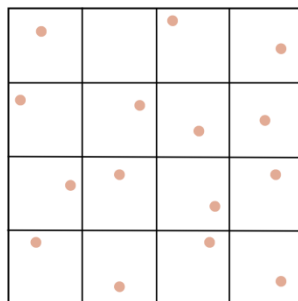


Рис. 2.1

Задача 2.2. В квадрат із стороною 1 м „ кинули “51 точку. Доведіть, що якісь три з них можна накрити квадратом із стороною 20 см.

Розв'язання.

Поділимо задану нам фігуру на квадрати з довжиною сторони 20 см, маємо $5 \cdot 5 = 25$ таких квадратів.

Число $51 = 25 \cdot 2 + 1$. Тоді, за принципом Діріхле, у якомусь з утворених квадратів міститься $2 + 1 = 3$ точки. Твердження доведено.

Задача 2.3. Усередині рівностороннього трикутника зі стороною 1 см розташовано 5 точок. Доведіть, що відстань між деякими двома з них менше 0,5 см.

Розв'язання.

Нехай 5 точок будуть „зайцями“. Так як „кліток“ має бути менше, і найчастіше на 1, то їх повинно бути 4. Розіб'ємо рівносторонній трикутник за допомогою проведення середніх ліній (рис. 2.2). Тоді отримаємо 4 рівносторонніх трикутника зі сторонами по 0,5 см, які і будуть у нас „клітками“.

За принципом Діріхле, знайдеться „клітка“ - рівносторонній трикутник зі стороною 0,5 см, в який потраплять не менше двох „зайців“ - точок.

Відстань між точками в будь-якому такому трикутнику менше, чим 0,5 см.

Задача 2.4 В середину квадрата зі стороною 10 см „кинули“ 101 точку (жодні три з них не лежать на одній прямій). Доведіть, що серед них є три, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 см^2 .

Розв'язання. Розіб'ємо квадрат на 50 прямокутників зі сторонами 1 см і 2 см. Площа кожного прямокутника 2 см^2 . Тоді, за принципом Діріхле, хоча б в один з них потрапить не менше як 3 точки. Ці точки утворюють трикутник, площа якого не перевищує половини площі прямокутника, в якому міститься цей трикутник. Тому що найбільший по площі трикутник, який розташований в середині прямокутника, має основу – 2 см, висоту - 1 см. А його площа - 1 см^2 . Отже, твердження доведено.

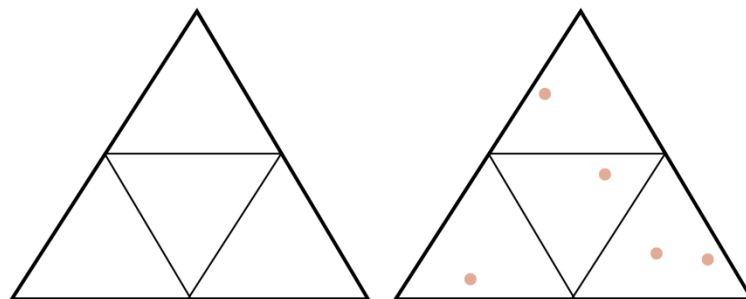


Рис. 2.2

Задача 2.5. На площині дано 7 прямих, ніякі дві з них не паралельні. Доведіть, що знайдуться дві прямі, кут між якими менше 26° .

Розв'язання. На площині вибираємо будь-яку точку і через неї проводимо прямі, паралельні з даними (рис. 2.3).

Нехай кут між будь-якими двома з цих прямих не менш 26° .

Наші 7 прямих розбивають площину на 14 кутів, тому їх сума не менше $14 \cdot 26 = 364^\circ$, але, з іншого боку, їх сума повинна дорівнювати 360° , - протиріччя.

Отже, знайдуться дві прямі, кут між якими менше 26° .



Рис. 2.3

Задача 2.6. У кубі з ребром 1м літає всередині 2001 муха. Довести, що в цьому кубі можна виділити кубик з ребром 1дм, в якому знаходиться три мухи.

Розв'язання. Розділимо куб на 1000 кубиків з ребром 1дм. Якби в кожному кубикі знаходилися по дві мухи, то їх було б 2000. Наступна муха є третьою в будь-якому з кубиків.

Задача 2.7. Килим має форму квадрата зі стороною 275 см. Моль проїла в ньому чотири дірки. Чи можна гарантовано вирізати з килима квадратний шматок зі стороною 1 м, який не містить дірок? Дірки можна вважати точками (рис. 2.4)

Розв'язання. На килимі можна розмістити п'ять квадратів зі стороною 1 м, які не будуть перетинатися. В квадраті залишаться полоски по 75 см. П'ятий квадрат спробуємо розмістити посередині, повернувши його, як показано на малюнку.

Розглянемо синій квадрат зі стороною 0,75м (рис.2.4) Його діагональ (червона) дорівнює $0,75\sqrt{2} \text{ м} > 1 \text{ м}$, а вона дорівнює стороні пунктирного квадрата. Виходить, що п'ятий квадрат зі стороною 1м існує на килимі. Отже, хоча б один з 5 квадратів обов'язково залишиться без дірки.

А тоді, гарантовано можна вирізати з килима квадратний шматок зі стороною 1 м, який не містить дірок.

