

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

## **КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему **“Векторний метод розв’язування планіметричних задач”**

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Задунайчук О.В.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Никифорчин І.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент \_\_\_\_\_

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

## ЗМІСТ

|                                                                                            | Стор. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ВСТУП.....                                                                                 | 3     |
| РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ .....                                                   | 5     |
| 1.1. Визначення вектора та його властивості .....                                          | 5     |
| 1.2. Операції над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр) .....              | 8     |
| 1.3. Скалярний добуток векторів та його застосування .....                                 | 14    |
| РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ В ПЛАНІМЕТРІЇ .....                               | 19    |
| 2.1. Векторний метод розв'язування задач на проекцію вектора.....                          | 19    |
| 2.2. Векторний метод розв'язування задач на ортогональність векторів .....                 | 23    |
| 2.3. Векторний метод розв'язування задач на колінеарність та компланарність векторів ..... | 27    |
| РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНИМ МЕТОДОМ .....                                      | 34    |
| 3.1. Задачі на знаходження відстаней, довжин відрізків та площ .....                       | 34    |
| 3.2. Задачі на колінеарність, компланарність та обрахунок кута між векторами .....         | 39    |
| ВИСНОВКИ .....                                                                             | 48    |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....                                                           | 51    |
| ДОДАТКИ .....                                                                              | 53    |

## ВСТУП

Векторний метод розв'язування планіметричних задач є одним з найефективніших і найелегантніших інструментів сучасної математики, що дозволяє значно спростити та уніфікувати підходи до вирішення широкого спектру геометричних проблем. Актуальність дослідження цієї теми зумовлена зростаючою потребою в оптимізації та модернізації методів математичного аналізу, особливо в контексті розвитку комп'ютерних технологій та їх застосування у різноманітних галузях науки і техніки.

Мета даного дослідження полягає у всебічному аналізі та систематизації знань про векторний метод розв'язування планіметричних задач, а також у виявленні його переваг та потенційних обмежень порівняно з класичними методами геометрії.

Для досягнення цієї мети поставлено ряд конкретних завдань: дослідити теоретичні основи векторної алгебри та її застосування в планіметрії; проаналізувати специфіку використання векторного методу для розв'язання різних типів геометричних задач; розробити алгоритми ефективного застосування векторного методу в навчальному процесі та науковій діяльності.

Об'єктом дослідження виступає векторна алгебра як математична дисципліна та її застосування в геометрії.

Предметом дослідження є безпосередньо векторний метод розв'язування планіметричних задач, його теоретичні основи, практичні аспекти застосування та методологічні особливості.

Методологічна база дослідження ґрунтується на комплексному підході, що включає як теоретичні, так і емпіричні методи наукового пізнання. Серед ключових методів дослідження варто відзначити: аналіз та синтез наукової літератури з теми векторної алгебри та планіметрії; математичне моделювання геометричних задач з використанням векторного апарату; порівняльний аналіз

ефективності векторного методу та класичних геометричних підходів; систематизація та узагальнення отриманих результатів.

Інформаційну базу дослідження складають фундаментальні праці вітчизняних та зарубіжних математиків у галузі векторної алгебри та геометрії, навчальні посібники та підручники з вищої математики, наукові статті та публікації в спеціалізованих математичних журналах, матеріали конференцій та семінарів, присвячених проблемам застосування векторних методів у математиці та суміжних дисциплінах.

## РОЗДІЛ 1. ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ

### 1.1. Визначення вектора та його властивості

У математиці, а особливо в галузях, таких як лінійна алгебра та векторний аналіз, вектор є фундаментальним поняттям, що представляє величину, яка має як числове значення, так і напрямок у просторі. Векторами можуть бути сили, швидкості, прискорення та інші фізичні величини, що мають напрямок та величину. Вони відрізняються від скалярних величин, які мають лише числове значення без напрямку.

Щоб зрозуміти сутність векторів, уявімо собі стрілку, яка має певну довжину та вказує в певному напрямку. Ця стрілка і є графічним представленням вектора. Довжина стрілки відображає величину (модуль) вектора, тоді як її напрямок визначає напрямок вектора. Таким чином, вектор є сукупністю числового значення та напрямку в просторі [3].

Векторів існує безліч типів, але найчастіше розглядають ті, що належать до двовимірного або тривимірного простору. У двовимірному просторі вектори можна зобразити на площині за допомогою двох координат  $(x, y)$ , а у тривимірному просторі – за допомогою трьох координат  $(x, y, z)$ .

Основні властивості векторів (рис. 1.1.):

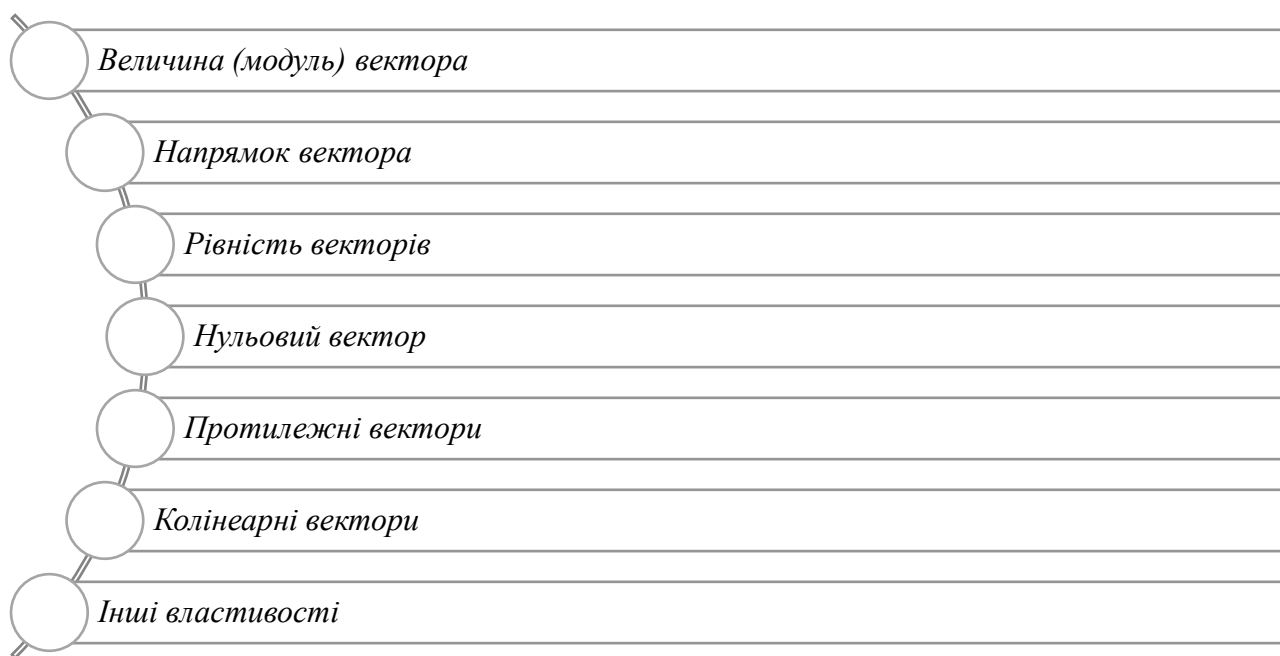


Рис. 1.1. Властивості векторів

Тож, вектор є однією з найважливіших концепцій у математиці та багатьох галузях науки, таких як фізика, інженерія та комп'ютерна графіка. На відміну від скалярних величин, які мають лише числове значення, вектори поєднують у собі як величину, так і напрямок у просторі. Уявіть собі стрілку, яка має певну довжину та орієнтацію – це і є графічне представлення вектора. Довжина стрілки відображає величину або модуль вектора, тоді як її напрямок визначає орієнтацію вектора в просторі.

