

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему “**Використання похідної при розв’язуванні прикладних задач**”

Виконала:

студентка групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

ДОВГАН К. – Л. В.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник НИКИФОРЧИН І. В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАНЬ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ	6
1.1. Історична довідка про похідну.	6
1.2. Основні теоретичні відомості похідної.	7
1.3. Аналіз підручників при вивченні похідної у шкільному курсі математики.	12
РОЗДІЛ 2. РІЗНІ ТИПИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ, ДЕ ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ	28
2.1. Задачі природознавства, які приводять до поняття похідної.	28
2.2. Економічні задачі, які приводять до поняття похідної.	34
2.3. Задачі на застосування похідної до дослідження функцій.	38
2.4. Оптимізаційні задачі, для розв’язування яких використовується похідна.	41
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТТЯ НА ТЕМУ: “ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ І ЗАДАЧІ НА ОПТИМІЗАЦІЮ”	46
ВИСНОВОК	63
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	65

ВСТУП

Поняття похідної – одне з фундаментальних понять математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в соціальних, природничих чи економічних науках. Наприкінці XVII століття до відкриття похідної, незалежно один від одного, прийшли два відомих вчених – Ньютон і Лейбніц. Проте Архімед, ще задовго до цього, розв’язав задачу на побудову дотичної до кривої та знайшов максимум деякої функції.

Розділ алгебри та початку аналізу “Похідні та їх застосування” займає важливе місце у шкільному курсі математики, перш за все тому, що має велике прикладне значення. Навчальна програма відводить на вивчення даної теми приблизно 26 год. (загальноосвітньої школи) та 46 год. (гімназії та ліцеї з поглибленим вивченням математики). В цьому розділі вводиться поняття похідної, розкривається її геометричний і механічний зміст. В курсі математики за допомогою диференціального числення досліджуються властивості функцій, будуються їхні графіки, розв’язуються задачі на найбільше й найменше значення а також поглиблюються історичні знання з математики.

В сучасній школі має забезпечуватись виховання всебічно розвиненої людини, тому потрібно дбати про: вироблення в здобувачів освіти уміння застосовувати свої знання на практиці; виховання інтересу до предмета; розвиток розумових здібностей; вміння самостійно здобувати знання.

Тема «Застосування похідної при розв’язуванні задач у шкільному курсі математики» має важливе значення в загальному розвитку учнів. В школярів *формується*: здатність самостійно аналізувати ситуацію, вміння використовувати набуті знання на практиці, навик швидкої адаптації до нових (нестандартних) умов; *розвивається*: здатність досліджувати і робити обґрунтовані висновки, інтерес до алгебри і початків аналізу, культура усної та письмової математичної мови. Загалом, вивчення даної тематики робить суттєвий внесок у розвиток логічної культури учня. Про це свідчать також роботи таких педагогів-математиків як Т. В. Думанська [20], О. Е. Корнійчук [25], В. Д. Погребний [37], З. І. Слєпкань [40] та інші.

Отже, тема «Похідна» - це один з найважливіших розділів курсу математичного аналізу, оскільки це поняття є основним в диференціальному численні а також служить вихідною базою при побудові інтегрального числення.

Актуальність теми дослідження полягає в тому, що кожна сучасна людина, повинна бути здатна не лише ефективно оволодівати знаннями, а й вміти

застосовувати їх на практиці, швидко адаптуватися до нестандартних ситуацій. Тому, я хочу показати, які саме задачі прикладного характеру можна використовувати на уроках математики, щоб якомога краще пояснити учням, навіщо потрібно вивчати похідну та де використовувати отримані знання в житті.

Об'єктом дослідження даної кваліфікаційної роботи є: використання похідної при розв'язуванні прикладних задач.

Предмет дослідження – цікаві задачі з математики а також фізики, хімії, економіки, біології, географії, що розв'язуються за допомогою похідної.

Метою роботи є аналіз та узагальнення методів та прийомів розв'язування різного роду задач прикладного значення.

Завдання кваліфікаційного дослідження:

- розглянути історичну довідку про похідну;
- навести основні теоретичні відомості про похідну;
- проаналізувати підручники з алгебри і початків математичного аналізу для учнів 10 класу;
- розглянути різні типи прикладних задач, які приводять до поняття похідної;
- розробити факультативне заняття з використанням інноваційних технологій.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У першому розділі можна ознайомитись з історичними відомостями похідної, з такими поняттями як: означення похідної, основні теореми, необхідні та достатні умови зростання (спадання) функції, достатня ознака екстремуму функції та інше. Також в даній частині висвітлено аналіз теми “Похідна та її застосування” всіх сучасних підручників з Алгебри і початку аналізу.

Другий розділ містить в собі різні типи прикладних задач, розв'язування яких потребує знань про похідну. Тут наведено задачі: природознавства (поняття про прискорення, миттєву швидкість, кутову швидкість, лінійну густоту та інші...), економіки (поняття продуктивності праці, граничного витягу, граничних витрат та інші...), до дослідження функцій а також оптимізаційні.

В третьому розділі даної кваліфікаційної роботи ви можете ознайомитись із розробкою факультативного заняття на тему: “Знаходження найбільшого і

найменшого значення функції на відрізку і задачі на оптимізацію” з використанням інноваційних технологій.

У висновку узагальнено всі результати досліджень.

Обсяг даної кваліфікаційної роботи складає – 68 ст.

РОЗДІЛ 1. ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАНЬ В КУРСІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ

1.1. Історична довідка про похідну.

Похідна - одне з фундаментальних понять математики. Його появі передували роботи французького математика П'єра Ферма, який у 1629 році запропонував знаходити найбільше і найменше значення функції, а також проведення дотичних до довільних прямих саме за допомогою похідної. Цьому також сприяли роботи Рене Декарта, який близько 1637 року розробив метод координат і основи аналітичної геометрії. Проте в 1666 році, до відкриття похідної, незалежно один від одного, прийшли англійський математик Ісаак Ньютон і, дещо пізніше, німецький математик Готфрід Лейбніц.

Ісаак Ньютон (1643-1727) – англійський математик та філософ, один із творців диференціального обчислення. Головна його праця, випущена 1687 року, - "Математичні начала натуральної філософії" - надала колосальний вплив на розвиток природознавства та стала поворотним пунктом в історії цього предмету. Ньютон ввів поняття похідної, розв'язуючи задачі про миттєву швидкість, тим самим розкрив її фізичний (механічний) зміст.

Г.В. Лейбніц (1646-1716) - німецький математик та філософ, творець Берлінської академії наук. Основоположник диференціального обчислення. Він ввів велику частину сучасної символіки математичного аналізу. Лейбніц ввів поняття похідної, вирішуючи геометричну задачу на проведення дотичної до довільної лінії, пояснивши цим її геометричний зміст. Саме цей вчений розробив позначення $\frac{dy}{dx}$, що використовується і сьогодні.

Задовго до цього Архімед (287 до н.е. – 212 до н.е) – давньогрецький математик, зміг вирішити задачу на побудову дотичної до спіралі, застосовуючи граничні переходи, а також зумів знайти максимум функції. Також частково поняття про дотичну зустрічалося в роботах італійського математика, інженера - Нікколо Фонтане під прізвиськом Тарталья (1499-1557).

У XVII ст. на основі вчення Г. Галілея(1564 – 1642) розвинулася кінематична концепція похідної. Поняття похідної зустрічається вже у Р. Декарта (1596 – 1650), Ж. Роберваля (1602 – 1675), Д. Грегорі(1638 – 1675), І. Барроу(1630 – 1677). Також великий внесок у диференціальне числення внесли Лопіталь (1661-1704), Бернуллі (1744-1807), Лагранж (1736-1813), Гаусс (1777-1855), Коші (1789-1857).

Важливу роль у розвитку диференціального числення відіграв Леонард Ейлер (1707-1783), який у праці «Диференціальне числення» (1755р.) використовував локальний екстремум, найменші та найбільші значення функції. Він перший почав користуватись грецькою буквою Δ (дельта) для позначення приросту функції та аргумента.

Жозеф Луї Лагранж - французький математик, основоположник варіаційного числення, розробник методу зведення квадратичної форми до суми квадратів. Саме він, у 1797 році, сформулював сучасне позначення терміну “похідна”.

Огюстен Коші (1789-1857) – французький математик, який точно довів теореми обчислення нескінченно малих. Саме цей вчений визначив похідну через границю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

що і дано науці строге та формальне визначення похідної.

За допомогою диференціального числення було розв’язано цілий ряд задач теоретичної механіки, астрономії та фізики. Зокрема, використовуючи методи диф. числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст. Саме за допомогою цих методів математики у XVIII та XIX ст. вивчали різні криві, навчилися визначати кривизну ліній, знайшли криву найшвидшого спуску матеріальної точки. І сьогодні поняття похідної широко використовується в різних галузях науки та техніки.

1.2. Основні теоретичні відомості похідної.

Визначення похідної.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ на певному проміжку. Візьмемо будь-яку внутрішню точку x_0 з даного проміжку. Надамо значенню x_0 довільного приросту Δx такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала цьому проміжку.

Тоді:

1. Знайдемо приріст Δy функції в точці x_0 :

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

3. Знайдемо границю цього відношення за умови, що $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то y називають **похідною функції** $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають y' або ж $f'(x_0)$.

Отже:

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Функція, яка має похідну в точці x_0 , називається **диференційованою в цій точці**.
- Функція, яка має похідну в кожній точці певного проміжку, називається **диференційованою на цьому проміжку**. Операція знаходження похідної називається **диференціюванням**.

Геометричний зміст похідної.

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 – це кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці x_0 , тобто:

$$f'(x_0) = \tan \alpha = k$$

Іншими словами, похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $(x_0, f(x_0))$.

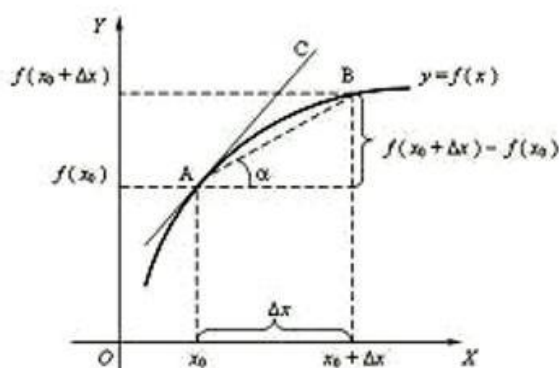


Рис. 1.1

k – кутовий коефіцієнт

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної.

Фізичний зміст похідної.

Якщо деяка матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється за законом $s = s(t)$, то швидкість руху $v(t)$ у момент часу t дорівнює:

$$v(t) = s'(t)$$

Іншими словами: якщо $s(t)$ – координата тіла в момент часу t , то похідна $v(t) = s'(t)$ визначає швидкість руху тіла, а друга похідна $a(t) = v'(t) = s''(t)$ визначає прискорення.

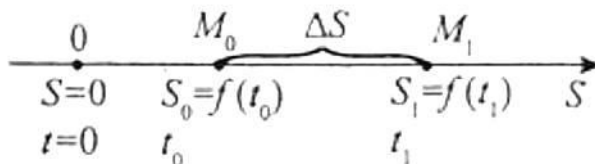


Рис. 1.2

Основні правила диференціювання.

- **Похідна суми (різниці) функцій:**

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Доведення:

1. похідна суми функцій, за визначенням, обчислюється як границя:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}$$

2. розкриємо дужки:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

3. розділимо границю на дві окремі частини:

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

4. застосуємо визначення похідної і отримаємо:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

що і треба було довести.

- **Похідна добутку функцій:**

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$$

Доведення:

1. похідна добутку функцій, за визначенням, обчислюється як границя:

$$(f(x) \times g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

2. додамо та віднімемо $f(x)g(x + \Delta x)$, щоб зручніше можна було б розділити вираз:

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(x))' &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)] + [f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)[f(x+\Delta x) - f(x)] + f(x)[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

3. розділимо границю на дві окремі частини:

$$\begin{aligned} (f(x) \times g(x))' &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x)[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \end{aligned}$$

4. застосуємо визначення похідної і отримаємо:

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x),$$

адже $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$, і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$, що і треба було довести.

- **Похідна частки:**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{g(x)^2}$$

Доведення аналогічне попередньому.

- **Похідна складеної функції (правило ланцюга):**

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

Доведення:

1. Похідна складеної функції за означенням:

$$f(g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

2. Нехай $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$. Тоді:

$$f(g(x))' = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \Delta u) - f(g(x))}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

3. Розділимо границі:

$$f(g(x))' = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \Delta u) - f(g(x))}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

4. Застосуємо визначення похідних:

- $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \Delta u) - f(g(x))}{\Delta u} = f'(g(x))$
- $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$

5. Підставивши обчислені границі отримаємо:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

що і треба було довести.

Похідні найпростіших функцій.

Таблиця похідних функцій	
$c' = 0, c - const$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(ax + b)' = a$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(x^2)' = 2x$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(x^3)' = 3x^2$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \ln a$	

Рис. 1.2

Диференційованість і неперервність.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці $x = x_0$, то вона обов'язково неперервна в цій точці.[36]

Доведення:

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0 , то в ній виконується нерівність $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Застосуємо таку теорему: якщо $\lim y = b$, то $y = b + \alpha$, де α – нескінченно мала функція. Тоді:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

За означенням, функція неперервна в точці тоді, і тільки тоді, коли $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Перейдемо до границі в рівності $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x) = 0$$

Звідси випливає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 .

Зауваження: оберненої теорема не завжди вірна. Функція може бути неперервною, але не диференційованою (наприклад: $f(x) = |x|$ у точці $x = 0$).

Отже, похідна — це фундаментальне поняття математичного аналізу, яке описує швидкість змін функції. Вона має геометричний, фізичний і прикладний зміст, дозволяючи досліджувати та моделювати різні процеси в природі та техніці.