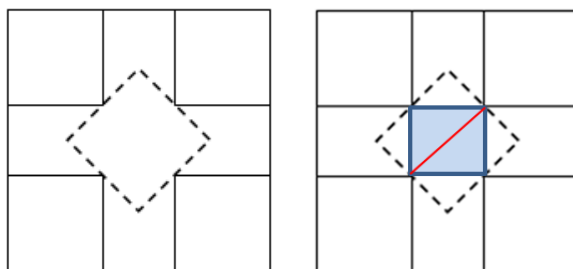


Рис. 2.4

Задача 2.8. В квадраті зі стороною 1 знаходиться 51 точка. Доведіть, що якісь три з них можна накрити кругом радіуса $\frac{1}{7}$.

Розв'язання. Розіб'ємо даний квадрат на 25 однакових квадратиків зі стороною $\frac{1}{5}$. За принципом Діріхле в один з них потрапляє не менше трьох точок. Радіус описаного кола навколо квадрата зі стороною $\frac{1}{5}$ дорівнює $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$. Порівняємо знайдений радіус з радіусом даного за умовою круга - $\frac{1}{7}$. Маємо $\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{50} < \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$. Тому квадратик, в якому є три точки, обов'язково можна накрити кругом радіуса $\frac{1}{7}$.

Задачі на розфарбування

У цьому розділі буде братися якесь поле і його треба буде або розфарбувати, або знайти якусь не зафарбовану фігуру, або ж розставити якусь кількість фігур на даному полі.

Задача 2.8. 10 точок площини розфарбовані або в синій, або в зелений, або в жовтий колір. Всі точки попарно з'єднані відрізками. Чи є серед отриманих чотирикутників хоча б один з вершинами одного кольору?

Розв'язування.

Дано три різних кольори точок. А з 10 точок в „найгіршому“ випадку по три точки синього, зеленого і жовтого кольорів. Тоді ще одна (десята) точка

співпаде, наприклад, з зеленим кольором. І зелених точок буде чотири. Отже, серед отриманих чотирикутників є хоча б один з вершинами одного кольору.

Задача 2.9. Квадратна площа розміром 100×100 викладена квадратними плитами 1×1 чотирьох кольорів: білого, червоного, чорного і сірого - так, що ніякі дві плити однакового кольору не стикаються один з одним. Скільки може бути червоних плит?

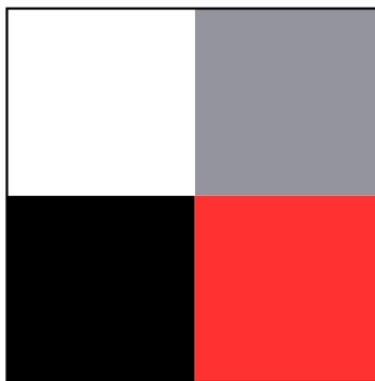


Рис. 2.5

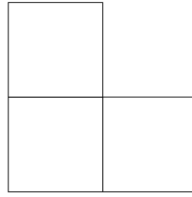
Розв'язування. Розіб'ємо площу на 2500 квадратиків 2×2 , кожен з яких складається з чотирьох плит зі спільною вершиною. Значить, кожен з цих квадратиків може містити не більше однієї червоної плити, і, тим самим, кількість червоних плит не може перевищувати 2500. Те ж вірно і для плит інших квітів. Отже, плит кожного кольору рівно по 2500.

Задача 2.10. На шаховій дошці 8×8 розташована 31 фігура. Довести, що знайдеться вільний трикутник з трьох кліток (рис. 2.6)

Розв'язанням. На шаховій дошці 8×8 розташована 31 шахова фігура Розіб'ємо дошку (рис.2.7) на квадрати 2×2 . В будь-якому прямокутнику 2×2 повинні бути зайняті шаховими фігурами дві клітки, щоб в нього не можна вже було помістити вільний трикутник з трьох кліток.

Так як всю дошку можна покрити 16 квадратами 2×2 , які не перекривають один одного, то всього фігур має бути поставлено 32, а за умовою їх всього 31. Значить, згідно з принципом Діріхле знайдеться квадратик

2×2 , в якому виявиться тільки одна фігура, а в ній і міститься вільний



трикутник.

Рис. 2.6

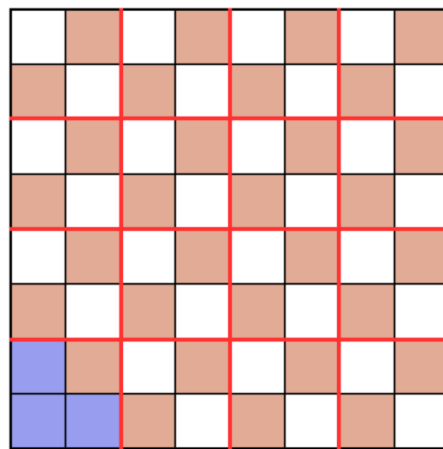


Рис. 2.7

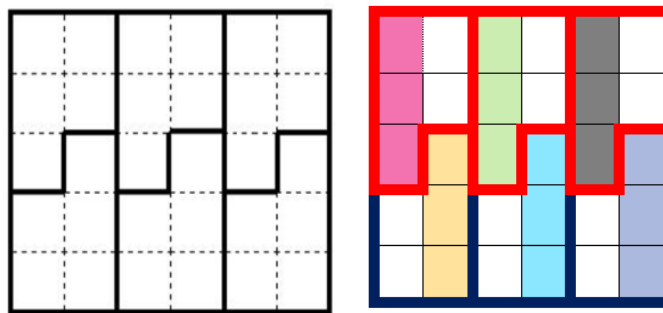
Задача 2.11. В прямокутнику 5×6 зафарбовано 19 кліток. Доведіть, що в ньому можна вибрати квадрат 2×2 , в якому зафарбовано не менше трьох кліток.