Величина вектора – це завжди додатне числове значення, що вказує на «розмір» або довжину вектора. Її можна обчислити за відповідними формулами, залежно від кількості вимірів простору, в якому розглядається вектор. Наприклад, у двовимірному просторі величина вектора обчислюється за формулою квадратного кореня з суми квадратів його компонент ( $x$  та  $y$ ), а у тривимірному просторі – квадратного кореня з суми квадратів компонент ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Напрямок вектора визначає його орієнтацію в просторі. Він може бути заданий кутом між вектором та однією або кількома координатними осями або визначений за допомогою компонент вектора. Компоненти вектора – це проекції вектора на відповідні координатні осі. Наприклад, у двовимірному просторі вектор має дві компоненти ( $x$  та  $y$ ), а в тривимірному – три компоненти ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають однакову величину та напрямок, незалежно від їхнього положення в просторі. Це означає, що вектори можуть бути зміщені або переміщені в інше місце простору, але якщо їхні величини та напрямки збігаються, вони вважатимуться рівними.

Існує також поняття нульового вектора, який має нульову величину, але його напрямок невизначений. Він зображується точкою або векторною стрілкою нульової довжини. Нульовий вектор є особливим випадком і відіграє важливу роль у векторних обчисленнях [10].

Два вектори вважаються протилежними, якщо вони мають однакову величину, але протилежні напрямки. Це означає, що вони розташовані на одній прямій, але вказують у протилежні боки.

Колінеарні вектори – це вектори, які лежать на одній прямій лінії. Вони можуть мати однаковий або протилежний напрямок, але їхня орієнтація завжди буде паралельною.

Операції додавання та віднімання векторів можна виконувати як геометрично, так і алгебраїчно, використовуючи їхні компоненти. Геометрично додавання двох векторів відбувається шляхом побудови паралелограма, де один вектор є однією стороною, а інший – іншою стороною. Результуючий вектор буде діагоналлю цього паралелограма. Алгебраїчно додавання векторів відбувається шляхом додавання відповідних компонент векторів.

Множення вектора на скаляр – це операція, при якій вектор множиться на деяке числове значення (скаляр). Результатом є новий вектор, який має ту саму

орієнтацію, що й початковий вектор, але з величиною, помноженою на скалярне значення. Якщо скаляр додатний, то напрямок вектора не змінюється, а якщо від'ємний, то напрямок вектора змінюється на протилежний.

Скалярний добуток векторів – це операція, що дає скалярний результат, який представляє проєкцію одного вектора на напрямок іншого вектора, помножену на величину цього другого вектора. Скалярний добуток використовується для знаходження кутів між векторами та визначення ортогональності (перпендикулярності) векторів. Два вектори вважаються ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю [2].

Нарешті, векторний добуток векторів – це операція, що дає векторний результат, який є перпендикулярним до обох вихідних векторів. Векторний добуток використовується для визначення площі паралелограма, утвореного двома векторами, та для знаходження нормалі до площини, заданої двома векторами. Нормаль – це вектор, перпендикулярний до площини, і її можна знайти за допомогою векторного добутку двох векторів, що лежать у цій площині.

Ці властивості та операції з векторами мають широке застосування в різних галузях науки та інженерії. Вони дозволяють виконувати складні обчислення та моделювання, пов'язані з напрямленими величинами, траєкторіями руху, силами та полями. Без розуміння концепції векторів неможливо було б описувати та аналізувати багато фізичних явищ та процесів у природі та техніці.

## **1.2. Операції над векторами (додавання, віднімання, множення на скаляр)**

Векторні операції є фундаментальними математичними засобами, які широко використовуються в різноманітних сферах, від фізики та інженерії до

комп'ютерної графіки та машинного навчання. Вони дозволяють маніпулювати векторами, які є абстрактними об'єктами, що мають величину та напрямок у просторі. У цьому детальному поясненні ми розглянемо три основні операції над векторами: додавання, віднімання та множення на скаляр.

Перш ніж занурюватись у деталі векторних операцій, важливо зрозуміти саме поняття вектора. Вектор можна уявити як стрілку, яка має певну довжину та напрямок у просторі. Наприклад, ми можемо розглядати вектор як зміщення об'єкта з однієї точки в іншу або як силу, що діє на об'єкт у певному напрямку. Вектори можуть бути представлені в різних системах координат, таких як декартові, полярні або сферичні, залежно від контексту задачі.

Тепер розглянемо операцію додавання векторів. Додавання векторів є однією з найважливіших операцій у векторній алгебрі та має глибоке геометричне значення. Цей процес ґрунтується на правилі паралелограма, яке дозволяє візуалізувати та зрозуміти, як два вектори поєднуються в один результуючий вектор [12].

Уявімо, що ми маємо два вектори, представлені стрілками на площині або в просторі. Перший крок у додаванні цих векторів – розташувати їх кінець до кінця. Це означає, що початок другого вектора збігається з кінцем першого вектора. Таким чином, ми створюємо ламану лінію, що складається з двох відрізків, які відповідають нашим вихідним векторам.

Наступним кроком є побудова паралелограма, використовуючи ці два вектори як сторони. Для цього ми проводимо лінії, паралельні вихідним векторам, через їх кінцеві точки. Перетин цих паралельних ліній утворює четвертий кут паралелограма.

Результуючий вектор, який є сумою двох вихідних векторів, визначається як діагональ цього паралелограма, що починається в точці початку першого вектора та закінчується в протилежному куті паралелограма. Таким чином,

довжина та напрямок результуючого вектора представляють комбіноване зміщення або силу, яка є сумою вихідних векторів.

Цей геометричний підхід забезпечує наочне розуміння того, як два вектори поєднуються для створення нового вектора. Він дозволяє легко візуалізувати та обчислювати результуючий вектор, використовуючи як графічні методи, так і алгебраїчні формули.

Додавання векторів має широке застосування у багатьох галузях, особливо у фізиці та інженерії. Наприклад, у механіці воно використовується для знаходження результуючої сили, що діє на об'єкт, який зазнає впливу декількох сил одночасно. У кінематиці додавання векторів дозволяє визначати результуюче переміщення об'єкта, який рухається під дією декількох швидкостей або прискорень.

Важливо зазначити, що додавання векторів є комутативною операцією, що означає, що порядок доданків не має значення для результату. Тобто,  $a + b = b + a$ . Це властивість додавання векторів значно спрощує обчислення та дозволяє гнучко маніпулювати векторними величинами у різних контекстах.

Віднімання векторів є операцією, яка тісно пов'язана з додаванням векторів і грає важливу роль у багатьох галузях, де використовуються векторні величини. Як ви правильно зазначили, ця операція полягає у додаванні до першого вектора протилежного другому вектору, тобто вектора з тим самим модулем, але протилежним напрямком.

Цю концепцію можна проілюструвати геометрично. Уявімо, що ми маємо два вектори:  $a$  та  $b$ . Щоб обчислити  $a - b$ , ми спочатку знаходимо протилежний вектор до  $b$ , який позначимо як  $-b$ . Цей вектор має ту саму довжину, що й  $b$ , але протилежний напрямок. Тепер, щоб отримати  $a - b$ , ми додаємо вектори  $a$  та  $-b$ , використовуючи правило паралелограма, описане раніше для додавання векторів.