1.3. Аналіз підручників при вивченні похідної у шкільному курсі математики.

Оскільки вибір підручника є однією з найважливіших складових викладу навчального матеріалу, тому в даному пункті можна побачити, як поняття похідної подається у сучасних шкільних підручниках з математики, наскільки повно і послідовно розкриваються теоретичні аспекти, а також розглянуто приклади задач, що ілюструють застосування похідної.

Поглиблений рівень:

1. Алгебра і початки аналізу (поглиблений рівень) 10 клас, автори: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. [1]

Профільний рівень:

2. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас, автори: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір.[2]
3. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас, автори: Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова.[13]
4. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас, автори: О. С. Істер, О. В. Єрміна.[34]

Академічний рівень:

5. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас, автор: Є. П. Нелін.[21]
6. Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас, автори: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір.[3]

Рівень стандарту:

7. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) 10 клас, автори: Г. П. Бевз, В. Г. Бевз.[14]
8. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) 10 клас, автор: О. С. Істер.[35]
9. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту) 10 клас, автори: А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір.[4]

Проаналізуємо підручник **перший**.

1) Метод викладання.

Автори виклали навчальний матеріал абстрактно-дедуктивним методом. Наочні приклади використано доцільно.

2) Структура теми в підручнику.

Тема "Похідна та її застосування" охоплює такі аспекти:

1. Визначення похідної:

- Вступ через поняття приросту функції та границі.
- Означення похідної.
- Геометричний зміст (поняття дотичної до графіка функції).

2. Правила диференціювання:

- Похідна суми, різниці, добутку, частки функцій.

- Похідна складеної функції.
- Таблиця похідних основних елементарних функцій.

3. Застосування похідної:

- Дослідження функцій (зростання, спадання, екстремуми).
- Побудова графіків функцій.
- Розв'язання оптимізаційних задач.

4. Практичні аспекти:

- Приклади із фізики, економіки та інших сфер.

3) **Переваги подання теоретичного матеріалу.**

1. Послідовність викладу:

- Матеріал викладено у логічній послідовності: від інтуїтивного розуміння приросту функції до формального означення похідної.
- Увага до основних понять, таких як границя, приріст функції та дотична.
- Теоретичні положення супроводжуються прикладами, що полегшує розуміння.

2. Геометричний і фізичний зміст похідної:

- Значну увагу приділено поясненню геометричного сенсу похідної через нахил дотичної.
- Наведені приклади задач із фізики, які демонструють зв'язок між похідною та швидкістю.

3. Візуалізація:

- Підручник містить якісні графіки та діаграми, що ілюструють поняття похідної.
- Наприклад, графічне пояснення знаходження екстремумів функції.

4. Таблиця похідних:

- У підручнику наведено чітку таблицю похідних елементарних функцій, що зручно для запам'ятовування.

4) **Практичні завдання**

1. Різноманітність задач:

- Підручник містить як базові задачі на обчислення похідних, так і складніші задачі на дослідження функцій та оптимізацію.
- Представлено задачі реального життя, наприклад, обчислення максимальної продуктивності або мінімальних витрат.

2. Задачі на дослідження функцій:

- Завдання на визначення проміжків зростання і спадання функцій, екстремумів.
- Побудова графіків функцій з використанням похідної.

3. Оптимізаційні задачі:

- Є задачі на пошук оптимальних значень, наприклад, мінімальної вартості або максимальної площі.
- Задачі чітко структуровані, супроводжуються поясненнями розв'язання.

4. Задачі підвищеної складності:

- У рубриці "Задачі для повторення" представлені завдання, які виходять за межі шкільної програми, що підходить для поглибленого рівня навчання.

5) **Методичні особливості**

1. Доступна мова викладу:

- Матеріал подано чіткою, доступною мовою.
- Теоретичні пояснення супроводжуються практичними прикладами.

2. Формулювання задач:

- Завдання мають чіткі формулювання, що знижує ймовірність непорозуміння.
- Присутні міжпредметні задачі, які підкреслюють практичне застосування похідної.

3. Проблемний підхід:

- Використання проблемного методу, де учням пропонується знайти розв'язання ситуацій із життя.

6) **Недоліки**

1. Обмежена кількість міжпредметних задач:

- Хоча є завдання із фізики та економіки, їх недостатньо для поглибленого розуміння міжпредметного зв'язку.

2. Недостатньо уваги до інтуїтивного розуміння:

- Деякі поняття (наприклад, границя) подаються формально, що може бути складним для сприйняття.

3. Складність для учнів середнього рівня:

- Підручник орієнтований на поглиблений рівень, тому матеріал може бути важким для учнів із базовими знаннями.

Висновок

Підручник "Алгебра і початки аналізу (поглиблений рівень) 10 клас" авторів А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра є якісним джерелом для вивчення теми "Похідна та її застосування".

- **Переваги:** логічна структура, якісна візуалізація, велика кількість задач, орієнтованих на різні рівні складності.
- **Недоліки:** недостатня кількість міжпредметних задач і формальний підхід до деяких понять.

Цей підручник є ефективним для навчання учнів поглибленого рівня і сприяє формуванню як теоретичних знань, так і практичних навичок.

Проаналізуємо **другий** підручник.

1) *Метод викладання.*

Автори виклали навчальний матеріал абстрактно-дедуктивним методом. Наочні приклади використано доцільно.

2) *Структура теми в підручнику.*

Тема "Похідна та її застосування" охоплює такі аспекти:

1. Визначення похідної:

- Вступ через поняття приросту функції та границі.
- Означення похідної.
- Геометричний і фізичний зміст похідної.

2. Правила диференціювання:

- Похідна суми, різниці, добутку, частки функцій.
- Похідна складеної функції.
- Таблиця похідних основних елементарних функцій.

3. Застосування похідної:

- Дослідження функцій (зростання, спадання, екстремуми).
- Побудова графіків функцій.
- Розв'язання оптимізаційних задач.

4. Практичні аспекти:

- Приклади із фізики, економіки та інших сфер.

3) *Переваги подання теоретичного матеріалу.*

1. Послідовність викладу:

- Матеріал розкривається від інтуїтивного уявлення приросту функції до формального означення через границю. Це сприяє розумінню учнями основного змісту похідної.

2. Геометричний і фізичний зміст похідної:

- Значну увагу приділено поясненню геометричного сенсу похідної через нахил дотичної.
- Розкрито фізичний зміст через приклади обчислення швидкості та інших величин.

3. Формальний підхід до означення:

- Наведено детальне пояснення поняття границі..

- Показано, як застосовувати границю для обчислення похідної (із прикладами).

4. Таблиця похідних:

- У підручнику наведено чітку таблицю похідних елементарних функцій, що зручно для запам'ятовування.

5. Візуалізація:

- Графіки і рисунки високої якості, що ілюструють зміст похідної та її застосування.
- Наприклад, графічне зображення дослідження функцій для знаходження екстремумів.

4) **Практичні завдання**

1. Різноманітність задач:

- Наведено задачі різної складності, від простих прикладів (обчислити похідну полінома) до більш складних (використання похідної складеної функції).

2. Задачі на дослідження функцій:

- Завдання на визначення проміжків зростання і спадання функцій, екстремумів.
- Побудова графіків функцій з використанням похідної.

3. Оптимізаційні задачі:

- Є задачі на пошук оптимальних значень, наприклад, мінімальної вартості або максимальної площі.

4. Задачі підвищеної складності:

- В окремих рубриках містяться завдання для учнів, які бажають поглибити свої знання.

5) **Методичні особливості**

1. Доступна мова викладу:

- Матеріал викладено доступно, з акцентом на практичне застосування.
- Теорія супроводжується численними прикладами, що полегшує розуміння.

2. Формулювання задач:

- Завдання мають чіткі формулювання, що знижує ймовірність непорозуміння.
- Присутні міжпредметні задачі, які підкреслюють практичне застосування похідної.

3. Проблемний підхід:

- Підручник пропонує завдання, які спонукають учнів до самостійного пошуку розв'язання.

6) Недоліки

1. Формалізм у введенні границі:

- Означення границі може бути складним для учнів із базовим рівнем підготовки.

2. Обмежена кількість міжпредметних задач:

- Хоча є приклади із фізики та економіки, їх недостатньо для комплексного розуміння міжпредметних зв'язків.

3. Відсутність пояснень для частини складних задач:

- Деякі завдання підвищеної складності мають скупі коментарі, що ускладнює їхнє розв'язання учнями самостійно.

Висновок

Підручник "Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас" авторів А. Г. Мерзляка, Д. А. Номіровського, В. Б. Полонського, М. С. Якіра є якісним навчальним ресурсом для вивчення теми "Похідна та її застосування".

- **Переваги:** логічна структура, якісне пояснення теорії, різноманітність практичних задач, хороша візуалізація.
- **Недоліки:** формальний підхід до введення границі, недостатня кількість міжпредметних задач.

Цей підручник є ефективним для профільного рівня навчання, особливо для учнів із хорошою математичною підготовкою.

Проаналізуємо підручник під номером три.

1) Метод викладання.

Автори виклали навчальний матеріал абстрактно-дедуктивним методом. Наочні приклади використано доцільно.

2) Структура теми в підручнику.

Тема "Похідна та її застосування" охоплює такі аспекти:

1. Визначення похідної:

- Означення приросту функції.
- Означення похідної через границю.
- Геометричний і фізичний зміст похідної.

2. Правила диференціювання:

- Похідна суми, різниці, добутку, частки функцій.
- Означення похідної та її властивості.

- Таблиця похідних основних елементарних функцій.

3. Застосування похідної:

- Дослідження функцій (зростання, спадання, екстремуми).
- Побудова графіків функцій.
- Розв'язання оптимізаційних задач.

4. Практичні аспекти:

- Приклади із фізики, економіки та інших сфер.

3) **Переваги подання теоретичного матеріалу.**

1. Пояснення поняття похідної:

- Означення похідної подано через границю, з детальним поясненням і прикладами.
- Геометричний зміст пояснюється через нахил дотичної до графіка функції.
- Фізичний зміст розкривається через швидкість, прискорення та інші реальні процеси.

2. Формули і правила диференціювання:

- Представлено таблицю похідних основних функцій, що допомагає систематизувати знання.
- Розкрито правила обчислення похідної (сума, різниця, добуток, частка, складена функція) з прикладами розв'язання задач.

3. Наочність:

- Теорія супроводжується графіками та ілюстраціями, що пояснюють основні поняття, наприклад, дотичну до кривої.

4) **Практичні завдання**

1. Різноманітність задач:

- Задачі поділені за рівнем складності: від простих (обчислення похідної) до складних (оптимізаційні задачі).
- Представлено завдання з різних сфер життя, що підкреслюють практичне застосування похідної.

2. Задачі на дослідження функцій:

- Завдання на визначення інтервалів зростання і спадання, екстремумів, побудови графіків.

3. Оптимізаційні задачі:

- Прості та складні задачі на знаходження оптимальних значень (наприклад, максимальна площа, мінімальна вартість).

4. Міжпредметні задачі:

- Є задачі із фізики (визначення швидкості, прискорення), економіки (прибуток, витрати) та геометрії (довжина і нахил дотичної).

5. Задачі для самостійної роботи:

- Завдання поділені на блоки для повторення і закріплення, що полегшує самостійну роботу учнів.

5) **Методичні особливості**

1. Доступність викладу:

- Мова викладу проста і доступна, що дозволяє учням із різним рівнем підготовки зрозуміти матеріал.
- Теоретичні поняття пояснюються за допомогою прикладів і графічних ілюстрацій.

2. Системність і логічність:

- Матеріал поданий системно, із поступовим ускладненням задач.
- Чіткий поділ теорії, прикладів і завдань для самостійної роботи.

3. Проблемний підхід:

- Використовуються задачі, які мотивують учнів шукати розв'язання самостійно.

4. Візуалізація:

- Графіки, схеми, таблиці представлені якісно, що полегшує сприйняття матеріалу.

6) **Недоліки**

1. Формалізм у введенні границі:

- Означення границі може бути складним для учнів із базовим рівнем підготовки.

2. Обмежена кількість міжпредметних задач:

- Хоча є приклади із фізики та економіки, їх недостатньо для комплексного розуміння міжпредметних зв'язків.

3. Обмежена кількість творчих задач:

- Мало задач, що потребують нестандартного підходу або застосування знань у нових ситуаціях.

Висновок

Підручник "Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) 10 клас" авторів Г. П. Бевза, В. Г. Бевза, Н. Г. Владімірової є якісним навчальним ресурсом для вивчення теми "Похідна та її застосування".

- **Переваги:** чітка структура, доступний виклад теорії, широкий вибір задач, якісна візуалізація.

- **Недоліки:** обмежена кількість міжпредметних задач, формалізм у поясненні границі.

Підручник відповідає вимогам навчальної програми профільного рівня та сприяє формуванню в учнів як теоретичних знань, так і практичних навичок застосування похідної.

Проаналізуємо **четвертий** підручник.

1) Метод викладання.

Автори виклали навчальний матеріал абстрактно-дедуктивним методом. Наочні приклади використано доцільно. Даний підручник дає змогу оволодіти такими компетентностями, які будуть потрібні не лише в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності.

2) Структура теми в підручнику.

Тема "Похідна та її застосування" охоплює такі аспекти:

1. Визначення похідної:

- Означення приросту функції.
- Означення похідної через границю.
- Геометричний і фізичний зміст похідної.

2. Правила диференціювання:

- Похідна суми, різниці, добутку, частки функцій.
- Означення похідної та її властивості.
- Таблиця похідних основних елементарних функцій.

3. Застосування похідної:

- Дослідження функцій (зростання, спадання, екстремуми).
- Побудова графіків функцій.
- Задачі на знаходження найбільших і найменших значень функцій.

4. Практичні аспекти:

- Приклади із фізики, економіки та інших сфер.

3) Переваги подання теоретичного матеріалу.