Розв'язування. Поділимо прямокутник на 6 частин по 5 кліток (рис.2.8). Розглянемо в кожній виділеній нами частини квадрат 2×2 . Розглянемо „найгірший” “варіант. Нехай в такому квадраті зафарбовано тільки 2 клітки.

Третьою зафарбованою буде п'ята клітка в кожній виділеній частині (рис.2.8). Всього зафарбовано вісімнадцять кліток. Згідно з принципом Діріхле в одній з цих частин буде зафарбовано не

менш ніж 4 кліток, бо $19 = 6 \cdot 3 + 1$.

Отже, у нас знайдеться один з 6 квадратів 2×2 , в якому буде



У загальному випадку в такому квадраті може бути зафарбовано навіть 4 клітки, але може і не бути такого. А ось *обов'язково* знайдеться квадрат, в якому зафарбовано 3 клітки. Це і буде шуканий квадрат. Доведено.

Рис. 2.8

Задача 2.12. Площина розмальована двома кольорами. Доведіть, що знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1 м.

Розв'язання.

Площина розмальована двома кольорами. Розглянемо дві точки різних кольорів на відстані, меншій за 2 м і побудуємо рівнобедрений трикутник із бічною стороною 1 м. Одна з цих точок і вершина побудованого трикутника обов'язково матимуть однаковий колір. Отже, знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1 м. Доведено.

Задача 2.13. Доведіть, що серед 82 кубиків, кожен із яких помальовано певним кольором, існує 10 кубиків різного кольору або 10 кубиків одного кольору.

Розв'язання.

Якщо для розмалювання 82 кубиків використано не менше ніж 10 кольорів, то зрозуміло, що обов'язково знайдеться 10 кубиків різного кольору.

Якщо ж для розмалювання 82 кубиків використано не більше ніж 9 різних кольорів, то, згідно з принципом Діріхле, знайдеться принаймні 10 кубиків

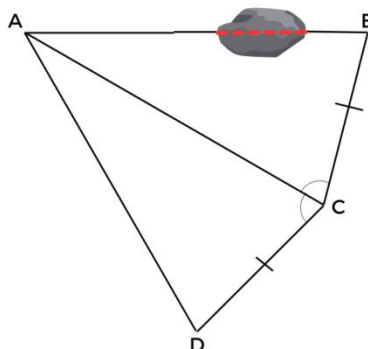
одного кольору, тому що $82 = 9 \cdot 9 + 1$. Тут у ролі „ зайців “ виступають кубики, а в ролі „ кліток “ — кольори.

Відрізки, кути, вписані кути

Вже найперші практичні потреби людей привели їх до необхідності робити певні вимірювання довжин відрізків та величин кутів, встановлювати деякі співвідношення між ними. Напевно, найвизначнішими із цих співвідношень слід визнати твердження про суму кутів трикутника та знамениту теорему Піфагора.

Говорячи тут про вимірювання відрізків та кутів, ми не маємо на увазі використання вимірювальних приладів. Хоч, правда, у деяких випадках і це не завадить.

Задача 2.14. Визначити відстань між точками А і В (див. рис. 2.9), між



якими знаходиться нездоланна перешкода.

Розв’язання. Виберемо точку С так, щоб на відрізках АС та ВС перешкоди не було. Побудуємо кут АСD, рівний куту АСВ, і відкладемо $CB = CD$. Тоді матимемо, що $\triangle ACB = \triangle ACD$. Звідки $AB = AD$. Тому, якщо між А і D перешкоди немає, то задача розв’язана.

Рис. 2.9

Хоч ми і скористалися тут безпосередніми вимірюваннями відрізків, проте ці вимірювання супроводжувало використання певних властивостей геометричних фігур, а саме – ознаки рівності трикутників. Далі основною метою буде не безпосереднє вимірювання довжин відрізків чи величин кутів, а

встановлення принципової можливості знаходження лінійних чи кутових величин за відомими значеннями окремих із них, а також доведення заданих співвідношень між цими величинами.

Задача 2.15. Основи AD та BC трапеції ABCD дорівнюють a та b ($a > b$). Знайти довжину відрізка, який відрізається діагоналями трапеції на її середній лінії.

Розв'язання. Нехай MN – середня лінія заданої трапеції ABCD, K та P – точки її перетину з діагоналями AD та BC відповідно (див. рис. 2.10). Тоді MK та PN – середні лінії трикутників ABC та DCB, паралельні їх спільній основі BC. Звідси одержуємо:

$$KP = MN - MK - PN = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

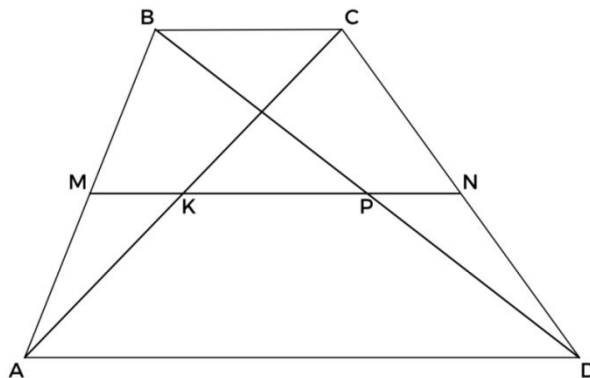


Рис. 2.10

Задачі на перерозподіл площ

Поняття площі фігури відноситься до найдавніших понять, з якими довелося стикатися людям у своїх практичних потребах. Безумовно, найлегше вирішувалося питання про обчислення площ прямокутних ділянок. Але, як свідчить, наприклад, формула Герона, проблеми з обчисленням площ інших важливих фігур теж були розв'язані порівняно давно.