Результуючий вектор  $a - b$  починається в точці початку вектора  $a$  і закінчується в точці, яка є різницею між кінцевою точкою вектора  $a$  та початковою точкою вектора  $b$ . Геометрично це можна уявити як переміщення від початку вектора  $a$  до кінця вектора  $a$ , а потім у протилежному напрямку від вектора  $b$ .

Операція віднімання векторів має багато практичних застосувань. Як ви згадали, її часто використовують для обчислення зміни положення об'єкта між двома моментами часу. Наприклад, якщо ми знаємо вектори, що представляють положення об'єкта в різні моменти часу, ми можемо віднімати їх, щоб визначити переміщення об'єкта за цей період.

Ця операція також широко застосовується у фізиці та інженерії для аналізу сил та прискорень. Коли на об'єкт діють кілька сил, ми можемо знайти результуючу силу, віднімаючи протилежні сили від основної сили, що діє на об'єкт.

Крім того, віднімання векторів відіграє важливу роль у обчисленнях з векторними полями, які використовуються у різних галузях, таких як електромагнетизм, гідродинаміка та теорія поля. Воно дозволяє знаходити різниці між векторними величинами в різних точках поля, що дає змогу аналізувати градієнти та потоки.

Слід зазначити, що на відміну від додавання векторів, віднімання векторів не є комутативною операцією. Тобто,  $a - b$  не дорівнює  $b - a$ . Це пов'язано з тим, що порядок векторів має значення при визначенні протилежного вектора.

Загалом, операція віднімання векторів є потужним інструментом для маніпулювання та аналізу векторних величин. Вона дозволяє знаходити різниці між векторами, що представляють різні фізичні величини або стани системи, і відіграє важливу роль у багатьох наукових та інженерних розрахунках.

Множення вектора на скаляр є однією з основних операцій у векторній алгебрі та має широке застосування в різноманітних галузях. Ця операція

дозволяє змінювати довжину вектора, зберігаючи його напрямок, або змінювати напрямок вектора, залежно від знака скаляра.

Розглянемо детальніше, що відбувається під час множення вектора на додатний скаляр. Нехай у нас є вектор  $v$  та додатне число  $k$ . Коли ми множимо  $v$  на  $k$ , ми отримуємо новий вектор  $kv$ , який має таку саму орієнтацію (напрямок) у просторі, як і вихідний вектор  $v$ , але його довжина збільшується в  $k$  разів. Іншими словами, якщо довжина вектора  $v$  дорівнює  $|v|$ , то довжина результуючого вектора  $kv$  буде  $k|v|$ . Це означає, що якщо  $k > 1$ , довжина вектора збільшується, а якщо  $0 < k < 1$ , довжина вектора зменшується.

Наприклад, якщо ми маємо вектор швидкості об'єкта в певному напрямку та множимо його на 2, це означає, що ми подвоюємо швидкість об'єкта в тому самому напрямку. Або якщо ми маємо вектор сили, що діє на об'єкт, і множимо його на 0,5, це призведе до зменшення величини сили вдвічі, але її напрямок залишиться незмінним [14].

З іншого боку, множення вектора на від'ємний скаляр не лише змінює довжину вектора, але й змінює його напрямок на протилежний. Якщо ми маємо вектор  $v$  і від'ємне число  $k$ , то результуючий вектор  $kv$  матиме таку саму довжину, як  $|k||v|$ , але його напрямок буде протилежним до напрямку вихідного вектора  $v$ .

Операція множення вектора на скаляр має важливі властивості, які роблять її зручною для використання в різноманітних математичних та фізичних контекстах. По-перше, ця операція є лінійною, що означає, що  $k(u + v) = ku + kv$  для будь-яких векторів  $u$  та  $v$  та будь-якого скаляра  $k$ . По-друге, множення скалярів на вектори є асоціативною операцією, тобто  $(kl)v = k(lv)$  для будь-яких скалярів  $k$  та  $l$  та будь-якого вектора  $v$ .

Множення на скаляр має численні застосування в різних галузях. У фізиці воно використовується для масштабування величин, таких як швидкість, прискорення, сила тощо. В інженерії воно застосовується для зміни розмірів або

масштабів конструкцій та деталей. У комп'ютерній графіці та машинному навчанні ця операція використовується для масштабування даних, таких як зображення або вектори ознак.

Загалом, множення вектора на скаляр є потужним інструментом для маніпулювання векторними величинами, дозволяючи змінювати їх розмір та напрямок відповідно до потреб. Разом із додаванням та відніманням векторів, ця операція є невід'ємною частиною векторної алгебри та має широке застосування у багатьох наукових та інженерних дисциплінах.

Ці три операції над векторами є основними інструментами для маніпулювання векторними величинами та мають широке застосування у багатьох галузях. Наприклад, у фізиці вектори використовуються для представлення сил, швидкостей, прискорень та інших величин, що мають напрямок та величину. Операції над векторами допомагають обчислювати результуючі сили, швидкості та прискорення, що діють на об'єкти під впливом різних факторів.

В інженерії вектори використовуються для представлення напрямків, зміщень, деформацій та інших величин, пов'язаних з конструкціями та машинами. Додавання та віднімання векторів допомагає аналізувати взаємодію різних сил та напружень, що діють на конструкції, а множення на скаляр дозволяє масштабувати ці величини відповідно до потреб.

У комп'ютерній графіці та машинному навчанні вектори використовуються для представлення даних, таких як зображення, звуки або числові характеристики. Операції над векторами є ключовими інструментами для обробки та аналізу цих даних. Додавання векторів може використовуватись для об'єднання ознак або зміщення об'єктів на зображенні, а множення на скаляр - для масштабування або нормалізації даних [1].

Крім того, вектори та операції над ними відіграють важливу роль у лінійній алгебрі, диференціальному та інтегральному численні, а також у

багатьох інших розділах математики. Вони є фундаментальними концепціями, які лежать в основі багатьох складних математичних теорій та застосувань.

Загалом, операції над векторами є потужними інструментами, які дозволяють аналізувати, маніпулювати та комбінувати величини, що мають напрямок та величину. Вони є невід'ємною частиною багатьох математичних та наукових дисциплін, забезпечуючи засоби для моделювання та розуміння складних систем і процесів у різноманітних сферах.

### 1.3. Скалярний добуток векторів та його застосування

Скалярний добуток векторів є фундаментальним поняттям векторної алгебри, що має широке застосування у фізиці, механіці, геометрії та інших галузях науки і техніки. Цей математичний інструмент дозволяє кількісно описати взаємодію між векторними величинами та їх проекції.

Розглянемо геометричну інтерпретацію скалярного добутку. За означенням, скалярним добутком двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  називається скалярна величина, яка дорівнює добутку модулів цих векторів, помноженому на косинус кута між ними. Математично це записується як  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ , де  $\alpha$  - кут між векторами. Ця формула має глибокий геометричний зміст, оскільки вона пов'язує довжини векторів та їх взаємну орієнтацію у просторі.

Алгебраїчна інтерпретація скалярного добутку дає нам альтернативний спосіб його обчислення, який особливо корисний, коли вектори задані своїми координатами. У цьому випадку скалярний добуток визначається як сума попарних добутків відповідних координат векторів. Для двовимірного простору формула має вигляд:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y,$$

де  $a_x, a_y$  - координати вектора  $\vec{a}$ ,  $a$   
 $b_x, b_y$  - координати вектора  $\vec{b}$ .

У тривимірному просторі додається ще один член:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Ця алгебраїчна форма скалярного добутку може бути узагальнена на  $n$ -вимірний простір, де скалярний добуток обчислюється як сума  $n$  доданків:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Це узагальнення має важливе значення в теорії лінійних просторів та функціональному аналізі.