1. Доступність викладу:

- Матеріал адаптовано до рівня учнів академічного рівня, що дозволяє зрозуміти основи без глибокого занурення в складні теоретичні аспекти.

2. Геометричний і фізичний зміст:

- Геометричний зміст похідної пояснюється через нахил дотичної до графіка.
- Фізичний зміст розглядається на прикладах обчислення швидкості та інших величин.

3. Чітка структура:

- Введення кожного нового поняття супроводжується прикладами та рисунками.

4. Формалізація:

- Означення похідної через границю подано коротко, що спрощує сприйняття для учнів із середнім рівнем підготовки.

4) **Практичні завдання**

1. Різноманітність задач:

- Задачі поділені за рівнем складності: від простих (обчислення похідної) до складних (оптимізаційні задачі).
- Представлено завдання з різних сфер життя, що підкреслюють практичне застосування похідної.

2. Задачі на дослідження функцій:

- Завдання на визначення інтервалів зростання і спадання, екстремумів, побудови графіків.

3. Оптимізаційні задачі:

- Представлено прості приклади задач на максимізацію та мінімізацію значень функцій.

4. Прикладні задачі:

- Задачі, пов'язані з реальними ситуаціями (наприклад, задачі з фізики та економіки), подані, але їхня кількість обмежена.

5) **Методичні особливості**

1. Наочність:

- Підручник містить якісні графіки та ілюстрації, які полегшують сприйняття матеріалу.

2. Мова викладу:

- Текст простий і зрозумілий, що відповідає потребам академічного рівня.

3. Збалансованість теорії та практики:

- Матеріал містить достатню кількість прикладів для закріплення теорії.

4. Проблемний підхід:

- Учні спонукають до міркувань і самостійного аналізу функцій через проблемні задачі.

6) **Недоліки**

1. Обмежена кількість прикладних задач:

- Хоча є задачі з фізики та економіки, їх недостатньо для розвитку міжпредметних зв'язків.

2. Спрощений підхід до теорії:

- Деякі аспекти, наприклад формалізація границі, подано поверхово, що може бути недостатньо для учнів із високим рівнем зацікавленості в математиці.

3. Недостатня кількість задач підвищеної складності:

- Завдання здебільшого орієнтовані на середній рівень підготовки, складних проблемних задач небагато.

Висновок

Підручник "Алгебра і початки аналізу (академічний рівень) 10 клас" авторів О. С. Істера та О. В. Єрґіної є якісним і доступним джерелом для вивчення теми "Похідна та її застосування".

- **Переваги:** доступність викладу, структурованість, якісна наочність, різнорівневі завдання.
- **Недоліки:** недостатня кількість прикладних задач, спрощений підхід до формалізації теорії.

Підручник повністю відповідає навчальній програмі академічного рівня і забезпечує базові знання та навички роботи з похідною.

Аналізувати підручники номер **п'ять** і **шість** немає сенсу, адже в них ми не побачимо тему 'Похідна та її застосування'.

Проаналізуємо підручник **сьомий**.

1) **Метод викладання.**

Автори виклали навчальний матеріал абстрактно-дедуктивним методом. Наочні приклади використано доцільно.

2) **Структура теми в підручнику.**

Тема "Похідна та її застосування" охоплює такі аспекти:

1. Визначення похідної:

- Означення приросту функції.
- Означення похідної через границю.
- Геометричний і фізичний зміст похідної.

2. Правила диференціювання:

- Похідна суми, різниці, добутку, частки функцій.
- Означення похідної та її властивості.
- Таблиця похідних основних елементарних функцій.

3. Застосування похідної:

- Дослідження функцій (зростання, спадання, екстремуми).
- Побудова графіків функцій.
- Задачі на знаходження найбільших і найменших значень функцій.

4. Практичні аспекти:

- Приклади із життя.

3) **Переваги подання теоретичного матеріалу.**

1. Доступність викладу:

- Матеріал адаптовано до учнів стандартного рівня, дітям вищого рівня він заслабкий

2. Геометричний і фізичний зміст:

- Геометричний зміст похідної пояснюється через нахил дотичної до графіка.
- Фізичний зміст розглядається на прикладах обчислення швидкості та інших величин.

3. Чітка структура:

- Введення кожного нового поняття супроводжується прикладами та рисунками.

4. Формалізація:

- Означення похідної через границю подано коротко, що спрощує сприйняття для учнів із середнім рівнем підготовки.

4) **Практичні завдання**

1. Різноманітність задач:

- Задачі поділені за рівнем складності: від простих (обчислення похідної) до складних (оптимізаційні задачі).
- Представлено завдання з різних сфер життя, що підкреслюють практичне застосування похідної.

2. Задачі на дослідження функцій:

- Завдання на визначення інтервалів зростання і спадання, екстремумів, побудови графіків.

3. Оптимізаційні задачі:

- Представлено прості приклади задач на максимізацію та мінімізацію значень функцій.

4. Прикладні задачі:

- Задачі, пов'язані з реальними ситуаціями подані, але їхня кількість обмежена, проте достатня для такого рівня підручника.

5) **Методичні особливості**

5. Наочність:

- Підручник містить графіки та ілюстрації, які полегшують сприйняття матеріалу.
- 6. Мова викладу:
 - Текст простий і зрозумілий, що відповідає потребам стандартного рівня.
- 7. Збалансованість теорії та практики:
 - Матеріал містить достатню кількість прикладів для закріплення теорії.
- 8. Проблемний підхід:
 - Учні спонукають до міркувань і самостійного аналізу функцій через проблемні задачі.

6) Недоліки

- 4. Обмежена кількість прикладних задач:
 - Хоча є задачі з фізики та економіки, їх недостатньо для розвитку міжпредметних зв'язків.
- 5. Спрощений підхід до теорії:
 - Деякі аспекти, наприклад формалізація границі, подано поверхово, що може бути недостатньо для учнів із високим рівнем зацікавленості в математиці.
- 6. Недостатня кількість задач підвищеної складності:
 - Завдання здебільшого орієнтовані на середній рівень підготовки, складних проблемних задач небагато.

Висновок

Підручник "Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту)" авторів Г. П. Бевза та В. Г. Бевза забезпечує базове знайомство з поняттям похідної та її застосуванням.

- **Переваги:** доступність викладу, наочність, структурованість матеріалу, баланс між теорією і практикою.
- **Недоліки:** недостатня кількість складних задач і прикладних вправ.

Підручник підходить для стандартного рівня підготовки учнів і забезпечує базові знання та навички роботи з похідною, проте для поглибленого вивчення варто залучати додаткові джерела.

Підручники **восьмий** та **дев'ятий** дуже схожі за наповненням до сьомого, проте в них дуже мала кількість задач для закріплення нових знань, не говорячи вже про

складніші приклади та задачі прикладного характеру. Навіть для дітей середнього рівня це занадто мало.

Висновки до розділу 1.

Розділ "Вивчення похідної та її застосувань" відіграє фундаментальну роль у формуванні базових математичних компетенцій учнів старших класів. Поняття похідної, яке виникло внаслідок багатовікових математичних досліджень, дозволяє формалізувати і описувати багато явищ у природі, техніці, економіці та інших галузях. В історичному аспекті розвиток диференціального числення базується на працях видатних математиків, таких як Ісаак Ньютон, Готфрід Лейбніц, Луї Лагранж, Огюстен Коші, Леонард Ейлер та інших. Їхній внесок сформував сучасний апарат аналізу, який широко застосовується сьогодні.

Теоретичний матеріал щодо похідної у шкільних підручниках подано логічно й структуровано. Основні аспекти – означення похідної, її геометричний і фізичний зміст, правила диференціювання та методи застосування – викладено чітко з використанням прикладів та ілюстрацій. Такий підхід забезпечує доступність і наочність вивчення матеріалу, що сприяє глибокому розумінню учнями теми.

Аналіз навчальних матеріалів свідчить, що підручники з алгебри і початків аналізу орієнтовані на поєднання теорії з практикою, що є важливим для формування в учнів здатності до аналізу, синтезу та застосування знань у нестандартних ситуаціях. Позитивним є те, що розділ про похідну містить також задачі прикладного характеру, які дозволяють учням усвідомити значущість цього поняття в реальному житті. Проте в деяких підручниках таких задач занадто мало. А деякі взагалі не містять такого роду завдань.

Таким чином, розділ 'Похідна та її застосування' забезпечує учням не лише теоретичні знання, а й формує практичні навички аналізу функцій, розв'язування оптимізаційних задач та побудови графіків. Це сприяє розвитку логічного мислення, що є важливим елементом математичної освіти. Однак, доцільно було б включати більше завдань, що моделюють реальні життєві ситуації, а також покращити міжпредметні зв'язки. Це зробить вивчення похідної не лише теоретичним, а й практично корисним для учнів.

РОЗДІЛ 2. РІЗНІ ТИПИ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ, ДЕ ВИКОРИСТОВУЄТЬСЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Похідна допомагає зрозуміти, як саме змінюється система в реальному часі, виявити критичні точки, дослідити тенденції та створити прогнози. Завдяки цьому її використання є ключовим у прийнятті рішень, розробці нових технологій і оптимізації існуючих процесів.

У цьому розділі розглядаються різні типи задач, які демонструють універсальність і прикладне значення похідної. Через ці приклади ви побачите, як математичний інструмент може розкрити глибокі закономірності у природі та суспільстві а також зможете продемонструвати їх школярам.

2.1. Задачі природознавства, які приводять до поняття похідної.

Похідна є потужним математичним інструментом, що дозволяє вченим точно описувати і прогнозувати природні процеси. Вона допомагає не лише отримати важливі дані про швидкість зміни різних величин, а й зрозуміти механізми, що стоять за цими змінами. Використання похідної дає змогу створювати моделі для точного прогнозування розвитку подій, що є основою для наукових досліджень і практичних рішень у природознавстві.

На Рис. 2.1 представлено різноманітні задачі, які приводять до введення поняття похідної в контексті природознавства.

Функція	Приріст аргументу	Приріст функції	Середня швидкість зміни функції	Миттєва швидкість зміни функції
1	2	3	4	5
1. $S = S(t)$ - шлях, який проходить тіло за час t ; [м]	Δt	$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$	$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$	$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_c$ - швидкість [м/с]
2. $v = v(t)$ - швидкість нерівномірного руху тіла, де t - час; [м/с]	Δt	$\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$	$a_c = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$	$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_c$ - прискорення [м/с ²]
3. $q = q(t)$ - кількість електрики, яка проходить через поперечний переріз провідника за час t ; [Кл]	Δt	$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$	$I_c = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$	$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_c$ - сила струму [А]
4. $\varphi = \varphi(t)$ - кут повороту тіла за час t ; [рад]	Δt	$\Delta \varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$	$\omega_c = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$	$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_c$ - кутова швидкість [рад/с]
5. $m = m(l)$ - маса будь-якої частини неоднорідного стержня завдовжки l ; [г]	Δl	$\Delta m = m(l + \Delta l) - m(l)$	$\rho_c = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{m(l + \Delta l) - m(l)}{\Delta l}$	$\rho = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \rho_c$ - лінійна густина стержня [г/см]
6. $A = A(t)$ - робота, яка здійснюється у момент часу t ; [Дж]	Δt	$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t)$	$W_c = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$	$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} W_c$ - потужність [Вт]
7. $Q = Q(T)$ - кількість теплоти, яку необхідно надати тілу, щоб змінити його температуру на T градусів; [Дж]	ΔT	$\Delta Q = Q(T + \Delta T) - Q(T)$	$C_c = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{Q(T + \Delta T) - Q(T)}{\Delta T}$	$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} C_c$ - питома теплоємність речовини даного тіла [Дж/°C]
8. $C = C(t)$ - концентрація речовини, яка вступила в хімічну реакцію в момент часу t ; [моль/л]	Δt	$\Delta C = C(t + \Delta t) - C(t)$	$v_{cp} = \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t}$	$v_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$ - швидкість хімічної реакції
9. $P = P(t)$ - чисельність популяції в момент часу t ; [особин]	Δt	$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$	$v_{cn} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$	$v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cn}$ - швидкість зростання популяції

Рис. 2.1

Розглянемо декілька конкретних задач та їх розв'язання.

Задача 1. На якій відстані від збиральної лінзи слід розмістити предмет, щоб відстань від предмета до його дійсного зображення була найменшою? [8]

Розв'язання:

З формули лінзи $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$, де f -відстань від лінзи до зображення, d - відстань від лінзи до предмету, F - фокусна відстань. Виразимо f :

$$f = \frac{Fd}{d-F} \rightarrow f + d = \frac{Fd}{d-F} + d = \frac{Fd + d^2 - Fd}{d-F} = \frac{d^2}{d-F}$$

Знайдемо похідну даної функції:

$$f' = \left(\frac{d^2}{d-F} \right)' = \frac{d^{2'}(d-F) - (d-F)'d^2}{(d-F)^2} = \frac{2d(d-F) - d^2}{(d-F)^2} = \frac{d(d-2F)}{(d-F)^2}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$\frac{d(d-2F)}{(d-F)^2} = 0 \rightarrow d = 0 \text{ або } d = 2F$$

Оскільки відстань від лінзи до предмету не може $= 0$, то маємо єдину критичну точку $d = 2F$. Щоб перевірити чи є вона максимальною чи мінімальною, треба знайти другу похідну:

$$f''(d) = \frac{2F^2}{(d-F)^3}$$

Підставимо критичну точку:

$$f''(2F) = \frac{2F^2}{(2F-F)^3} = \frac{2F^2}{F^3} = \frac{2}{F} > 0$$

Якщо друга похідна > 0 (для збиральної лінзи $F > 0$), то критична точка є мінімальною.

Відповідь: предмет потрібно розмістити на відстані $2F$ від лінзи.

Задача 2. Знайдіть швидкість і прискорення в момент часу t і в момент, коли $t = 1$ с., для точки, що рухається прямолінійно за законом: $S(t) = 2t^3 - 3t$. [20]

Розв'язання:

Знаючи механічний зміст похідної, отримаємо:

$S'(t) = v(t) = 6t^2 - 3$ – швидкість це похідна від шляху.