До основних формул, за якими обчислюють площу трикутника, відносяться:

$$S = \frac{1}{2}ah_a, S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A, S = pr,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} - \text{формула Герона.}$$

Тут a, b, c – сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ його півпериметр, r – радіус вписаного кола.

Зауважимо, що аналогічні формули можна одержати і для інших многокутників. Зокрема для опуклого чотирикутника $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$, де d_1, d_2 – діагоналі, φ – кут між ними, $S = pr$. А для вписаного чотирикутника також $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. Тут $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів цих фігур. Останній факт використаємо при розв'язуванні наступної задачі.

Задача 2.16. Довести, що коли середини сторін двох опуклих чотирикутників співпадають, то площі цих чотирикутників рівні.

Розв'язання. Нехай чотирикутник $ABCD$ опуклий, M, N, K, L – середини його сторін (див. рис. 2.11). Тоді $\triangle MCN \sim \triangle BCD$, $MN:BD = 1:2$. Отже, $S_{\triangle MCN} = \frac{1}{4}S_{\triangle BCD}$. Аналогічно $S_{\triangle ALK} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle KDN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ACD}$. Тому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{MNKL}$. А отже, для будь-якого опуклого чотирикутника з серединами сторін M, N, K, L площа буде одна і та ж і дорівнюватиме $2 \cdot S_{MNKL}$.

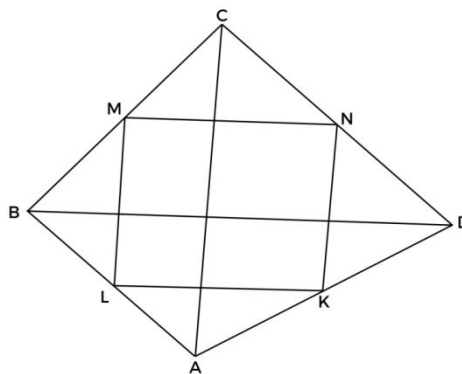


Рис. 2.11

Задача 2.17. . На сторонах АВ та ВС трикутника АВС вибрали відповідно точки Е та F так, що відрізки AF та CE перетинаються на медіані ВМ. Довести, що площі трикутників АСЕ та АCF рівні.

Розв'язання. Проведемо через точку К перетину відрізків AF та CE пряму $PR \parallel AC$ (див. рис. 2.12). Оскільки $AM = MC$, то $PK = KR$. Нехай h_1, h_2, H_1, H_2 – відповідно довжини висот трикутників PEK, RFK, AEC, AFC, опущених із вершин Е та F. Тоді $\frac{h_1}{H_1} = \frac{PK}{AC} = \frac{KR}{AC} = \frac{h_2}{H_2}$. Якщо d – відстань між прямими PR та AC, то $h_1 = H_1 - d, h_2 = H_2 - d$ і тоді з останньої рівності одержимо $\frac{H_1 - d}{H_1} = \frac{H_2 - d}{H_2}$, тобто $H_1 d = H_2 d, H_1 = H_2$. Оскільки в трикутниках AEC та AFC основа AC спільна, то $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle AFC}$.

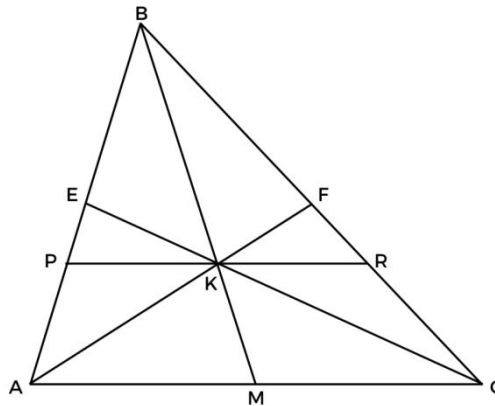


Рис. 2.12

Визначні точки та лінії в трикутнику

Відзначимо також й окремі властивості деяких цікавих ліній та точок у трикутнику:

1). Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, рахуючи від вершин трикутника. Кожна медіана ділить площу трикутника пополам, а всі три разом – на 6 рівновеликих частин.

2). Висоти трикутника перетинаються в одній точці. Точки, симетричні до неї відносно сторін трикутника, лежать на описаному колі цього трикутника.

3). Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці – центрі описаного кола цього трикутника.

4). Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – центрі вписаного у цей трикутник кола. Кожна бісектриса точкою перетину - ділиться у

відношенні, рівному відношенню суми прилеглих сторін трикутника до його протилежної сторони. Протилежну ж сторону бісектриса ділить у відношенні, рівному відношенню прилеглих сторін. Щодо бісектриси довільного кута, то, крім того, що вона ділить цей кут пополам, доцільно не забувати, що така лінія є геометричним місцем точок рівновіддалених від сторін кута.