Скалярний добуток має ряд важливих властивостей, які роблять його потужним інструментом в математичних обчисленнях та теоретичних дослідженнях. Перша властивість стверджує, що скалярний добуток вектора на самого себе завжди невід'ємний:  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ . Ця властивість має глибокий фізичний зміст, оскільки вона пов'язана з поняттям енергії в багатьох фізичних системах.

Друга властивість уточнює першу: скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли цей вектор є нульовим:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$ . Ця властивість має важливе значення в теорії норм векторних просторів.

Третя властивість пов'язує скалярний добуток вектора на самого себе з його довжиною:  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ . Ця властивість дозволяє обчислювати довжини векторів, використовуючи лише їх координати, що особливо корисно в багатовимірних просторах [8].

Четверта властивість - комутативність скалярного добутку:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ . Ця властивість відрізняє скалярний добуток від векторного добутку, який є антикомутативним.

П'ята властивість пов'язана з ортогональністю векторів: якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то ці вектори ортогональні один одному:  $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ . Ця властивість має фундаментальне значення в геометрії та фізиці, де ортогональність векторів часто пов'язана з незалежністю фізичних величин або процесів.

Шоста та сьома властивості описують лінійність скалярного добутку. Шоста властивість стверджує, що скалярний добуток вектора на скалярний добуток іншого вектора на число дорівнює добутку цього числа на скалярний добуток вихідних векторів:  $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$ . Сьома властивість - це дистрибутивність скалярного добутку відносно додавання векторів:  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

Ці властивості роблять скалярний добуток потужним інструментом в лінійній алгебрі та аналізі. Вони дозволяють виконувати різноманітні перетворення та спрощення виразів, що містять скалярні добутки.

Застосування скалярного добутку в фізиці та механіці надзвичайно широке. Наприклад, у механіці скалярний добуток використовується для обчислення роботи сили при переміщенні тіла. Якщо  $\vec{F}$  - вектор сили, а  $\vec{s}$  - вектор переміщення, то робота  $A$  обчислюється як  $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . Це пов'язано з тим, що тільки складова сили, паралельна переміщенню, виконує роботу.

У теорії електромагнетизму скалярний добуток використовується для обчислення потоку векторного поля через поверхню. Наприклад, потік електричного поля через замкнену поверхню пов'язаний з зарядом, що міститься всередині цієї поверхні (закон Гаусса).

У квантовій механіці скалярний добуток використовується для обчислення середніх значень фізичних величин та ймовірностей різних

квантових станів. Він є ключовим поняттям у формалізмі гільбертових просторів, який лежить в основі квантової теорії.

У теорії сигналів та обробці інформації скалярний добуток використовується для аналізу кореляції між різними сигналами. Це має важливе застосування в таких галузях, як радіолокація, обробка зображень та розпізнавання мови.

У геометрії скалярний добуток дозволяє обчислювати кути між векторами, проєкції одного вектора на інший, відстані між точками у багатовимірному просторі. Ці операції мають широке застосування в комп'ютерній графіці, робототехніці та системах навігації.

У статистиці та аналізі даних скалярний добуток використовується для обчислення коваріації та кореляції між випадковими величинами. Це дозволяє аналізувати взаємозв'язки між різними параметрами в складних системах.

Скалярний добуток також відіграє важливу роль у теорії оптимізації. Наприклад, у методі градієнтного спуску напрямок найшвидшого спуску визначається градієнтом функції, який можна розглядати як результат скалярного добутку оператора на функцію.

У теорії диференціальних рівнянь скалярний добуток використовується для формулювання умов ортогональності функцій, що є ключовим поняттям у методі Фур'є розв'язання крайових задач.

Важливо відзначити, що поняття скалярного добутку може бути узагальнене на більш абстрактні математичні об'єкти, такі як функції в функціональних просторах. Це призводить до поняття скалярного добутку функцій, яке відіграє центральну роль у функціональному аналізі та теорії операторів [9].

Підсумовуючи, можна сказати, що скалярний добуток векторів є фундаментальним поняттям, яке пронизує багато галузей математики, фізики та інженерії. Його геометрична інтерпретація дає інтуїтивне розуміння взаємодії

між векторами, в той час як алгебраїчна форма забезпечує зручний спосіб обчислень. Властивості скалярного добутку роблять його потужним інструментом для аналізу та розв'язання широкого спектру теоретичних та практичних задач. Від класичної механіки до квантової теорії, від обробки сигналів до комп'ютерної графіки - скалярний добуток залишається незамінним математичним інструментом, що допомагає описувати та аналізувати складні явища навколишнього світу.

## РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВЕКТОРНОГО МЕТОДУ В ПЛАНІМЕТРІЇ

### 2.1. Векторний метод розв'язування задач на проекцію вектора

Проекція вектора на вісь та проекція вектора на вектор є важливими концепціями у векторній алгебрі та аналітичній геометрії. Ці поняття дозволяють розкласти вектори на компоненти та аналізувати їх взаємне розташування у просторі (рис. 2.1).

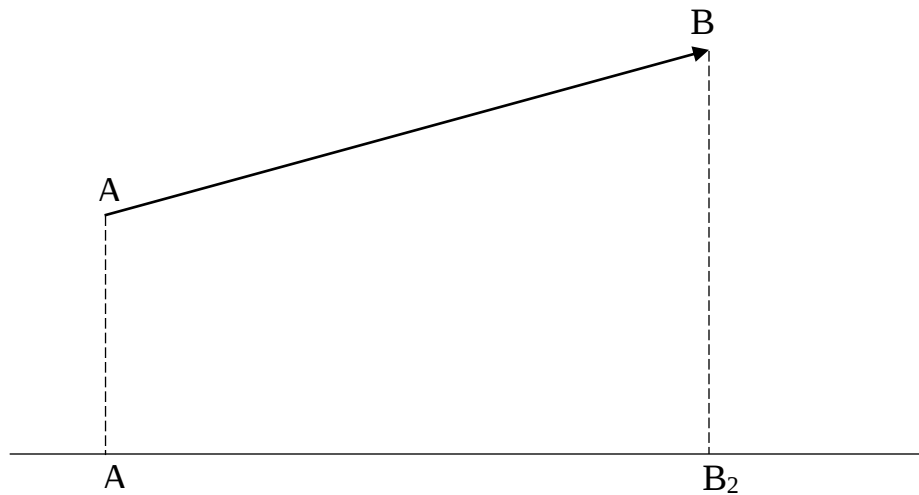


Рис. 2.1. Проекція вектора на вісь

Проекція вектора на вісь визначається як скалярна величина, що дорівнює довжині відрізка на осі, утвореного проекціями початкової та кінцевої точок вектора на цю вісь. Геометрично це можна уявити як «тінь» вектора на осі, якщо світло падає перпендикулярно до осі. Знак проекції залежить від орієнтації вектора відносно осі: проекція додатна, якщо вектор спрямований у той самий бік, що й вісь, і від'ємна в протилежному випадку.

Проекція вектора на інший вектор є узагальненням поняття проекції на вісь. У цьому випадку ми розглядаємо проекцію одного вектора (назвемо його

$\vec{a}$ ) на напрямок, заданий іншим вектором ( $\vec{b}$ ). Результатом такої проекції є скалярна величина, яка показує, наскільки вектор  $\vec{a}$  «витягнутий» у напрямку вектора  $\vec{b}$ .

Для обчислення проекції вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  використовується формула, яка базується на означенні скалярного добутку векторів.