Якщо $t = 1$, то:

$$v(1) = 6 - 3 = 3 \text{ м/с}$$

Прискорення – похідна від швидкості, тому:

$$a(t) = v'(t) = 12t$$

При $t = 1$:

$$a(1) = 12 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: швидкість в момент часу $= 6t^2 - 3$, а його прискорення в цей

момент - $12t$. При $t = 1$ швидкість = 3 М/с а прискорення - 12 М/с^2 .

Задача 3. Колесо обертається за законом $y = 4 + 5t - t^3$. Визначити наприкінці першої секунди обертання кутову швидкість колеса, та його лінійну швидкість. Радіус колеса – 2 см. [36]

Розв'язання

Оскільки кутова швидкість – це похідна від y , то:

$$y'(t) = 5 - 3t^2$$

Наприкінці першої секунди кутова швидкість буде рівна:

$$w(1) = 5 - 3 = 2 \text{ рад/с}$$

Знайдемо лінійну швидкість:

$$l = w * r$$

При $w=1$ отримаємо:

$$l = 2 * 2 = 4 \text{ см/с}$$

Відповідь: кутова швидкість наприкінці першої секунди рівна 2 радіанам, а його лінійна швидкість - 4 см/с.

Задача 4. Розмір популяції комах у момент часу t (в днях) задається формулою $p(t) = 10^5 - \frac{9 \times 10^4}{t+1}$. Знайдіть швидкість зростання популяції у момент $t = 5$ днів. [41]

Розв'язання

Користуючись Рис. 2.1 знаємо, що швидкість зростання популяції дорівнює похідній від чисельності популяції в момент часу, тому:

$$v(t) = p'(t) = \frac{9 \times 10^4}{(t+1)^2}$$

При $t=5$:

$$v(5) = \frac{9 \times 10^4}{6^2} = \frac{9 \times 10^4}{36} = \frac{10^4}{4} = 2500$$

Відповідь: на момент часу 5 днів швидкість зростання популяції досягне 2500.

Задача 5. Дріжджі ростуть у цукровому розчині так, що їх маса збільшується на 3% за кожну годину. Знайдіть наближене значення маси дріжджів через 10 хвилин, якщо її початкове значення дорівнює 1 г. [41]

Розв'язання

$m(t) = (1 + 0,03)^t$ -математична модель задачі.

Для функції f , диференційованої в точці x , і достатньо малих Δx має місце рівність:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Скориставшись даною формулою маємо: $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,03$; $f(x_0) = x_0^{\frac{1}{6}} = 1$

$$f'(x_0) = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}$$

Отже:

$$m(t) = (1 + 0,03)^{\frac{1}{6}} = 1,03^{\frac{1}{6}} \approx 1,005\text{г}$$

Відповідь: найближче значення маси дріжджів 1,005г.

Задача 6. У колі змінного струму напруга на конденсаторі змінюється за законом:

$$U_c(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

де U_0 — максимальна напруга, ω — циклічна частота.

Знайти миттєве значення сили струму $I(t)$ напруги якщо ємність конденсатора $C = 5\mu\text{Ф}$ максимальна напруга $U_0 = 10\text{В}$, а частота змінного струму $f=50\text{Гц}$. [43]

Розв'язання

Сила струму через конденсатор:

$$I(t) = C U'_c(t)$$

Знайдемо похідну $U_c(t)$:

$$U'_c(t) = U_0 \omega \cos(\omega t)$$

Підставимо похідну у формулу сили струму:

$$I(t) = C U_0 \omega \cos(\omega t)$$

Знайдемо циклічну частоту:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 100\pi \text{ рад/с}$$

Запишемо функцію сили струму:

$$I(t) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 100 \cdot \cos(100\pi t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(100\pi t)$$

Знайдемо миттєве значення сили струму, при $t = \frac{1}{300}$:

$$I\left(\frac{1}{300}\right) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(100\pi \frac{1}{300}\right) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 7,85 \cdot 10^{-3} \text{А}$$

Відповідь: сила струму $I(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(100\pi t)$; миттєва сила струму $I\left(\frac{1}{300}\right) \approx 7,85\text{мА}$.

Завдання для самоперевірки

1. Два учні граються м'ячем, кидаючи його один одному. Якої найбільшої висоти досягає м'яч, коли від одного гравця до другого він летить 2 сек.?

2. Два автомобілі їдуть рівномірно з однакою за модулем швидкостями по дорогах, що перетинаються під кутом α . На яку мінімальну відстань наближаються автомобілі в русі, якщо спочатку вони знаходилися на відстанях l_1 і l_2 від перехрестя доріг?

3. Прямокутна рамка площею 500см^2 , яка складається з 200 витків дроту, рівномірно обертається в однорідному магнітному полі навкруги осі, що проходить

через її центр, паралельно одній із її сторін, з частотою 10 с. При цьому в рамці індукується ЕРС, максимальне значення якої - 150 В. Визначити індукцію магнітного поля.

4. Кількість бактерій N у деякій біомасі змінюється за законом $N(t) = 450 + 52t + 2t^2$. Скільки бактерій було у біомасі у початковий момент $t = 0$? Яка швидкість приросту кількості бактерій в момент часу 3,5 хв?

5. Реакція організму на введені ліки може виявлятися підвищенням кров'яного тиску, зменшенням температури тіла, зміною пульсу чи іншими фізіологічними показниками. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків. А ступінь реакції y визначається функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де a – деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна?

6. Швидкість зростання у популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0,001x(100 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкості зростання дорівнює нулю?

2.2. Економічні задачі, які приводять до поняття похідної.

Поняття похідної широко використовується для аналізу економічних процесів, зокрема для дослідження поведінки функцій, що описують виробництво, прибуток, витрати, попит і пропозицію. Ось кілька основних економічних задач, які розв'язуються з використанням похідної:

1. Задача оптимізації прибутку

Суть задачі: знайти обсяг виробництва, який максимізує прибуток.

Математична модель:

Прибуток $P(x)$ визначається як різниця між доходом $R(x)$ і витратами $C(x)$:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

Для максимізації прибутку потрібно знайти точку x , де похідна $P'(x)$ дорівнює нулю:

$$P'(x) = 0$$

Далі знаходимо другу похідну щоб переконатися, що точка є максимумом.

2. Задача мінімізації витрат

Суть задачі: визначити обсяг виробництва, який мінімізує загальні витрати.

Математична модель:

Функція витрат $C(x)$ відображає залежність витрат від обсягу виробництва. Для знаходження мінімальних витрат потрібно знайти точку, де:

$$C'(x) = 0$$

3. Граничний дохід і граничні витрати

Суть задачі:

Знайти, як змінюється дохід або витрати при зміні обсягу виробництва на одиницю.

Математична модель:

- **Граничний дохід** ($MR(x)$) — це похідна функції доходу $R(x)$:

$$MR(x) = R'(x)$$

- **Граничні витрати** ($MC(x)$) — це похідна функції витрат $C(x)$:

$$MC(x) = C'(x)$$

Рівність $MR(x)=MC(x)$ використовується для визначення точки максимального прибутку.

4. Аналіз еластичності

Суть задачі: оцінити, як змінюється попит або пропозиція в залежності від зміни ціни.

Математична модель:

Еластичність попиту $E(p)$ визначається як відносна зміна попиту до відносної зміни ціни:

$$E(p) = \frac{p}{Q(p)} \times Q'(p)$$

де $Q(p)$ — функція попиту, p — ціна.

5. Оптимальний розподіл ресурсів

Суть задачі: визначити, як найкраще розподілити обмежені ресурси між різними напрямками, щоб максимізувати результат.

Математична модель:

Функція вигоди $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ описує залежність результату від обсягів ресурсів. Використовуються часткові похідні для знаходження оптимального значення ресурсів. Умова максимуму:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

6. Задача розрахунку точки беззбитковості

Суть задачі: визначити обсяг виробництва, при якому підприємство перестає нести збитки.

Математична модель:

Рівність між доходом і витратами:

$$R(x) = C(x)$$

Розв'язок знаходиться шляхом розв'язання рівняння або аналізу похідної функції $R(x)$.

7. Інвестиційний аналіз

Суть задачі: оцінити, при якому обсязі інвестицій проєкт матиме максимальну ефективність.

Математична модель:

Функція прибутковості $R(x)$ залежить від обсягу інвестицій x . Максимальна ефективність досягається, коли:

$$R(x) = 0$$

Розглянемо конкретні задачі.

Задача 1. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. гр. од.) та випуском продукції x (млрд гр. од.) виражається функцією $y = -0,5x + 80$. Знайти еластичність собівартості за умови випуску продукції в розмірі 60 млрд гр. од. [16]

Розв'язання

Скористаємось формулою $E_x(y) = \frac{x}{y} y'$.

Отримаємо:

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,5x + 80} \times (-0,5x + 80)' = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80}$$

$$\text{При } x = 60 \quad E_{60}(y) = \frac{-30}{50} = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Відповідь: при виробництві продукції в розмірі 60 млн гр. од., збільшення її на 1% викличе зменшення собівартості на 0,6%.

Задача 2. Обсяг продукції в цеху протягом робочого дня є функцією $a = -x^3 - 6x^2 + 80x + 500$, де x – час. Знайти продуктивність праці через 2 години від початку роботи. [47]

Розв'язання

Продуктивність праці характеризується кількістю продукції, виробленою за одиницю часу.

Отже, продуктивність праці є похідною від обсягу виробленої продукції за час x :

$$a'(x) = (-x^3 - 6x^2 + 80x + 500)' = -3x^2 - 12x + 80$$

Знайдемо продуктивність праці через 2 години, тобто $x = 2$:

$$a'(2) = -12 - 24 + 80 = 44 \text{ од.}$$

Відповідь: продуктивність праці через 2 години рівна 44 одиницям продукції.

Задача 3. Яка максимальна виручка монополіста, якщо попит аж до перетину з осями описується лінійною функцією $Q = b - ap$, де p - ціна товару, що випускається монополістом; a і b - коефіцієнти функції попиту? [41]

Розв'язання

$$TR = Qp = (b - ap)p - \text{дохід.}$$

Знайдемо похідну:

$$TR' = ((b - ap)p)' = p'(b - ap) + (b - ap)'p = b - ap - ap = b - 2ap$$

Дохід досягне максимуму лише при рівності нулю похідної, тому:

$$b - 2ap = 0 \rightarrow 2ap = b \rightarrow p = \frac{b}{2a}$$

Підставимо в вихідну функцію:

$$Q = b - ap = b - a \frac{b}{2a} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

При цьому максимум виручки складе:

$$TR = Qp = \frac{b}{2} \times \frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a}$$

Відповідь: максимальна виручка монополіста буде рівна $\frac{b^2}{4a}$.

Задача 4. Компанія продає товар за ціною, яка залежить від кількості проданих одиниць за законом $P(x)=100-2x$, де $P(x)$ — ціна однієї одиниці товару при продажу x одиниць. Сукупний виторг компанії $R(x)$ визначається як добуток кількості проданих одиниць x на ціну $P(x)$: $R(x)=x \cdot P(x)$. Знайти обсяг продажу x , при якому сукупний виторг компанії максимальний. [45]

Розв'язання

Запишемо функцію виторгу $R(x)$:

$$R(x) = x \times P(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

Знайдемо граничний виторг:

$$MR(X) = R'(x) = (100x - 2x^2)' = 100 - 4x$$

Сукупний виторг досягає максимуму коли граничний виторг $= 0$, тому:

$$MR(x) = 0 \rightarrow 100 - 4x = 0 \rightarrow 4x = 100 \rightarrow x = 25$$

Перевіримо, чи дана точка буде точною максимуму, знайшовши знак другої похідної:

$$R''(x) = -4$$

Оскільки друга похідна < 0 , значить точка є максимумом.

Відповідь: сукупний виторг компанії буде максимальним при 25 одиниць товару.

Завдання для самоперевірки

1. За допомогою дослідів були встановлені функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ та пропозиції $s = p + 0,5$, де q та s — кількість товарів, відповідно що купується і пропонується для продажу за одиницю часу, p — ціна товару. Знайти: а) рівноважну ціну, тобто ціну, за якої попит та пропозиція врівноважуються; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну доходу при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

2. Знайти об'єм виробництва, при якому фірма, що діє на ринку досконалої конкуренції, буде отримувати максимальний прибуток, якщо $p = 15$, $TC(q) = q^3 + 3q$.

3. Знайти оптимальний обсяг виробництва фірми, функція прибутку якої задана таким чином: $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 8q + 10$.

4. Обсяг продукції у цеху протягом робочого дня представляє функцію $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, де t - час (год). Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи.

5. Нехай $TC(q) = \frac{1}{2}q^2$ - витрати фірми-монополіста, $QD(p) = 40 - 2p$ - функція попиту. Знайти оптимальний для даної монополії обсяг виробництва і відповідну ціну одиниці продукції.

2.3. Задачі на застосування похідної до дослідження функцій.

Дослідження функцій за допомогою похідної є важливим математичним інструментом для аналізу їх поведінки. Наприклад, дослідити на зростання та спадання, знайти екстремуми, знайти найбільше та найменше значення на відрізку тощо. Розглянемо алгоритми даних досліджень.

Алгоритм дослідження функції на **зростання та спадання**:

- 1) Знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну функції;
- 3) знайти критичні точки, прирівнявши похідну до 0;
- 4) поділити критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них;
- 5) вказати проміжки зростання та спадання

Алгоритм дослідження функції на **екстремуми**:

- 1) знайти похідну функції;
- 2) знайти критичні та стаціонарні точки, прирівнявши похідну до 0;
- 3) поділити критичними точками область визначення функції на проміжки та з'ясувати знак похідної на кожному з них;
- 4) якщо в точці похідна змінює знак з '+' на '-', то кажуть, що точка має локальний максимум, якщо з '-' на '+' – локальний мінімум. Якщо в цій точці знак справа і зліва однаковий, то вона екстремуму не має.