5). Відрізки дотичних до кола, проведені з однієї точки поза цим колом, рівні між собою. Звідси, зокрема отримуємо: у чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні.

Задача 2.18. Визначити кути трикутника, у якому висота, бісектриса та медіана поділяють один із кутів на 4 рівні частини.

Розв'язання. Продовжимо висоту BH та медіану BM до перетину з описаним навколо $\triangle ABC$ колом відповідно в точках K та N (див. рис. 2.13). Оскільки $\angle ABH = \angle CBM$, то $\sphericalangle AK = \sphericalangle CN$. Отже, $KN \parallel AC$, $KN \perp BK$. Тому BN – діаметр описаного кола, причому не перпендикулярний до AC і проходить через середину AC . А отже, AC також є діаметром. Звідси $\angle ABC = 90^\circ$. Оскільки при цьому $\angle ABH = \frac{1}{4} \angle ABC = 22,5^\circ$, то тепер легко знаходимо, що $\angle BAC = 67,5^\circ$, $\angle ACB = 22,5^\circ$.

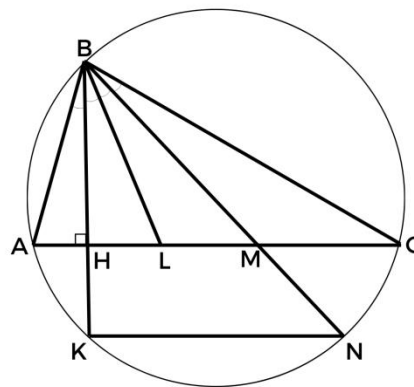


Рис. 2.13

Нагадаємо, що центр описаного навколо трикутника кола лежить у точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Відповідно, точка перетину бісектрис є центром кола, вписаного у цей трикутник. На основі взаємного розташування цих точок можна робити певні висновки про деякі властивості трикутника.

Задача 2.19. Визначити кути рівнобедреного трикутника, в якого центри вписаного та описаного кіл симетричні відносно основи.

Розв'язання. Зрозуміло, що поза трикутником може бути лише центр описаного кола (на рисунку 2.14 – це точка O). Якщо I – центр вписаного кола, то маємо:

$\angle BAI = \angle MAI = \angle MAO = \alpha$. Але оскільки OA та OB радіуси описаного кола, то $\angle ABO = \angle BAO = 3\alpha$. Крім того, $BM \perp AC$. Отже,

$\angle MBA + \angle BAM = 90^\circ$, тобто $3\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 18^\circ$. Звідси знаходимо $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$, $\angle ABC = 108^\circ$.

Наступні дві задачі теж будуть пов'язані із цікавими точками в трикутнику та з описаним колом.

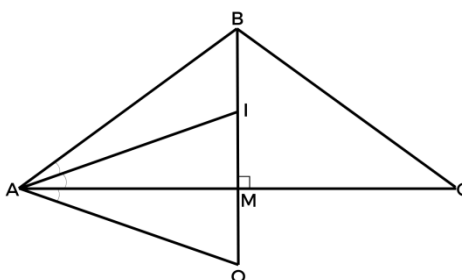


Рис. 2.14

РОЗДІЛ 3. Розробка факультативного заняття

Конспект факультативного заняття з геометрії для підготовки до олімпіад «У світі геометрії»

Мета:

Навчальна: Ознайомити учнів із методами розв'язання олімпіадних задач з геометрії, такими як принцип Діріхле, властивості кутів, визначних точок та ліній в трикутнику, розвинути вміння учнів аналізувати умови задач, обирати відповідні методи та створювати план розв'язання.

Розвивальна мета: Сприяти розвитку логічного та аналітичного мислення через вирішення складних геометричних задач, розвивати просторове уявлення, уміння працювати з геометричними фігурами та знаходити нестандартні підходи до задач.

Виховна мета: Виховувати наполегливість і цілеспрямованість у процесі розв'язання задач, формувати інтерес до математики та олімпіадної діяльності, стимулюючи прагнення до самовдосконалення та інтелектуального розвитку.

Хід уроку

1. Повідомлення мети заняття та мотивація навчальної діяльності (10 хвилини)

Олімпіадні задачі – це своєрідний тренажер для мозку. Вони розвивають не тільки математичне мислення, але й багато корисних життєвих навичок, таких як наполегливість, аналітичне мислення та вміння знаходити красу в науці. Ці навички знадобляться вам незалежно від того, чи оберете ви професію, пов'язану з математикою, чи ні.

Для актуалізації знань доцільно використати вікторину у Quizizz. Вона складається з коротких задач, які зможуть розв'язати більшість дев'ятикласників (рис. 3.1-3.2). Знайти вікторину можна за посиланням: <https://quizizz.com/admin/presentation/671fd2f5082691cbfbff4732>.