Ця формула виглядає наступним чином:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / |\vec{b}|,$$

де  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  - скалярний добуток векторів,

а  $|\vec{b}|$  - довжина (модуль) вектора  $\vec{b}$ .

Ця формула є потужним інструментом для розв'язання багатьох задач векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Розуміння проекцій векторів має широке практичне застосування в фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці. У фізиці проекції використовуються для аналізу сил та руху тіл у різних напрямках. В інженерії проекції допомагають розраховувати навантаження на конструкції та оптимізувати їх дизайн. У комп'ютерній графіці проекції є основою для створення 3D-зображень на 2D-екранах.

Важливо зазначити, що проекція вектора на вектор може бути як додатною, так і від'ємною, або дорівнювати нулю. Це залежить від взаємного розташування векторів у просторі. Якщо кут між векторами гострий, проекція буде додатною; якщо тупий - від'ємною; якщо прямий - дорівнюватиме нулю.

Розглянемо два приклади розв'язування задач на проекцію вектора, які демонструють застосування цього поняття у двовимірному та тривимірному просторах. Ці приклади ілюструють важливість розуміння концепції проекції вектора та методів її обчислення у векторній алгебрі.

У першому прикладі ми розглянемо задачу знаходження проекції вектора на площині. Нехай дано вектор  $\vec{a} = \{1; 2\}$  і вектор  $\vec{b} = \{3; 4\}$ . Необхідно знайти проекцію вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ . Для розв'язання цієї задачі використаємо формулу проекції вектора:

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / |\vec{b}|,$$

де  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  - скалярний добуток векторів,

а  $|\vec{b}|$  - модуль вектора  $\vec{b}$ .

Почнемо з обчислення скалярного добутку векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$ . Далі знайдемо модуль вектора  $\vec{b}$ :  $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ . Тепер маємо всі необхідні компоненти для обчислення проекції. Підставляємо значення у формулу:  $\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = 11 / 5 = 2.2$ .

Отриманий результат 2.2 означає, що проекція вектора  $\vec{a}$  на напрямок вектора  $\vec{b}$  має довжину 2.2 одиниць. Цей результат можна інтерпретувати геометрично: якщо ми спроектуємо вектор  $\vec{a}$  на пряму, що проходить через вектор  $\vec{b}$ , то отримаємо вектор довжиною 2.2 одиниць, спрямований у тому ж напрямку, що і  $\vec{b}$ .

У другому прикладі розглянемо задачу на знаходження проекції вектора у тривимірному просторі. Нехай дано вектор  $\vec{a} = \{1; 4; 0\}$  і вектор  $\vec{b} = \{4; 2; 4\}$ . Необхідно знайти проекцію вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$ . Для розв'язання цієї задачі використаємо ту ж формулу, що і в попередньому прикладі, але з урахуванням трьох координат векторів.

Спочатку обчислимо скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 4 + 8 + 0 = 12$ . Далі знайдемо модуль вектора  $\vec{b}$ :  $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$ . Тепер маємо всі необхідні компоненти для обчислення проекції. Підставляємо значення у формулу:  $\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = 12 / 6 = 2$ .

Отриманий результат 2 означає, що проекція вектора  $\vec{a}$  на напрямок вектора  $\vec{b}$  у тривимірному просторі має довжину 2 одиниці. Цей результат можна інтерпретувати як довжину «тіні» вектора  $\vec{a}$ , яку він відкидає на пряму, що проходить через вектор  $\vec{b}$ , якщо світло падає перпендикулярно до цієї прямої.

Ці приклади демонструють, як концепція проекції вектора застосовується у різних вимірах простору. Вони підкреслюють важливість розуміння скалярного добутку векторів та обчислення модуля вектора для знаходження проекцій. Такі обчислення мають широке практичне застосування у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці, де часто необхідно аналізувати компоненти векторів у певних напрямках [12].

Проекція вектора є фундаментальним поняттям векторної алгебри та аналітичної геометрії, що відіграє ключову роль у аналізі та маніпуляції векторними величинами. Ця математична концепція дозволяє розкласти вектори на компоненти та вивчати їх взаємне розташування у просторі, що має широке практичне застосування у різних галузях науки та техніки. Особливо важливим є розуміння проекції вектора на вісь та на інший вектор, що реалізується через використання формули, яка базується на скалярному добутку векторів та модулі вектора-напрямку.

Універсальність та потужність цього математичного інструменту проявляється у його застосуванні як у двовимірному, так і у тривимірному просторах, що демонструється на прикладах розв'язання конкретних задач. Ці приклади наочно ілюструють процес обчислення проекцій та їх геометричну інтерпретацію, підкреслюючи важливість розвитку просторового мислення та вміння оперувати векторними величинами.

Значущість концепції проекції вектора виходить далеко за межі чистої математики, знаходячи своє застосування у фізиці для аналізу сил та руху тіл, в інженерії для оптимізації конструкцій та розрахунку навантажень, а також у

комп'ютерній графіці для створення тривимірних зображень на двовимірних екранах. Це підкреслює міждисциплінарний характер даного математичного інструменту та його важливість у сучасному науково-технічному світі.

Таким чином, глибоке розуміння та вміння обчислювати проекції векторів є невід'ємною частиною математичної освіти, що має широке практичне застосування та є ключовим для ефективного розв'язання різноманітних задач у багатьох галузях науки та техніки.

## **2.2. Векторний метод розв'язування задач на ортогональність векторів**

Ортогональність векторів є фундаментальним поняттям у векторній алгебрі та аналітичній геометрії, яке характеризує особливе взаємне розташування векторів у просторі. За означенням, два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  вважаються ортогональними, якщо кут між ними становить точно 90 градусів. Це геометричне визначення має глибоке значення в математиці та фізиці, оскільки ортогональні вектори формують прямий кут і є основою для побудови прямокутних систем координат та ортонормованих базисів (рис. 2.2).

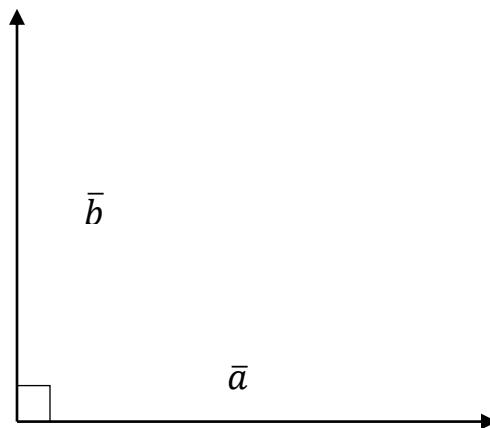


Рис. 2.2. Ортогональність векторів

Умова ортогональності векторів може бути виражена математично через їх скалярний добуток. Скалярний добуток двох векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  визначається як добуток їх довжин на косинус кута між ними. Коли вектори ортогональні, кут між ними становить 90 градусів, а косинус 90 градусів дорівнює нулю. Таким чином, основна умова ортогональності векторів стверджує, що два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є ортогональними тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

У координатному представленні для двох векторів  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  і  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  у тривимірному просторі умова ортогональності може бути записана як  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ . Це рівняння є потужним інструментом для перевірки ортогональності векторів та розв'язання різноманітних геометричних задач.

Концепція ортогональності векторів має широке застосування в різних галузях математики та фізики. В лінійній алгебрі вона використовується для побудови ортогональних базисів та ортогональних матриць. У аналітичній геометрії ортогональність векторів застосовується для опису перпендикулярних прямих та площин. У фізиці ортогональні вектори використовуються для опису незалежних напрямків руху, сил або полів. Крім того, поняття ортогональності є ключовим у теорії функціональних просторів, де воно узагальнюється на нескінченновимірні простори функцій [20].