Алгоритм дослідження на **найбільше та найменше** значення функції на проміжку:

- 1) знайти похідну функції;
- 2) знайти критичні та стаціонарні точки, прирівнявши похідну до 0;
- 3) обрати лише ті точки, які належать проміжку;
- 4) обчислити значення функції в цих точках та на кінцях відрізка;
- 5) з усіх знайдених точок обрати найбільше та найменше значення.

Розглянемо на конкретних задачах.

Задача 1. Розмір популяції бактерій в момент часу t (в годинах) задається формулою $p(t) = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$. Протягом якого часу популяція зростає? Починаючи з якого моменту часу її чисельність почне зменшуватися? [41]

Розв'язання

Знайдемо похідну заданої функції:

$$p'(t) = 10^4 - 2 \times 10^3 t$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$p'(t) = 10^4 - 2 \times 10^3 t = 0 \rightarrow 2 \times 10^3 t = 10^4 \rightarrow t = \frac{10^4}{2 \times 10^3} = \frac{10}{2} = 5$$

Наша область визначення поділилась на два проміжки:

1. При $t \in (-\infty; 5]$ (візьмемо $t = 2$) $p'(2) = 10^4 - 2 \times 10^3 \times 2 = 10^4 - 4 \times 10^3 = 6000 > 0$
2. При $t \in (5; +\infty)$ (візьмемо $t = 10$) $p'(10) = 10^4 - 2 \times 10^3 \times 10 = -10^4 < 0$

Відповідь: популяція зростає протягом перших 5 годин, після 5 год її чисельність починає зменшуватись.

Задача 2. Реакція організму на введені ліки може виражатися у підвищенні кров'яного тиску, зменшенні температури тіла, зміні пульсу чи інших фізіологічних показників. Припустимо, що через x позначено дозу призначених ліків, а ступінь реакції у визначається функцією $y = f(x) = x^2(a - x)$, де a – деяка додатна стала. При якому значенні x реакція максимальна? [41]

Розв'язання

Знайдемо похідну заданої функції:

$$f'(x) = x^{2'}(a - x) + (a - x)'x^2 = 2x(a - x) - x^2 = 2ax - 3x^2 = x(2a - 3x)$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$x(2a - 3x) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{2a}{3}$$

Оскільки доза не може $= 0$, то тоді маємо лише одну критичну точку: $x = \frac{2a}{3}$

Оскільки при переході через цю точку знак похідної змінюється з “+” “-”, то ця точка є точкою максимуму.

Відповідь: реакція організму на введені ліки буде максимальною при $x = \frac{2a}{3}$.

Задача 3. На основі статистичних досліджень фірма встановила функцію прибутку від ціни p за одиницю продукції: $f(p) = -50p^2 + 500p$. Визначте граничний прибуток фірми залежно від ціни p . При якому значенні ціни граничний прибуток буде максимальним? При якому значенні ціни фірма зазнає збитків? [41]

Розв'язання

Граничний прибуток є похідною від функції прибутку, тому:

$$f'(p) = -100p + 500$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$-100p + 500 = 0 \rightarrow p = \frac{500}{100} = 5$$

При $p = 1$ $f'(1) = -100 + 500 = 400$

При $p = 10$ $f'(10) = -1000 + 500 = -500$

Відповідь: граничний прибуток зростатиме при збільшенні ціни до 5 тис., але якщо ціна за одиницю продукції буде > 5 тис, то фірма зазнає збитків.

Задача 4. При якій кислотності сума гідроген-іонів H^+ і гідроксид-іонів OH^- в одиниці об'єму води буде найменшою? [41]

Розв'язання

Нехай x – концентрація гідрогенів-іонів H^+ , а y – концентрація гідроксид-іонів OH^- .

Тоді отримаємо:

$$xy = k$$

де k - стала для води.

Задача зводиться до знаходження найменшого значення функції:

$$u(x) = x + y = x + \frac{k}{x}$$

Знайдемо похідну функції:

$$u'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$1 - \frac{k}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - k}{x^2} \rightarrow x = \pm\sqrt{k}$$

Оскільки від'ємної концентрації немає, то отримаємо єдину критичну точку $x = \sqrt{k}$.

Знайдемо знак другої похідної, для визначення характеру точки:

$$u''(x) = \frac{2k}{x^3}$$

Підставимо критичну точку в другу похідну:

$$u''(\sqrt{k}) = \frac{2k}{\sqrt{k}^3} > 0$$

Оскільки значення похідної > 0 , то знайдена критична точка є точкою мінімуму.

Знайдемо $y = \frac{k}{x} = \sqrt{k}$.

Відповідь: сума іонів води буде найменшою, якщо концентрація гідрогенів-іонів H^+ буде дорівнювати концентрації гідроксид-іонів OH^- і $= \sqrt{k}$.

Завдання для самоперевірки

1. Швидкість зростання у популяції, чисельність якої в момент часу t (час виражено в днях) дорівнює $p(t)$, задана формулою $y = 0,001 x(100 - x)$. При якій чисельності популяції ця швидкість максимальна? Скільки особин містить рівноважна популяція, для якої швидкість зростання дорівнює нулю?

2. Реакції організму на два види ліків як функції часу t (час виражено в годинах) складають $r_1(t) = te^{-t}$ і $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У якого виду ліків максимальна реакція вища? Ліки якого виду діють повільніше?

3. Деяка епідемія поширюється за законом $p(t) = 0,005(15t^2 - t^3)$, де $t \in [0;15]$, $p(t)$ – відсоток тих, що захворіли протягом t діб, від загального числа мешканців. Протягом скількох діб відсоток тих, що захворіли, буде зростати, а протягом скількох діб буде спадати? Протягом скількох діб швидкість зміни відсотку тих, що захворіли, буде збільшуватися, а протягом скількох діб буде зменшуватися?

2.4. Оптимізаційні задачі, для розв'язування яких використовується похідна.

Оптимізаційні задачі — це завдання, метою яких є знаходження найкращого (оптимального) рішення в заданих умовах. Найкраще рішення може означати максимізацію певної величини (наприклад, прибутку, швидкості, ефективності) або мінімізацію (наприклад, витрат, часу, ризиків). Це актуально для різних галузей: економіки, фізики, біології, інженерії тощо. Нижче наведено приклади оптимізаційних задач і їх розв'язання за допомогою похідної.

Задача 1. Компанія хоче доставити товар до клієнта. Вартість доставки складається з постійної частини 500 грн і змінної, що залежить від відстані за формулою $C(x) = 500 + 200/x + 10x$, де x — відстань (у кілометрах). Знайти оптимальну відстань, щоб зменшити витрати. [41]

Розв'язування

Знайдемо похідну функції $C(x)$:

$$C'(x) = -\frac{200}{x^2} + 10$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$-\frac{200}{x^2} + 10 = 0 \rightarrow \frac{-200 + 10x^2}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{200}{10} = \pm\sqrt{20}$$

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки (можна ще дослідити функцію на зміну знаку. Якщо в даній точці функція змінює знак з + на -, то ця точка є максимумом) :

$$C''(x) = \frac{400}{x^3}$$

Оскільки друга похідна > 0 , це означає, що функція $C(x)$ має мінімум в точці $x = \sqrt{20}$.

Знайдемо мінімальні витрати:

$$C(\sqrt{20}) = 500 + \frac{200}{\sqrt{20}} + 10\sqrt{20} \approx 590 \text{ гр. од.}$$

Відповідь: щоб витрати були мінімальними доставка повинна бути на відстані $2\sqrt{5}$ км.

Задача 2. Потрібно огородити прямокутну ділянку площею 200 м^2 . Якими мають бути розміри ділянки, щоб витрати на огорожу (периметр) були мінімальними? [23]

Розв'язування

Нехай x – ширина ділянки, а y – його висота.

Тоді $S = xy$. Виразимо з даної рівності одну зі сторін:

$$y = \frac{200}{x}$$

Знайдемо периметр:

$$P(x) = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{200}{x}\right) = 2x + \frac{400}{x}$$

Знайдемо похідну функції $P(x)$:

$$C'(x) = 2 - \frac{400}{x^2}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$2 - \frac{400}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{-400 + 2x^2}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{400}{2} = \pm\sqrt{200} = \pm 10\sqrt{2}$$

Точка $-10\sqrt{2}$ нам не підходить, тому обираємо єдину точку: $10\sqrt{2}$

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки (можна ще дослідити функцію на зміну знаку. Якщо в даній точці функція змінює знак з $-$ на $+$, то ця точка є максимумом) :

$$P''(x) = \frac{800}{x^3}$$

Оскільки друга похідна > 0 , це означає, що функція $C(x)$ має мінімум в точці $x = 10\sqrt{2}$.

$$\text{Знайдемо } y = \frac{200}{10\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

Відповідь: щоб витрати на огорожу були мінімальними вона повинна бути квадратною формою де висота і ширина $= 10\sqrt{2}$.

Задача 3. Потрібно пофарбувати сферичний резервуар. Площа поверхні резервуара залежить від радіуса r як $S(r) = 4\pi r^2$, а витрати на фарбування — від цієї площі: $C(r) = kS(r) + f$, де k — коефіцієнт вартості фарби за одиницю площі, f — постійні витрати. Знайти радіус, який мінімізує витрати при заданому об'ємі резервуара.

Розв'язування

Об'єм резервуара знаходиться за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Виразимо з формули радіус:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Підставимо r у формулу витрат:

$$C(V) = k4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} + f$$

Знайдемо похідну функції $C(V)$:

$$C'(V) = k4\pi \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \times V^{-\frac{1}{3}}$$

Щоб перевірити, чи це мінімум, знайдемо другу похідну:

$$C''(V) = -k \times 4\pi \times \frac{2}{9} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} V^{-\frac{4}{3}}$$

Оскільки $C''(V) > 0$, то знайдена точка є мінімумом.

Радіус r сферичного резервуара, що мінімізує витрати на фарбування, можна знайти через фіксований об'єм V .

Відповідь: радіус резервуара, що повинен мінімізувати витрати має бути рівним $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

З більшою кількістю оптимізаційних задач ви можете ознайомитись в розділі 3.

Завдання для самоперевірки

1. Фермер має ділянку 100 м^2 і вирощує дві культури: пшеницю й овес. Прибуток залежить від площі посіву за функцією $P(x) = 50x - x^2$, де x — площа пшениці, а $100-x$ — площа вівса. Знайти оптимальний розподіл площі, щоб максимізувати прибуток.

2. Ліхтар встановлюється на стовпі висотою 10 метрів. Потрібно знайти оптимальну висоту стовпа над землею, щоб світло покривало найбільшу площу.

3. Банк пропонує вкладнику функцію доходу $R(x) = 1000x - 50x^2$, де x — кількість інвестованих тисяч гривень. Знайти обсяг інвестицій, що максимізує дохід.

4. Знайти розміри прямокутного паркану із загальною довжиною огорожі 40 метрів, який огороджує максимальну площу.

5. Підприємство виробляє продукцію, прибуток від продажу якої описується функцією $P(x) = -2x^2 + 12x - 16$, де x — кількість вироблених одиниць. Знайти обсяг виробництва, що максимізує прибуток.

6. Знайти точку, на якій концентрація забруднень у річці, що описується функцією $C(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, досягає мінімального значення, якщо $x \in [0; 10]$.

Висновки до розділу 2.

У даному розділі магістерської роботи розглянуто широке застосування поняття похідної у вирішенні прикладних задач. Похідна виступає ключовим математичним інструментом, який дозволяє аналізувати динамічні процеси, досліджувати функції та знаходити оптимальні рішення.

Зокрема, було показано, що похідна застосовується для опису швидкості змін у природничих і соціально-економічних процесах, допомагає виявляти точки екстремумів, досліджувати тенденції та знаходити оптимальні значення у практичних ситуаціях. Її універсальність забезпечує можливість застосування у таких галузях, як фізика, економіка, біологія, техніка та багато інших.

Таким чином, поняття похідної є незамінним інструментом для вирішення задач, що виникають у різних сферах людської діяльності, забезпечуючи ефективні методи аналізу, прогнозування та оптимізації.

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО ЗАНЯТТЯ НА ТЕМУ: “ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО І НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ І ЗАДАЧІ НА ОПТИМІЗАЦІЮ”

Тема заняття: “Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку і задачі на оптимізацію”

Мета заняття:

1. Навчальна:

- Поглибити знання учнів на знаходження найбільшого і найменшого значення функції на заданому відрізку;
- розглянути методи розв’язування задач на оптимізацію.

2. Розвиваюча:

- сформувати аналітичне мислення та навички застосування математичних знань на практиці;
- розвинути здатність моделювати реальні процеси;
- розвинути допитливість і кмітливість;
- розвинути інтерес до математики

3. Виховна:

- сприяти розвитку наполегливості та самостійності у навчанні.

Аудиторія: учні 10-11 класів.

План заняття

1. Організаційний момент.
2. Мотивація навчальної і пізнавальної діяльності.
3. Актуалізація знань.
4. Формування вмінь і навичок.
5. Підсумок заняття.
6. Рефлексія.

Хід заняття

«Математику слід вивчати у школі
ще й для того, щоб одержанні знання
були достатні для звичайних потреб у житті»

М.І. Лобачевський

1. Організаційний момент.

- Привітання з учнями
- Повідомлення теми і мети уроку
- Налаштування на активну роботу

2. Мотивація навчальної і пізнавальної діяльності.

Розпочнемо сьогоднішнє заняття з Епіграфа, автором якого є відомий математик - М. І. Лобачевського, адже математику слід вивчати не лише для розв'язування різного роду задач, а й для вміння вирішувати життєві труднощі.

3. Актуалізація опорних знань учнів.