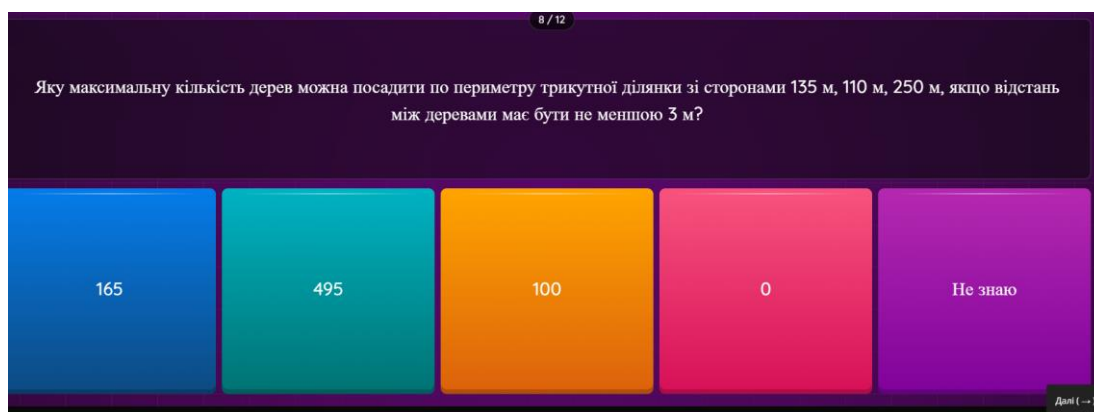


Рис. 3.1

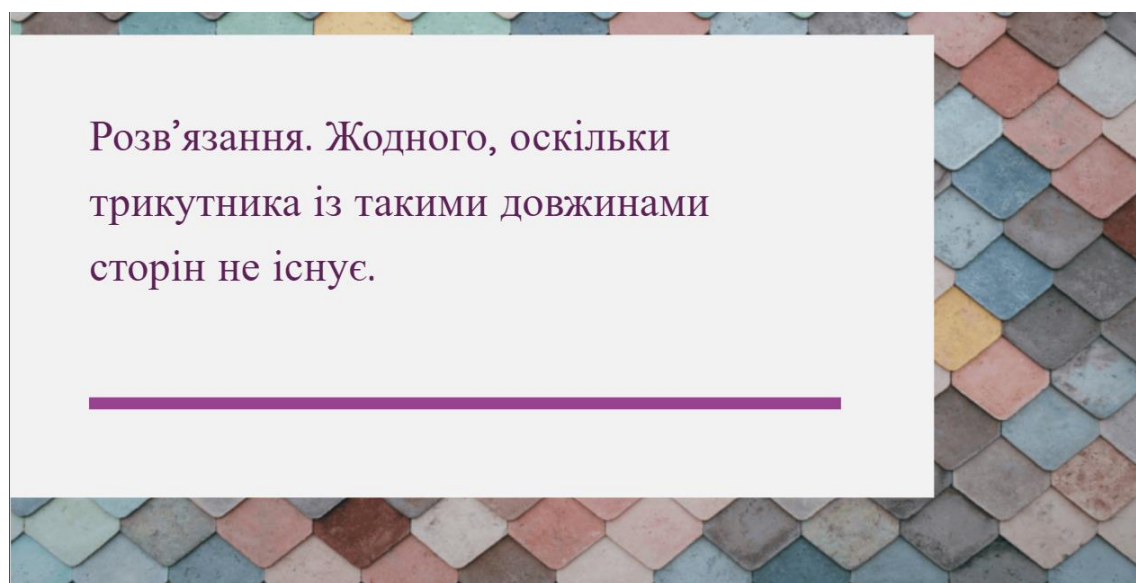


Рис. 3.2

2. Теоретична частина (10 хвилин)

Доцільно розповісти учням, як аналізувати умову та формулювати план розв'язання, а також про методи та прийоми розв'язання. Для цього зручно використати презентацію (рис. 3.3).

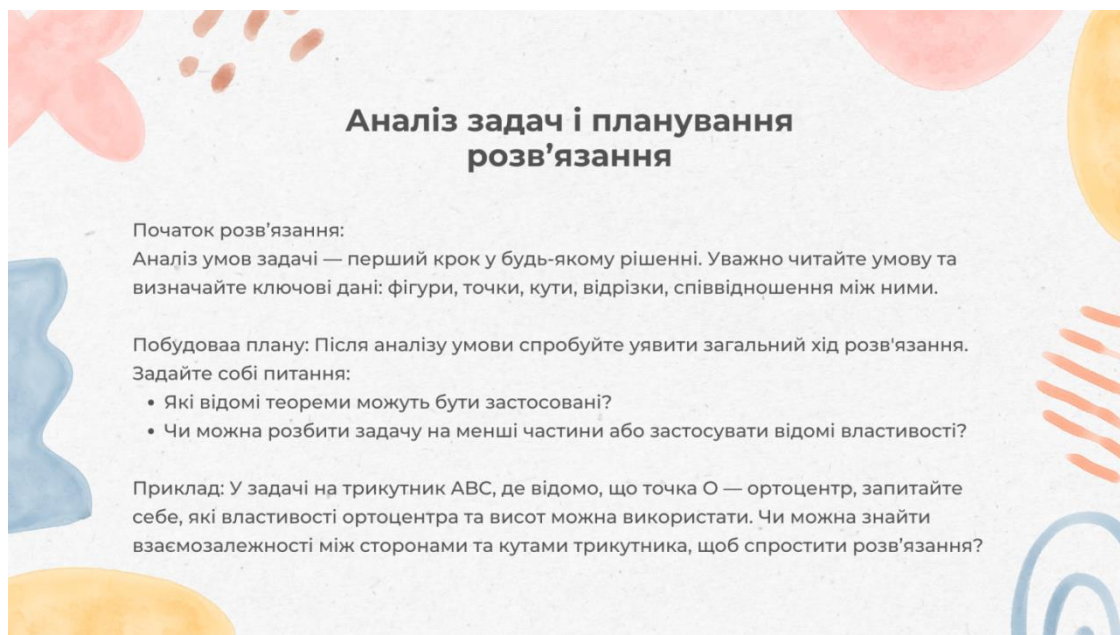


Рис. 3.3

3. Практична частина (20 хвилин)

Учням пропонують об'єднатися у групи, обговорити завдання і розв'язати їх.