Розуміння ортогональності векторів та вміння перевіряти умову ортогональності є важливими навичками для розв'язання багатьох практичних задач, включаючи проектування в інженерії, аналіз даних у статистиці та моделювання фізичних процесів. Ця концепція також відіграє ключову роль у розвитку більш складних математичних теорій, таких як ортогональні розклади функцій та спектральна теорія операторів.

Розглянемо три приклади розв'язування задач на ортогональність векторів, які демонструють різні аспекти застосування цього поняття у векторній алгебрі. У першому прикладі ми перевіримо ортогональність двох

заданих векторів на площині. Нехай дано вектори  $\vec{a} = \{1; 2\}$  і  $\vec{b} = \{2; -1\}$ . Для перевірки їх ортогональності використаємо умову, що скалярний добуток ортогональних векторів дорівнює нулю. Обчислимо скалярний добуток:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 2 - 2 = 0$ . Оскільки результат дорівнює нулю, можемо зробити висновок, що вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дійсно ортогональні. Цей результат має геометричну інтерпретацію: вектори утворюють прямий кут у координатній площині.

У другому прикладі розглянемо задачу на перевірку ортогональності векторів у тривимірному просторі. Нехай дано вектори  $\vec{a} = \{2; 3; 1\}$  і  $\vec{b} = \{3; 1; -9\}$ . Для розв'язання цієї задачі також використаємо умову рівності нулю скалярного добутку ортогональних векторів. Обчислимо скалярний добуток:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-9) = 6 + 3 - 9 = 0$ . Отриманий результат дорівнює нулю, що свідчить про ортогональність векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Цей приклад демонструє, що поняття ортогональності зберігається при переході від двовимірного до тривимірного простору, і умова ортогональності залишається незмінною.

Третій приклад ілюструє задачу на знаходження невідомого параметра, при якому вектори стають ортогональними. Розглянемо вектори  $\vec{a} = \{2; 4; 1\}$  і  $\vec{b} = \{n; 1; -8\}$ , де  $n$  - невідомий параметр. Для розв'язання цієї задачі складемо рівняння, використовуючи умову ортогональності векторів:  $2n + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-8) = 0$ . Спростивши це рівняння, отримуємо:  $2n - 4 = 0$ . Розв'язуючи це лінійне рівняння, знаходимо значення параметра  $n = 2$ . Таким чином, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  будуть ортогональними тоді і тільки тоді, коли  $n = 2$ .

Ці приклади демонструють різноманітність задач на ортогональність векторів та методів їх розв'язання. Вони підкреслюють важливість розуміння концепції скалярного добутку та його зв'язку з геометричним поняттям перпендикулярності. Перший приклад показує, як можна легко перевірити ортогональність двох заданих векторів на площині. Другий приклад розширює це поняття на тривимірний простір, демонструючи універсальність умови ортогональності. Третій приклад ілюструє, як поняття ортогональності може

бути використане для знаходження невідомих параметрів у векторних рівняннях, що часто зустрічається в задачах аналітичної геометрії та лінійної алгебри.

Розуміння та вміння розв'язувати такі задачі має важливе значення в багатьох областях математики, фізики та інженерії. Ортогональність векторів використовується при побудові систем координат, у теорії лінійних операторів, при розкладанні векторів на компоненти, а також у багатьох прикладних задачах, пов'язаних з проектуванням та моделюванням фізичних систем.

Отже, векторний метод розв'язування задач на ортогональність векторів базується на фундаментальному понятті взаємного розташування векторів у просторі. Ортогональність визначається як перпендикулярність векторів, що характеризується кутом 90 градусів між ними. Ключовим інструментом для визначення ортогональності є скалярний добуток векторів, який для ортогональних векторів дорівнює нулю. У координатному представленні це виражається рівнянням  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$  для векторів  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  і  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ . Цей метод широко застосовується в лінійній алгебрі, аналітичній геометрії та фізиці для розв'язання різноманітних задач, включаючи побудову ортогональних базисів, аналіз перпендикулярних прямих та площин, а також моделювання фізичних процесів [3].

Важливість розуміння ортогональності векторів підкреслюється її застосуванням у проектуванні, аналізі даних та розвитку складних математичних теорій, таких як ортогональні розклади функцій та спектральна теорія операторів. Практичні приклади демонструють універсальність методу, включаючи перевірку ортогональності заданих векторів та знаходження параметрів для досягнення ортогональності, що підкреслює його значення в математичній освіті та прикладних науках.

### 2.3. Векторний метод розв'язування задач на колінеарність та компланарність векторів

У векторному методі розв'язування задач на колінеарність та компланарність векторів використовуються властивості векторів, їхні операції та співвідношення між ними. Цей метод ґрунтується на визначенні колінеарності та компланарності за допомогою векторних рівнянь та умов.

Колінеарність векторів є фундаментальним поняттям у векторній алгебрі, що характеризує взаємне розташування векторів у просторі. Вектори вважаються колінеарними, якщо вони паралельні одній прямій або лежать на одній прямій. Це означає, що колінеарні вектори мають однаковий напрямок або протилежні напрямки, відрізняючись лише своєю довжиною та, можливо, знаком (рис. 2.1).

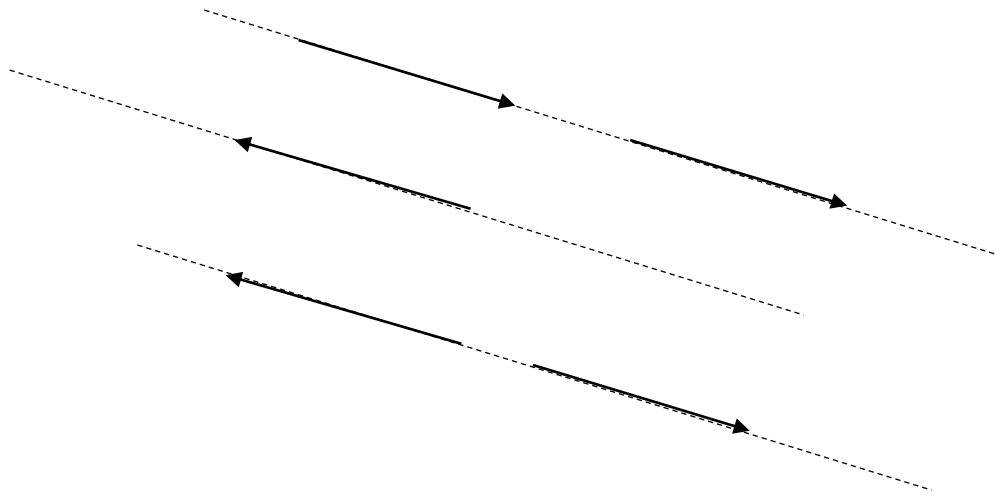


Рис. 2.3. Колінеарність векторів

Існує кілька умов, які дозволяють визначити колінеарність векторів. Перша умова стверджує, що два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є колінеарними, якщо існує таке число  $n$ , що  $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$ . Це означає, що один вектор можна отримати множенням іншого на деяке скалярне число. Це число може бути додатним, від'ємним або

нулем, що відповідає однаково спрямованим векторам, протилежно спрямованим векторам або нульовому вектору відповідно.