На актуалізацію знань з теми 'Знаходження найбільшого і найменшого значення функції на заданому відрізку' можна обрати одну або декілька запропонованих інтерактивних вправ:

1) [Кросворд на поняття похідної.](#)



Рис. 3.1

2) [Заповнити пропуски, користуючись означенням похідної.](#)

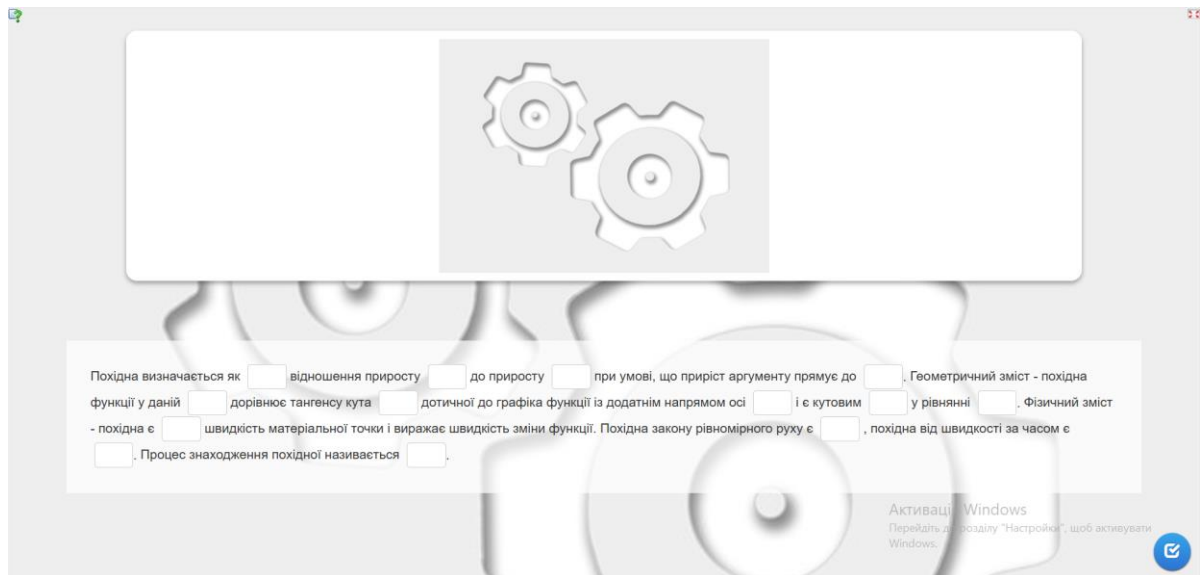


Рис. 3.2

3) Таблиця похідних (знайди пару).

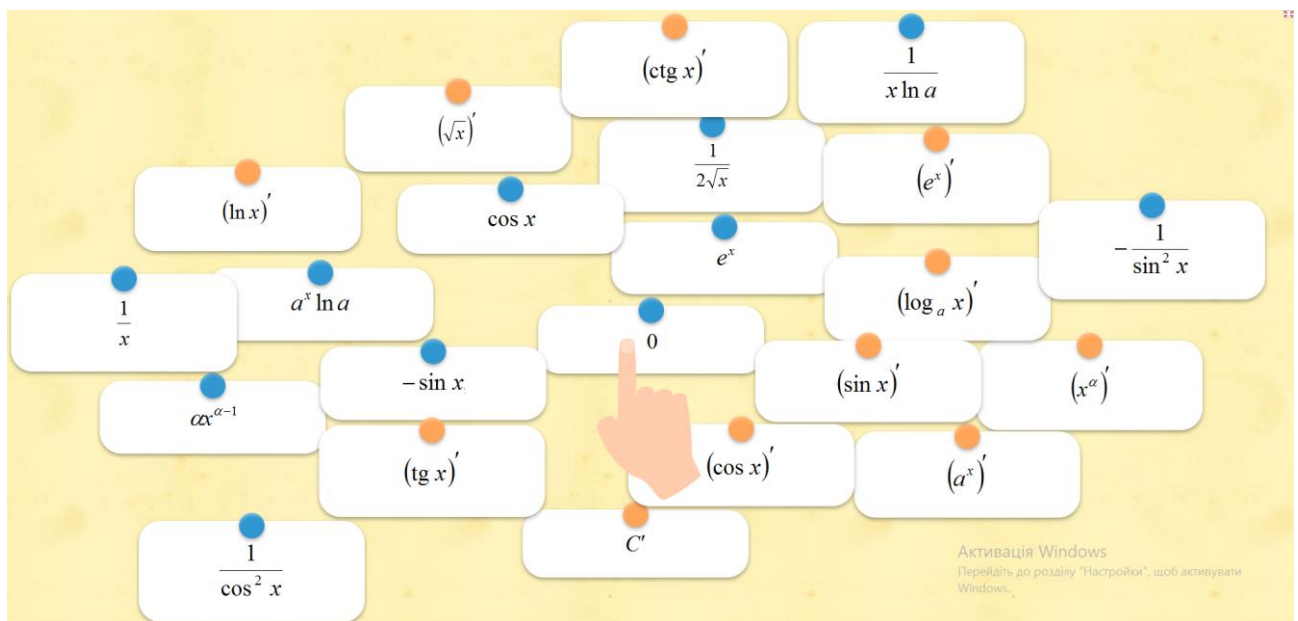


Рис. 3.3

4) Знайти похідну функції та обрати відповідний графік.

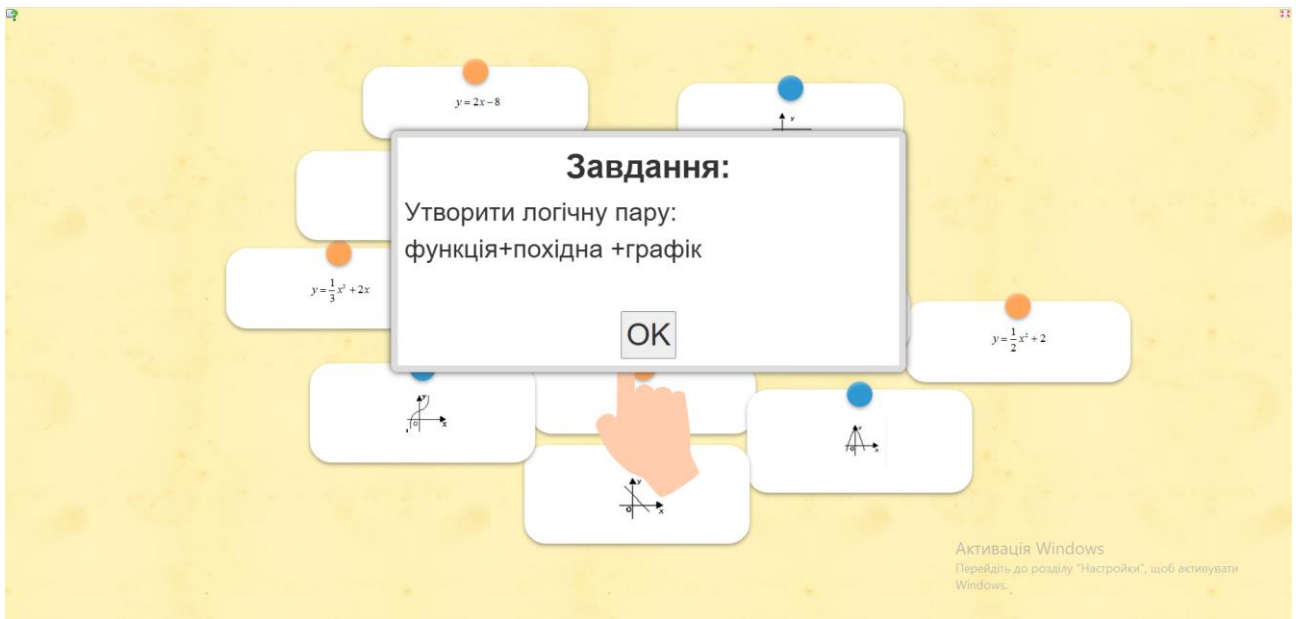


Рис. 3.4

- 5) [Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрітку 1.](#)

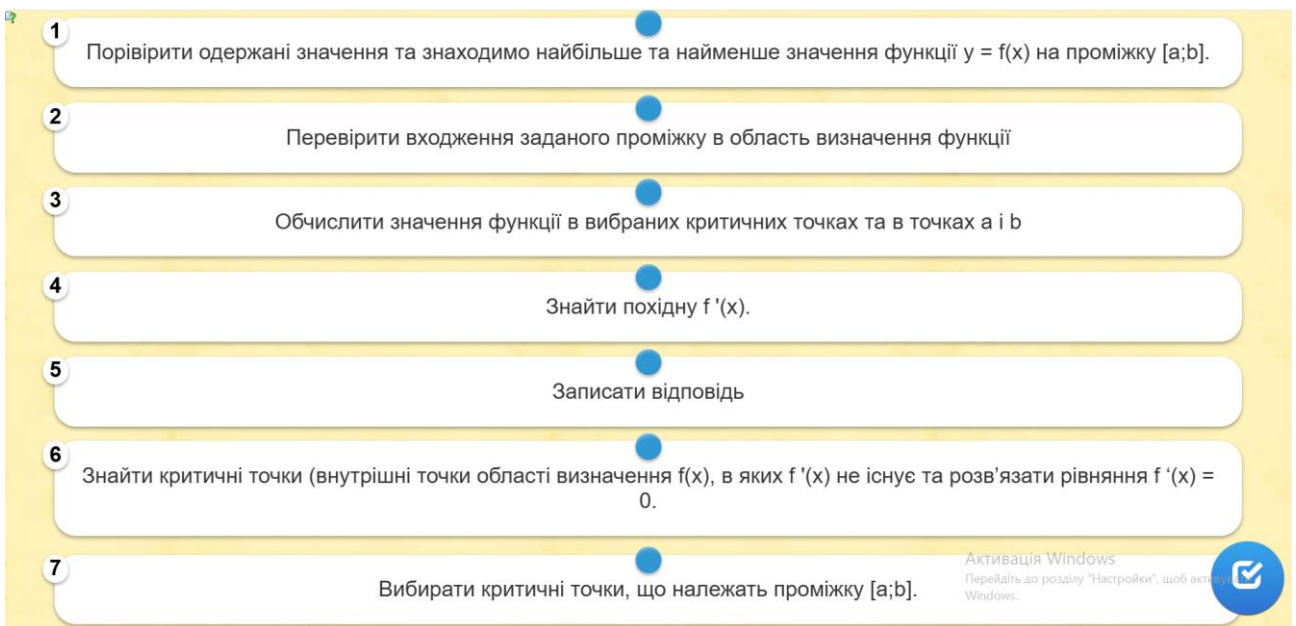


Рис. 3.5

- 6) [Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрітку 2.](#)



Рис. 3.6

Також можна скористатись [міні-презентацією](#) для повторення алгоритму знаходження найбільшого та найменшого значення функцій.

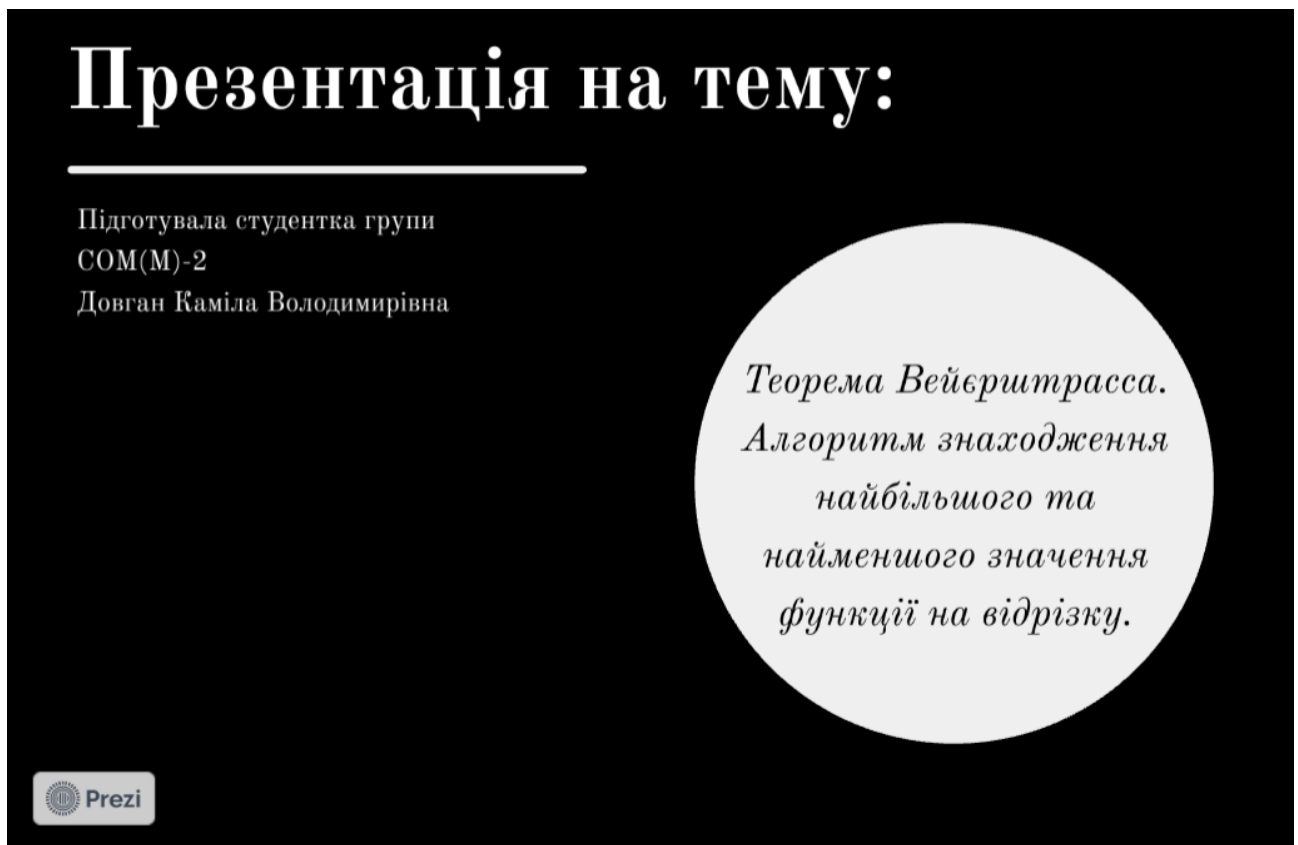


Рис. 3.7

Теорема Вейєрштрасса

Якщо функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому найбільшого значення M і найменшого значення m .