Задача 3.1. На площині дано шість точок загального положення (жодні три з них не лежать на одній прямій). Кожні дві точки з'єднані відрізком червоного або синього кольору. Довести, що знайдеться трикутник із вершинами в даних точках, усі сторони якого мають один колір.

Розв'язання.

Позначимо дані точки - A, B, C, D, M, K . Із точки K виходять 5 відрізків двох кольорів: червоного або синього. За принципом Діріхле, серед цих відрізків обов'язково є 3 відрізки одного кольору. Нехай це відрізки червоного кольору. Наприклад, відрізки KA, KC, KM . Тоді розглянемо ще відрізки AC, CM, AM . Вони з умови задачі можуть бути теж або червоні, або сині.

Треба розглянути всі можливі випадки:

а) Серед відрізків AC, CM, AM немає відрізка червоного кольору. Тоді в трикутнику ACM всі сторони сині. Отже, твердження доведено.

б) Серед цих відрізків є відрізок червоного кольору, наприклад, відрізок CM . Тоді в трикутнику KCM всі сторони червоні. Отже, знайдеться трикутник, усі сторони якого мають один колір. Доведено.

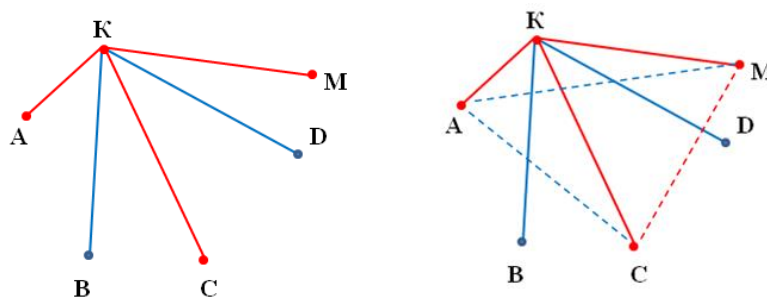


Рис. 3.4

Задачі на відрізки, кути та вписані кути: Розглянути задачі, де використовуються властивості кутів і вписаних кіл.

Задача 14.7. (8-9). Знайти суму кутів у вершинах A , B , C , D , E фігури “зірочка” (рис 3.3). Розв’язання. Зрозуміло, що можна було б просто виміряти величину кожного із кутів і додати одержані значення. Але таким чином потрібну суму ми зможемо одержати лише наближено, що не може вважатися розв’язанням. Тому поступимо інакше. З’єднаємо точки A та E і позначимо через F точку перетину відрізків AD та BE . Оскільки $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180^\circ$, $\angle FAE + \angle FEA + \angle AFE = 180^\circ$, $\angle AFE = \angle BFD$, то $\angle B + \angle D = \angle FAE + \angle FEA$.

А отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + \angle CAE + \angle CEA = 180^\circ$.

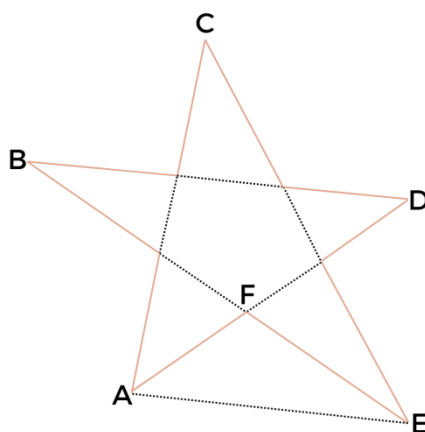


Рис. 3.5

4. Рефлексія. (5 хвилин)

Для рефлексії використаємо дошку Padlet. Учням потрібно відповісти на запитання "Що було найцікавішим у цьому занятті?" або "Яка задача була найскладнішою?" (рис. 3.6). Такий спосіб рефлексії, не тільки покаже враження учнів від уроку, але дозволить учням ділитися рефлексією анонімно, що може сприяти більш відвертому зворотному зв'язку. Приклад дошки Padlet знаходиться за посиланням: <https://padlet.com/ulanabejsuk/padlet-3g4b1q1ekzhbvtfw>.