Друга умова колінеарності базується на пропорційності координат векторів. Згідно з цією умовою, два вектори колінеарні, якщо відношення їх відповідних координат рівні. Наприклад, для двовимірного випадку вектори  $(x_1, y_1)$  і  $(x_2, y_2)$  колінеарні, якщо  $x_1/x_2 = y_1/y_2$ . Важливо зазначити, що ця умова не може бути застосована, якщо одна з координат вектора дорівнює нулю, оскільки це призведе до ділення на нуль.

Третя умова колінеарності стосується векторного добутку і застосовується лише для тривимірних (просторових) задач. Згідно з цією умовою, два вектори колінеарні, якщо їх векторний добуток дорівнює нуль-вектору. Це пояснюється тим, що векторний добуток двох векторів дає вектор, перпендикулярний до площини, утвореної цими векторами. Якщо вектори колінеарні, така площина не існує, і результатом векторного добутку є нульовий вектор.

Розуміння колінеарності векторів та вміння перевіряти її умови має важливе значення у багатьох областях математики, фізики та інженерії. Воно дозволяє аналізувати напрямки сил, швидкостей та інших векторних величин, спрощувати векторні рівняння та розв'язувати геометричні задачі. Колінеарність також відіграє ключову роль у вивченні лінійної залежності векторів, що є основою для багатьох розділів лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Для ілюстрації розглянемо приклад розв'язування задач на колінеарність векторів [11].

Розглянемо три приклади розв'язування задач на колінеарність векторів, які демонструють різні аспекти цього поняття та методи перевірки умов колінеарності.

У першому прикладі розглянемо задачу на визначення колінеарності векторів на площині. Нехай дано три вектори:  $\vec{a} = \{1; 2\}$ ,  $\vec{b} = \{4; 8\}$  та  $\vec{c} = \{5; 9\}$ .

Необхідно визначити, які з цих векторів колінеарні. Для розв'язання цієї задачі скористаємося другою умовою колінеарності, яка стверджує, що відношення координат колінеарних векторів повинні бути рівними. Для векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  перевіряємо умову:  $1/4 = 2/8 = 1/4$ . Оскільки ця рівність виконується, вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  колінеарні. Для векторів  $\bar{a}$  і  $\bar{c}$  маємо:  $1/5 \neq 2/9$ , отже ці вектори не колінеарні. Аналогічно для  $\bar{b}$  і  $\bar{c}$ :  $4/5 \neq 8/9$ , що також вказує на їх неколінеарність. Таким чином, серед заданих векторів колінеарними є лише  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$ .

У другому прикладі розглянемо задачу на доведення колінеарності векторів, коли один з компонентів дорівнює нулю. Нехай дано вектори  $\bar{a} = \{0; 3\}$  і  $\bar{b} = \{0; 6\}$ . Для розв'язання цієї задачі використаємо першу умову колінеарності, яка передбачає існування такого числа  $n$ , що  $\bar{b} = n \cdot \bar{a}$ . Оскільки перший компонент обох векторів дорівнює нулю, зосередимось на другому компоненті. Знаходимо  $n$  як відношення відповідних компонентів:  $n = 6/3 = 2$ . Перевіряємо, чи справджується рівність  $\bar{b} = n \cdot \bar{a}$ :  $\{0; 6\} = 2 \cdot \{0; 3\} = \{0; 6\}$ . Оскільки ця рівність виконується, вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  дійсно колінеарні.

Третій приклад демонструє задачу на знаходження параметра, при якому вектори стають колінеарними. Розглянемо вектори  $\bar{a} = \{3; 2\}$  і  $\bar{b} = \{9; n\}$ , де  $n$  – невідомий параметр. Для розв'язання цієї задачі застосуємо другу умову колінеарності, згідно з якою відношення відповідних координат повинні бути рівними:  $3/9 = 2/n$ . З цієї пропорції отримуємо рівняння:  $3n = 18$ . Розв'язуючи це рівняння, знаходимо значення параметра  $n = 6$ . Таким чином, вектори  $\bar{a}$  і  $\bar{b}$  будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли  $n = 6$ .

Ці приклади ілюструють різноманітність задач на колінеарність векторів та методів їх розв'язання. Вони демонструють важливість розуміння різних умов колінеарності та вміння їх застосовувати в залежності від конкретної ситуації. Перший приклад показує, як можна порівнювати кілька векторів на предмет їх колінеарності, використовуючи відношення координат. Другий приклад ілюструє метод перевірки колінеарності у випадку, коли один з компонентів

вектора дорівнює нулю, що вимагає застосування іншого підходу. Третій приклад демонструє, як поняття колінеарності може бути використане для знаходження невідомих параметрів у векторних рівняннях. Всі ці задачі підкреслюють важливість колінеарності векторів у векторній алгебрі та її застосуваннях у різних областях математики та фізики.

Компланарність векторів є важливим концептом у векторній алгебрі та аналітичній геометрії. Вектори вважаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині або лежать на одній площині. Це означає, що компланарні вектори можна розташувати так, щоб вони знаходилися в одній площині простору. Важливо зазначити, що будь-які два вектори завжди є компланарними, оскільки через них завжди можна провести площину (рис. 2.3).

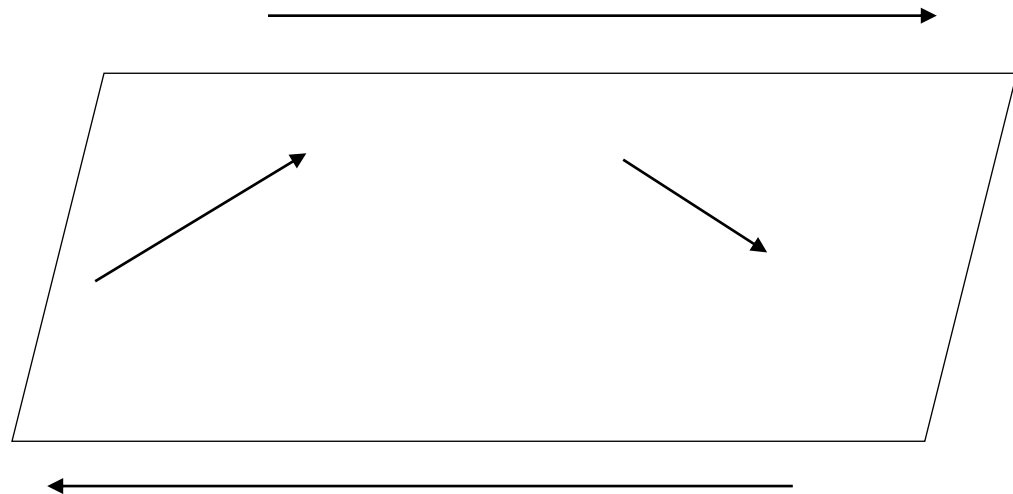


Рис. 2.4. Компланарність векторів

Умови компланарності векторів мають кілька формулювань залежно від кількості розглянутих векторів. Для трьох векторів існує два основних критерії компланарності. Перший критерій стверджує, що три вектори є компланарними, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю. Мішаний добуток векторів  $a$ ,  $b$  і  $c$  позначається як  $(a \times b) \cdot c$  і геометрично інтерпретується як об'єм

паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Якщо цей об'єм дорівнює нулю, то вектори лежать в одній площині.

Другий критерій компланарності для трьох векторів базується на понятті лінійної залежності. Три вектори вважаються компланарними, якщо вони лінійно залежні. Це означає, що один з векторів можна виразити як лінійну комбінацію двох інших. Математично це можна записати у вигляді рівняння  $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ , де  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  - деякі скаляри, не всі з яких дорівнюють нулю одночасно.