Інакше кажучи, на відрізку $[a;b]$ знайдуться такі точки x_1 та x_2 , що значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$ будуть відповідно найбільшими і найменшими з усіх значень функції $y=f(x)$ на цьому відрізку.

Пункт 1 Пункт 2
 Алгоритм Пункт 3
 Пункт 5 Пункт 4
 Приклад

Активуйте Windows
Перейдіть до розділу "Налаштування"
Windows.

Рис. 3.8

4. Формування вмінь і навичок.

Оптимізація – це процес знаходження найкращого можливого рішення для поставленої задачі за заданими умовами. У математиці задачі оптимізації зводяться до пошуку найбільшого (максимуму) або найменшого (мінімуму) значення.

Задачі на оптимізацію часто виникають у реальному житті. Наприклад:

- Максимізація прибутку підприємства.
- Мінімізація витрат на виробництво.
- Знаходження найкоротшого маршруту.
- Пошук об'єму або площі найбільш вигідної конструкції.

Тому ми сьогодні з Вами навчимося розв'язувати задачі на оптимізацію, використовуючи похідну.

Задача 1. Підприємство виробляє продукцію, прибуток від продажу якої описується функцією $P(x) = -2x^2 + 12x - 16$, де x — кількість вироблених одиниць. Знайти обсяг виробництва, що максимізує прибуток.

Розв'язування

Знайдемо похідну функції $P(x)$:

$$P'(x) = -4x + 12$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$-4x + 12 = 0 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки (можна ще дослідити функцію на зміну знаку. Якщо в даній точці функція змінює знак з + на -, то ця точка є максимумом) :

$$P''(x) = -4$$

Оскільки друга похідна < 0 , це означає, що функція $P(x)$ має максимум в точці $x = 3$.

Знайдемо максимальний прибуток, підставивши $x = 3$ в функцію:

$$P(3) = -4 * 9 + 12 * 3 - 16 = -18 + 36 - 16 = 2$$

Відповідь: обсяг виробництва, що максимізує прибуток = 3 одиниці, максимальний прибуток при якому = 2.

Задача 2. Знайти точку, на якій концентрація забруднень у річці, що описується функцією $C(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, досягає мінімального значення, якщо $x \in [0;10]$.

Розв'язування

Знайдемо похідну функції:

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{(x^2)'(x^2 + 4) - (x^2 + 4)'x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x(x^2 + 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x(x^2 + 4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{8x}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$C'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

Знайдемо значення функції в точці $x = 0$ і на кінцях відрізка $x \in [0;10]$:

$$C(0) = \frac{0}{0+4} = 0;$$

$$C(10) = \frac{100}{104} = \frac{25}{26}$$

Оскільки нам потрібне мінімальне значення забруднень, то воно буде при $x = 0$

Відповідь: концентрація забруднень у річці, що описується функцією $C(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, досягає мінімального значення при $x = 0$.

Задача 3. Банк пропонує вкладнику функцію доходу $R(x) = 1000x - 50x^2$, де x — кількість інвестованих тисяч гривень. Знайти обсяг інвестицій, що максимізує дохід.

Розв'язування

Знайдемо похідну функції $R(x)$:

$$R'(x) = 1000 - 100x$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$1000 - 100x = 0 \rightarrow 100x = 1000 \rightarrow x = 10$$

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки:

$$R''(x) = -100$$

Оскільки друга похідна < 0 , це означає, що функція $R(x)$ має максимум в точці $x = 10$.

Знайдемо максимальний дохід, підставивши $x = 10$ в функцію:

$$R(10) = 1000 \times 10 - 50 \times 100 = 10000 - 5000 = 5000$$

Відповідь: максимальний дохід в 5000 грн буде у випадку, коли вкладник інвестує 10 тис. грн.

Задача 4. Ефективність роботи сонячної панелі залежить від кута нахилу панелі до горизонту. Ефективність $E(\theta)$ можна описати функцією: $E(\theta) = 10 \sin \theta + 3 \cos(\theta)$, де θ — кут нахилу сонячної панелі (в градусах або радіанах). Знайти оптимальний кут нахилу θ , при якому ефективність буде максимальною.

Розв'язування

Знайдемо похідну функції $E(\theta)$:

$$E'(\theta) = 10 \cos \theta - 3 \sin \theta$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$10 \cos \theta - 3 \sin \theta = 0 \rightarrow -3 \sin \theta = 10 \cos \theta$$

Розділимо обидві частини рівняння на $\cos \theta$:

$$-3 \tan \theta = -10 \rightarrow \tan \theta = \frac{10}{3}$$

$$\theta = \arctan \frac{10}{3} + \pi n, \text{ де } n \in Z \rightarrow \theta \approx 1,29 \text{ рад або } 73,3^\circ$$

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки:

$$\begin{aligned} E''(\theta) &= -10 \sin x - 3 \cos x = -10 \sin(1,29) - 3 \cos(1,29) \\ &= 10 \times 0,961 - 3 \times 0,275 \approx -10,435 \end{aligned}$$

Оскільки друга похідна < 0 , це означає, що функція $E(x)$ має максимум в точці $\theta = \arctan \frac{10}{3}$.

Відповідь: оптимальний кут нахилу, при якому ефективність буде максимальною є $73,3^\circ$.

Задача 5. Підприємство виробляє протягом інтервалу часу задану величину x певних об'єктів (речей). При цьому воно повинно платити податок $C(x) = x^2 - 20x + 400$ (грн). Середні єдині загальноприйняті податки $C_m = \frac{C(x)}{x}$. Скільки об'єктів повинно виробляти підприємство, щоб платити мінімальний середній єдиний податок?

Розв'язування

Знайдемо похідну функції C_m :

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{x^2 - 20x + 400}{x} \\ C'(x) &= \frac{(x^2 - 20x + 400)'x - x'(x^2 - 20x + 400)}{x^2} \\ &= \frac{x(2x - 20) - x^2 + 20x - 400}{x^2} = \frac{2x^2 - 20x - x^2 + 20x - 400}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 400}{x^2} \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$\frac{x^2 - 400}{x^2} = 0$$

ОДЗ:

$$x \neq 0$$

$$x^2 - 400 = 0 \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = \pm 20$$

Оскільки кількість об'єктів не може бути від'ємним, то обираємо лише 1 критичну точку, $x=20$.

Перевіримо знак другої похідної, щоб перевірити характер точки:

$$\begin{aligned} C''(x) &= \frac{(x^2 - 400)'x^2 - x^2'(x^2 - 400)}{x^4} = \frac{2x * x^2 - 2x(x^2 - 400)}{x^4} = \\ &= \frac{2x^3 - 2x^3 + 800x}{x^4} = \frac{800x}{x^4} \end{aligned}$$

Підставимо $x=20$:

$$C''(20) = \frac{800*20}{20^4} = \frac{800}{20^3} = \frac{800}{8000} = \frac{1}{10}$$

Оскільки друга похідна > 0 , це означає, що функція $C(x)$ має мінімум в точці $x = 20$.

Мінімальний середній єдиний податок при $x = 20$:

$$C(20) = \frac{20^2 - 20 * 20 + 400}{20} = \frac{400}{20} = 20$$

Відповідь: щоб середній єдиний податок був мінімальним виробництво повинно виробляти 20 одиниць.

Задача 6. Визначити розмір басейну з квадратним дном, щоб на облицювання стін і дна пішла найменша кількість матеріалу, якщо об'єм цього басейну повинен дорівнювати 32м^3 .

Розв'язування

Нехай основа квадрату $= x$, а висота $= h$. Тоді об'єм басейну: $V = x^2 * h = 32$. Виразимо висоту: $h = \frac{V}{x^2} = \frac{32}{x^2}$. Площа повної поверхні басейну:

$$S_{\text{пп}} = S_{\text{б.п.}} + S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{б.п.}} = P_{\text{осн.}} * h = 4x * h$$

$$S_{\text{осн.}} = x^2$$

Підставимо значення:

$$S_{\text{п.п.}} = 4x * h + x^2 = 4x \frac{32}{x^2} + x^2$$

Знайдемо похідну:

$$S'_{\text{п.п.}} = \left(\frac{128}{x} + x^2 \right)' = -\frac{128}{x^2} + 2x$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$-\frac{128}{x^2} + 2x = 0; \rightarrow \frac{-128 + 2x^3}{x^2} = 0;$$

ОДЗ: $x_1 \neq 0$.

$$2x^3 - 128 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x_2 = 4$$

Отже, ми маємо 2 критичні точки. Оскільки сторона основи басейну не може дорівнювати 0, тому маємо єдиний варіант $x = 4$. Даний варіант перевіряють за допомогою дослідження знака похідної в околі точки $x = 4$.

$$\text{При } x = 4 \rightarrow h = \frac{32}{16} = 2.$$

Знайдемо кількість матеріалу, який буде потрібен для облицювання басейну, висота якого = 2 а сторона основи = 4:

$$S_{\text{пп}} = 4x * h + x^2 = 4 * 4 * 2 + 16 = 32 + 16 = 48\text{м}^2$$

Отже, на облицювання даного басейну потрібно буде 48м^2 матеріалу. Щоб впевнитись в вірності підрахунків можна обрати будь які інші розміри басейну, але щоб його об'єм був 32м^3 , і побачити, що при інших розмірах кількість матеріалу буде більшою.

Відповідь: сторона основи басейну – 4м а його висота – 2м.

Задача 7. Металевий дріт довжиною 100 см потрібно розділити на дві частини: одна піде на виготовлення квадрата, інша — на виготовлення кола. Як розділити дріт, щоб сумарна площа фігур була максимальною?

Розв'язування

Нехай довжина дроту, яка піде на виготовлення квадрату – x см, тоді довжина, що піде на коло – $(100 - x)$ см. З периметру квадрата виразимо його сторону: $P = 4a \rightarrow a = \frac{P}{4} \rightarrow a = \frac{x}{4}$ – сторона квадрата. Виразимо площу квадрата:

$$S = a^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$$

З довжини кола виразимо його радіус: $C = 2\pi r \rightarrow r = \frac{C}{2\pi} \rightarrow r = \frac{100-x}{2\pi}$.

Знайдемо площу кола:

$$S = \pi r^2 \rightarrow S = \pi \frac{(100-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(100-x)^2}{4\pi}$$

Сумарна площа фігур:

$$S_{\text{сумарна}} = S_{\text{кв}} + S_{\text{кол}} = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{4\pi}$$

Знайдемо похідну цієї площі:

$$S' = \frac{2x}{16} - \frac{2(100-x)}{4\pi} = \frac{2\pi x - 8(100-x)}{16\pi} = \frac{2\pi x - 800 + 8x}{16\pi}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$\frac{2\pi x - 800 + 8x}{16\pi} = 0 \rightarrow 2\pi x - 800 + 8x = 0 \rightarrow x(2\pi + 8) = 800 \rightarrow x = \frac{800}{2\pi + 8} \approx 56 \text{ см}$$

Тоді довжина дроту для кола $= 100 - \frac{800}{2\pi+8} \approx 44 \text{ см}$

Відповідь: щоб сумарна площа фігур була максимальною потрібно розділити на 56 см для квадрата і 44 см для кола.

Задача 8. Рятувальний буй, який має форму подвійного конуса, конструюють з допомогою двох кругових секторів радіуса 3 дм металевої площини (Рис. 3.9). Якими повинні бути радіус r основи конуса і його висота h , щоб об'єм буя був найбільшим?

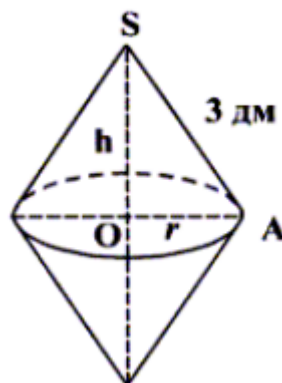


Рис. 3.9

Розв'язування

Буй складається із двох конусів, отже його об'єм можна знайти за формулою:

$$V = 2 * \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

Де r – радіус основи конуса, а h – його висота.

Сектор кола з радіусом 3 дм використовується для утворення бокової поверхні кожного конуса. Довжина дуги сектору є довжиною кола основи конуса:

$$L = 2\pi r$$

З іншого боку, довжина дуги сектору дорівнює $L = \alpha \times R$, де $R=3$ дм. — радіус сектору, і $\theta=2\pi$ — кут у радіанах (повний сектор). Тобто:

$$L = 2\pi R = 2\pi 3 = 6\pi$$

Такий чином:

$$2\pi r = 6\pi \rightarrow r = 3$$

Утворена висота h та радіус r утворюють прямокутний трикутник із гіпотенузою, що дорівнює 3. За теоремою Піфагора:

$$h = \sqrt{3^2 - r^2}$$

Отже, загальний об'єм бую:

$$V = 2 * \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{2}{3} \pi r^2 \sqrt{9 - r^2}$$

Спростимо даний вираз виключивши з нього $\frac{2}{3} \pi$

Знайдемо похідну функції $V(r)$:

$$\begin{aligned} V'(r) &= (r^2 \sqrt{9 - r^2})' = (r^2)' \sqrt{9 - r^2} + (r^2 \sqrt{9 - r^2})' r^2 = 2r \sqrt{9 - r^2} - \\ &\quad - \frac{r}{\sqrt{9 - r^2}} \times r^2 = \frac{2r(9 - r^2) - r^3}{\sqrt{9 - r^2}} \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$\frac{2r(9 - r^2) - r^3}{\sqrt[2]{9 - r^2}} = 0$$

ОДЗ:

$$9 - r^2 \neq 0 \rightarrow r \neq \pm 3$$

$$2r(9 - r^2) - r^3 = 0 \rightarrow 18r - 2r^3 - r^3 = 0 \rightarrow r(18 - 3r^2) = 0 \rightarrow r_1 = 0; r_2 = \sqrt{6}$$

Оскільки радіус не може = 0, тому обираємо лише одну критичну точку $r = \sqrt{6}$.