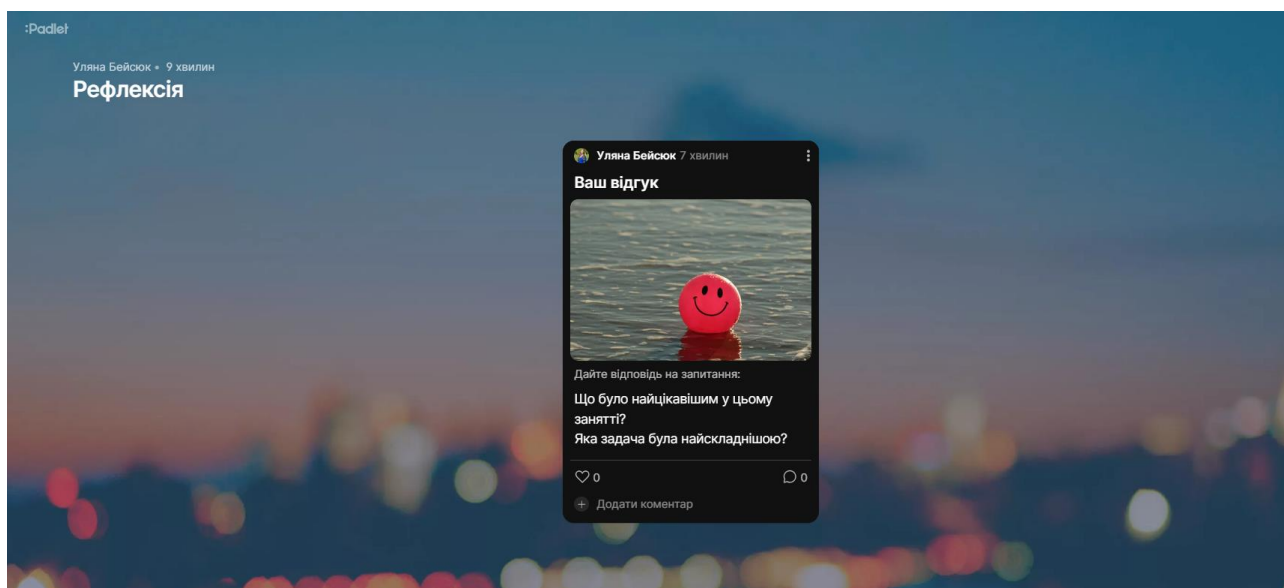


Рис. 3.5

ВИСНОВКИ

Метою даної дипломної роботи було дослідження процесу формування математичної компетентності учнів через розв'язування олімпіадних задач, зокрема задач підвищеної складності з геометрії, а також розробка методичних підходів для ефективної підготовки учнів до математичних змагань. У ході роботи поставлену мету було досягнуто, а результати дослідження підтвердили важливість математичних олімпіад як інструменту розвитку аналітичного мислення, логічних навичок та мотивації учнів до вивчення математики.

У процесі дослідження було виконано такі завдання:

- Проаналізовано історію математичних олімпіад у світі та в Україні, визначено їхню роль у формуванні математичних здібностей учнів. Встановлено, що математичні олімпіади мають значний вплив на розвиток критичного мислення та математичних навичок учнів.
- Досліджено основні типи олімпіадних задач підвищеної складності, зокрема задач з геометрії, які стимулюють розвиток логічного мислення. Виявлено, що задачі на застосування принципу Діріхле, розфарбування, перерозподіл площ та визначення ключових точок у трикутниках є ефективними для розвитку математичних компетентностей.
- Визначено методи та прийоми розв'язування складних геометричних задач, які дозволяють учням розвинути стійкі навички критичного аналізу та пошуку оптимальних розв'язків.
- Розроблено факультативне заняття з розв'язування олімпіадних задач, яке спрямоване на підвищення рівня математичної компетентності учнів та розвиток їхнього інтересу до участі в математичних змаганнях.
- Апробовано факультативне заняття на базі Пістинського ліцею. Оригінал акту впровадження додано до роботи.

У ході дослідження було розроблено та обґрунтовано методичні підходи, які допомагають учням формувати математичну компетентність шляхом розв'язування задач олімпіадного рівня. Визначено, що такі задачі сприяють

розвитку аналітичного, критичного мислення і навичок самостійного пошуку рішень, які важливі не лише в математиці, а й в інших сферах діяльності.

Результати дослідження мають значну цінність для освіти, оскільки запропоновані методи можуть використовуватися в навчальному процесі для підготовки учнів до математичних олімпіад та конкурсів. Методичні рекомендації можуть бути корисними для вчителів і тренерів, що готують учнів до змагань, а також сприятимуть підвищенню інтересу учнів до математики й розвитку їхніх академічних навичок.

Подальші дослідження можуть включати розробку нових підходів до вирішення олімпіадних задач та більш детальне вивчення психологічних аспектів участі учнів у математичних змаганнях. Окрім цього, можлива розробка та апробація факультативних програм для індивідуальної підготовки обдарованих учнів.

Проведене дослідження підкреслює важливість математичних олімпіад у розвитку математичної компетентності та інтелектуальних здібностей учнів. Запропоновані методичні підходи можуть бути корисними для шкіл, олімпіадних тренерів та педагогів, що прагнуть забезпечити учням належний рівень підготовки та стимулювати їхнє зацікавлення математикою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Богомолів Г. І. Геометрія. Задачі для профільного навчання та олімпіадної підготовки. – Київ: Генеза, 2021. – 176 с.
2. Волков В. Шкільні математичні олімпіади: збірник задач та методичні рекомендації. – Київ: Освіта, 2008. – 256 с.
3. Збірник задач Всеукраїнської математичної олімпіади. – Київ: Інститут модернізації змісту освіти, 2020. – 250 с.
4. Король Ю. М. Збірник задач з геометрії: Задачі для математичних гуртків та олімпіад. – Львів: Літопис, 2015. – 220 с.
5. Олійник Ю. І. Методика навчання розв'язання задач із планіметрії та стереометрії. – Харків: Ранок, 2016. – 192 с.
6. Савін І. Ф. Збірник задач з геометрії для підготовки до олімпіад. – Донецьк: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 176 с.
7. Скопецький О. І. Методика розв'язання складних задач з геометрії. – Київ: Вища школа, 2009. – 180 с.
8. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.
9. Федак І. В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 100 с.
10. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.