При $r = \sqrt{6}$ знайдемо h :

$$h = \sqrt[2]{3^2 - r^2} = \sqrt[2]{9 - 6} = \sqrt{3}$$

Відповідь: максимальний об'єм буйка буде лише, коли радіус = $\sqrt{6}$ а висота - $\sqrt{3}$.

Задача 9. Яким повинно бути співвідношення висоти та діаметра консервної банки циліндричної форми, щоб вона вміщала якнайбільше консервантів при заданій її площі поверхні S (вміщає якнайбільше консервантів, але на її виготовлення витрачається якнайменше бляхи).

Розв'язування

Об'єм циліндра:

$$V = \pi r^2 h$$

Площа повної поверхні циліндра (включаючи 2 основи):

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Для того, щоб вмістилось якомога більше консерванту, потрібно максимізувати об'єм. Спочатку виразимо висоту h через r та фіксоване S :

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Підставимо висоту у формулу об'єму:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r(S - 2\pi r^2)}{2}$$

Знайдемо похідну функції $V(r)$:

$$V'(r) = \left(\frac{r(S - 2\pi r^2)}{2} \right)' = \left(\frac{rS}{2} - \frac{2\pi r^3}{2} \right)' = \frac{S}{2} - \frac{6\pi r^2}{2} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до 0:

$$\frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow S - 6\pi r^2 = 0 \rightarrow r^2 = \frac{S}{6\pi}$$

Тепер знайдемо h , підставивши $r^2 = \frac{S}{6\pi}$ у формулу h :

$$h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S - 2\pi \frac{S}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{S - \frac{S}{3}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \frac{\frac{2S}{3}}{2\pi \sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \sqrt{\frac{6S}{\pi}} \times \frac{1}{3}$$

Отже, $h = 2r$ а це означає, що висота повинна бути такою ж самою, як і діаметр.

Відповідь: щоб консервна банка вміщала якомога більше вмісту але при цьому на її виготовлення витрачалося якнайменше бляхи висота повинна бути такою ж як і діаметр.

5. Підсумок заняття.

Отже, оптимізація – це універсальний інструмент для прийняття найкращих рішень як у математиці, так і в практичних задачах!

Сподіваюсь, на сьогоднішньому факультативному занятті, Ви ще раз впевнилися, що знання похідної знадобляться не лише на уроках математики, а й у повсякденному житті.

6. Рефлексія.

На завершення нашого заняття пропоную Вам дати відповідь на декілька запитань. [Посилання на шаблон.](#)

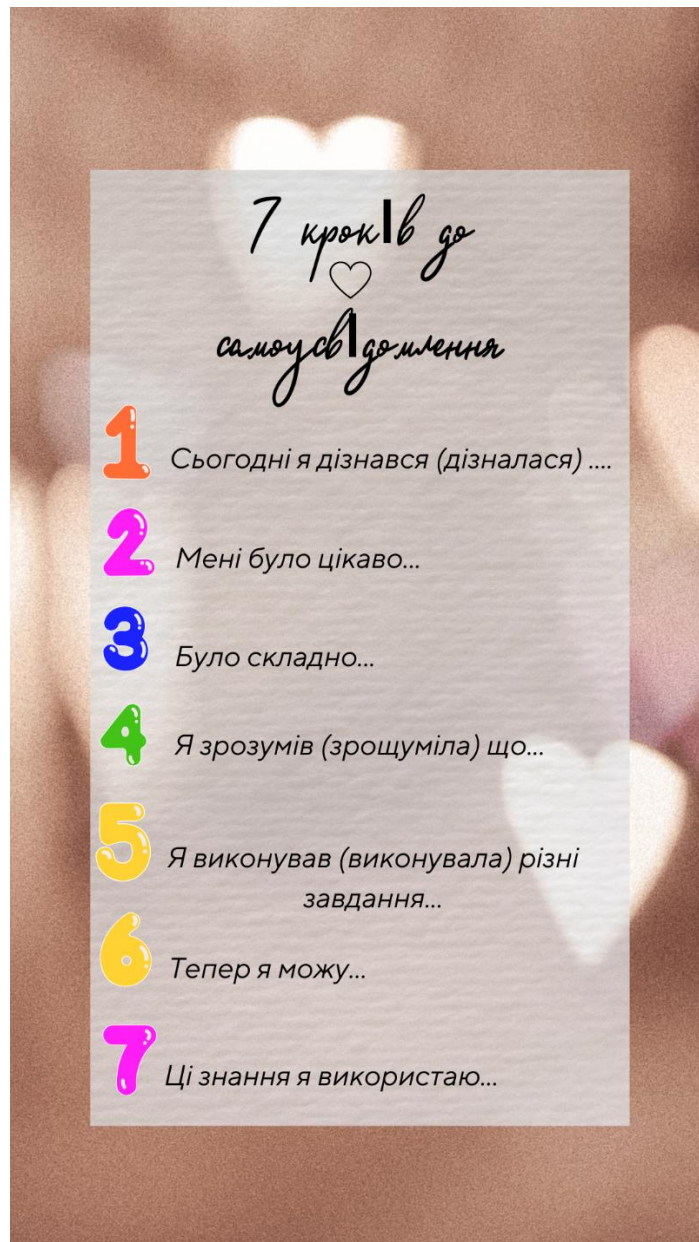


Рис. 3.10

Висновки до розділу 3.

Можна зробити висновок, що тема «Найбільше та найменше значення функції на проміжку» має досить важливе значення, оскільки широко застосовується при розв'язування оптимізаційних задач. В цьому учні можуть переконатися відвідавши розроблене факультативне заняття. Прикладні задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення функції слід пропонувати учням під час навчання на всіх рівнях, оскільки це сприяє кращому засвоєнню даної теми та викликає інтерес до математики.

ВИСНОВОК

У магістерській роботі було проведено дослідження ролі похідної у розв'язуванні прикладних задач різного характеру. Застосування похідної як одного з фундаментальних інструментів математичного аналізу дозволяє не лише знаходити екстремальні значення функцій, але й ефективно моделювати процеси, оптимізувати ресурси та вирішувати реальні задачі в різних галузях науки, техніки та економіки.

Було здійснено огляд історичного розвитку поняття похідної, починаючи з праць Ісаака Ньютона та Готфріда Лейбніца, до сучасного трактування в математичному аналізі. Проаналізовано ключові теоретичні аспекти похідної, її геометричний, фізичний та економічний зміст.

Також проаналізовано підручники з Алгебри та початків аналізу де було виявлено, що виклад матеріалу здебільшого орієнтований на вирішення задач на дослідження функцій, проте недостатньо уваги приділяється застосуванню похідної для розв'язання прикладних задач. Це ще раз доводить актуальність даного дослідження, адже діти повинні вміти застосовувати отримані знання в житті, а не лише на уроках математики.

Розглянуто та розв'язано різні типи прикладних задач із природничих наук, економіки, фізики та оптимізації. Було доведено, що похідна дозволяє формалізувати процеси, які мають реальне практичне значення, наприклад:

- знаходження екстремумів фізичних і економічних процесів.
- оптимізація витрат і ресурсів.
- дослідження функцій для моделювання природних явищ та інші...

На основі дослідження було створено структуру факультативного заняття, присвяченого знаходженню найбільшого і найменшого значення функції на відрізка та розв'язанню задач на оптимізацію. Заняття включає теоретичний матеріал, інтерактивні завдання та приклади реальних задач, що сприяє кращому засвоєнню теми.

У подальших дослідженнях доцільно приділити увагу автоматизації процесу розв'язування прикладних задач із використанням похідної, а також розширити застосування цієї концепції для вдосконалення методів, зокрема, вивчення задач із використанням часткових похідних, чисельних методів та диференціальних рівнянь.

Таким чином, у роботі підкреслено важливість похідної як інструменту не лише для математичного аналізу, а й для ухвалення рішень у прикладних галузях. Використання похідної дозволяє формалізувати, спрощувати та вирішувати складні задачі, що свідчить про її актуальність і широке застосування в сучасній науці та технологіях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. “Алгебра і початки аналізу (поглиблений рівень)” 10 клас, 2018 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/428-algebra-z-pogliblenim-vivchennyam-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakir-10-klas.html>
2. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, “Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)” 10 клас, 2018 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/430-algebra-proflniy-rven-merzlyak-10-klas.html>
3. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, “Алгебра і початки аналізу (академічний рівень)” 10 клас, 2010 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/429-algebra-akademchniy-rven-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakir-10-klas.html>
4. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, “Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту)” 10 клас, 2018р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1153-matematyka-10-klas-merzlyak.html>
5. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, “Збірник задач і контрольних робіт з алгебри і початків аналізу”, 10 клас, 2018р., URL: <https://detmir.com.ua/product/300818/>
6. А. Г. Мерзляк, Алгебра 10 клас, збірник задач 2011, URL: <https://shkola.in.ua/604-alhebra-10-klas-merzliak-zbirnyk-zadach.html>
7. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с.
8. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан, О. В. Ніколаєва // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – Бердянськ: БДПУ, 2011. – № 2. – 360 с.
9. Б.Г. Орач. Підвищимо ефективність викладання математики в школі. – Львів: Сполом , 2006.
10. Блог вчителя математики Голич А. В. [Електронний ресурс] // Інформаційний портал. – URL: <https://teacherslifesite.wordpress.com/>
11. В.В. Барковський , Н.В. Барковська. Вища математика для економістів.- Київ: центр учб. Літ, 2010.
12. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв’язок теорії з практикою в процесі навчання математики: Посібник для вчителя.- К.: Рад шк., 1989.-128с
13. Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, “Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)” 10 клас, 2018 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1169-algebr-bevz-10-klas.html>

14. Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, “Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту)” 10 клас, 2018р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/403-matematika-bevz-10-klas.html>
15. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015.
16. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи і моделі, приклади та задачі. – Київ : «Либідь», 2007
17. Довган К. В., дипломна робота на тему: “Стандартні і нестандартні методи розв’язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з використанням цифрових технологій.
18. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрнік. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
19. Дереза І. С., Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні / І. С. Дереза, О. А. Іванова // ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. – Том 42. – с.171-178.
20. Думанська Т.В. Особливості викладання теми „Похідна та її застосування” для курсантів факультету військової підготовки. Педагогічна освіта: теорія і практика : зб. наук. праць. Вип. 10. / Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка / гол. ред. Каньоса П. С. Кам’янець-Подільський : Видавець ПП Зволейко Д. Г., 2012. С. 187-193.
21. Є. П. Нелін., “Алгебра і початки аналізу (академічний рівень)” 10 клас, 2010 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/427-algebra-neln-10-klas.html>
22. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А. В. Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.
23. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл./ Л.М. Вивальнюк, О.І. Соколенко, Ю.В. Костарчук та ін. – К.: Рад. шк., 1991.-175 с.
24. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики / Науково-методичний посібник. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008
25. Корнійчук О.Е. Вивчення похідної разом із Maple // Фізико-математична освіта : науковий журнал, 2016. Випуск 3(9), С.61-69.
26. Математика: Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Уклад.: А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк, Л. І. Кондратьєва, О. М. Мартинюк, С. В. Мартинюк, Л. І. Олійник, П. І. Ульшин, О. Й. Чиж. — Тернопіль : Підручники і посібники.

27. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.-331 с.
28. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 2.- 272 с.
29. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧП. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна.-Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.6-27.
30. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Академічний рівень// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧП. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.28-51.
31. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧП. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.-С.52-83.
32. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики)// Збірник програм з математики для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). ЧП. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єргіна. -Х.: Видавництво "Ранок", 2011.- С.84-121.
33. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.
34. О. С. Істер, О. В. Єргіна, "Алгебра і початки аналізу (академічний рівень)" 10 клас, 2018 р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1223-algebra-10-klas-ister.html>
35. О. С. Істер, "Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія (рівень стандарту)" 10 клас, 2018р., URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1154-matematyka-10-klas-ister.html>
36. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В.М. Кузнецов, Т.М. Бусарова, Т.А. Агошкова, І.В. Клименко, Н.В. Міхєєва;

Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.

37. Погребний В. Узагальнення поняття похідної // Фізико-математична освіта: науковий журнал, 2017. Випуск 2(12), С.124-129.

38. Романюк В.Я., Дутко Л.В. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. – Львів: Тріада плюс, 2004.

39. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників у ВНЗ. – К.: Вища школа, 1994.

40. Слепкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-ге видання, доповнене і перероблене / Слепкань Зінаїда Іванівна. – К.: Вища школа, 2006. – 34 с.

41. Соколенко Л. О., Швець В. О., Різні типи прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань в курсі алгебри і початків аналізу - Математика в рідній школі, 2014.

42. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. -Чернігів: Сіверянська думка,2002.-128с.

43. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.

44. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.- метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: "Тираж", 1997.-127с.

45. Ткач Ю.М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчальнометодичний посібник / Ю.М. Ткач. – Х.: Вид-во "Ранок", 2011.-176с.

46. Усик Ольга. Запровадження нових технологій у традиційну систему навчання методом проектів. Математика в сучасній школі. – 2012. – №1.

47. Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О.А. Тимошенко, практикум: "Математичні моделі в економічних задачах", - Київ, 2014, URL: <https://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D0%BA%D1%83%D0%BC.pdf>