Для більшої кількості векторів умова компланарності узагальнюється. Набір з  $n$  векторів вважається компланарним, якщо серед них можна знайти не більше двох лінійно незалежних векторів. Це означає, що всі інші вектори в наборі можна виразити як лінійні комбінації цих двох незалежних векторів.

Перевірка компланарності векторів має важливе значення у багатьох областях математики та фізики. Вона використовується при розв'язанні задач на знаходження об'ємів геометричних фігур, визначення взаємного розташування прямих і площин у просторі, а також у механіці при аналізі сил, що діють на тіло.

Для практичного застосування теорії компланарності векторів часто використовують координатне представлення векторів. У тривимірному просторі вектор можна задати трійкою координат  $(x, y, z)$ . Використовуючи це представлення, можна легко обчислити мішаний добуток векторів за допомогою визначника третього порядку, складеного з координат векторів [7].

Розуміння компланарності векторів та вміння перевіряти її умови є важливим інструментом у розв'язанні різноманітних геометричних та фізичних задач. Воно дозволяє аналізувати взаємне розташування об'єктів у просторі, спрощувати складні векторні вирази та знаходити зв'язки між різними векторними величинами. Ця концепція також відіграє ключову роль у вивченні більш складних тем векторного аналізу та диференціальної геометрії.

Розглянемо задачу на перевірку компланарності трьох векторів у тривимірному просторі. Нехай дано вектори  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$  та  $\vec{c} = \{1; 2; 1\}$ . Необхідно визначити, чи є ці вектори компланарними. Для розв'язання цієї задачі використаємо метод обчислення мішаного добутку векторів, який є ефективним способом перевірки компланарності.

Мішаний добуток трьох векторів  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  позначається як  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  або  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  і обчислюється за допомогою визначника третього порядку, складеного з координат цих векторів. Якщо мішаний добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні.

$$\text{У нашому випадку маємо: } (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Обчислимо цей визначник, використовуючи правило Саррюса або розкладання за першим рядком. Отримуємо:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 6 + 2 - 2 - 3 - 2 = 2$

Оскільки результат обчислення мішаного добутку не дорівнює нулю, ми можемо зробити висновок, що задані вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$  не є компланарними. Цей результат має геометричну інтерпретацію: він означає, що ці три вектори не лежать в одній площині і утворюють трикутну піраміду в просторі.

Важливо зазначити, що метод мішаного добутку є універсальним для перевірки компланарності трьох векторів. Він дозволяє швидко і ефективно визначити взаємне розташування векторів у просторі. Крім того, абсолютне значення мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих трьох векторах, що може бути корисним для розв'язання інших геометричних задач.

У випадку, якщо б мішаний добуток дорівнював нулю, це означало б, що вектори компланарні, тобто їх можна розташувати в одній площині. Така ситуація виникає, коли один з векторів можна представити як лінійну комбінацію двох інших, що є альтернативним критерієм компланарності.

Отже, векторний метод розв'язування задач на колінеарність та компланарність векторів базується на фундаментальних властивостях векторів та їх взаємозв'язках. Колінеарність характеризує паралельність векторів одній прямій, тоді як компланарність описує розташування векторів в одній площині. Для визначення колінеарності використовуються три основні умови: пропорційність векторів, рівність відношень відповідних координат та нульовий векторний добуток. Компланарність векторів встановлюється за допомогою мішаного добутку або через лінійну залежність. Ці методи дозволяють ефективно аналізувати геометричні властивості векторів у просторі. При розв'язуванні задач на колінеарність часто застосовують координатний метод, перевіряючи пропорційність компонентів векторів. Для компланарності ключовим є обчислення мішаного добутку векторів, який повинен дорівнювати нулю для компланарних векторів. Ці підходи мають широке застосування в аналітичній геометрії, механіці та інших галузях, де необхідно аналізувати взаємне розташування векторних величин [9].

## РОЗДІЛ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНИМ МЕТОДОМ

### 3.1. Задачі на знаходження відстаней, довжин відрізків та площ

Знаходження відстаней між точками є фундаментальною операцією в аналітичній геометрії та векторному аналізі. Ця процедура базується на концепції вектора як направленого відрізка, що з'єднує дві точки в просторі. У двовимірному евклідовому просторі відстань між двома точками  $A(x_1, y_1)$  і  $B(x_2, y_2)$  визначається як довжина вектора  $\overline{AB}$ , що обчислюється за формулою  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . Ця формула є прямим наслідком теореми Піфагора, застосованої до прямокутного трикутника, утвореного проекціями вектора на координатні осі.

У тривимірному просторі ця формула природним чином розширюється до  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , де  $z_1$  і  $z_2$  - координати точок по третій осі. Важливо відзначити, що ця формула є окремим випадком більш загального виразу для  $n$ -вимірного евклідового простору, де відстань обчислюється як квадратний корінь з суми квадратів різниць відповідних координат [14].

Векторний підхід до обчислення відстаней має ряд суттєвих переваг. По-перше, він надає уніфікований метод для просторів різної розмірності, що особливо важливо при роботі з багатовимірними даними в статистиці та машинному навчанні. По-друге, векторне представлення дозволяє ефективно працювати з відстанями в складних геометричних конфігураціях, таких як многогранники або криві поверхні.

Особливу роль у знаходженні відстаней відіграє скалярний добуток векторів. Якщо розглядати вектор  $\vec{r} = \overline{AB}$  як різницю координат точок  $B$  і  $A$ , то його довжина може бути виражена через скалярний добуток:  $|\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ . Це представлення є особливо корисним при роботі з ортонормованими базисами та при виконанні лінійних перетворень координат. У контексті аналітичної

геометрії знаходження відстаней часто пов'язане з розв'язанням більш складних задач, таких як визначення відстані від точки до прямої або площини.

У цих випадках векторний метод демонструє свою потужність, дозволяючи звести геометричну проблему до алгебраїчних обчислень. Наприклад, відстань  $d$  від точки  $P(x_0, y_0, z_0)$  до площини  $ax + by + cz + d = 0$  може бути обчислена за формулою  $d = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ , де вектор  $\vec{n} = (a, b, c)$  є нормаллю до площини.

Розглянемо конкретний приклад застосування векторного методу для знаходження відстані. Нехай потрібно знайти відстань від точки  $P(2, 3, 1)$  до площини  $2x - y + 2z - 4 = 0$ .

Розв'язання:

- 1) Спочатку визначимо вектор нормалі до площини:  $\vec{n} = (2, -1, 2)$ .
  - 2) Підставимо координати точки  $P$  у рівняння площини:  $2(2) - 3 + 2(1) - 4 = 4 - 3 + 2 - 4 = -1$
  - 3) Обчислимо модуль вектора нормалі:  $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$
  - 4) Застосуємо формулу для відстані від точки до площини:  $d = |-1| / 3 = 1/3$
- Таким чином, відстань від точки  $P$  до заданої площини становить  $1/3$  одиниці.

Цей приклад демонструє елегантність та ефективність векторного методу при розв'язанні геометричних задач. Замість складних геометричних побудов, ми звели задачу до простих алгебраїчних обчислень.

Важливо відзначити, що концепція відстані у векторному просторі може бути узагальнена на випадок неевклідових метрик. Наприклад, у просторі Мінковського, що використовується в теорії відносності, відстань між подіями визначається з урахуванням часової координати та має інший фізичний зміст.

У комп'ютерній графіці та моделюванні обчислення відстаней є критично важливою операцією. Воно лежить в основі алгоритмів визначення колізій,

рендерингу та оптимізації 3D-моделей. Ефективна реалізація цих обчислень з використанням векторних операцій дозволяє значно підвищити продуктивність графічних систем.

Знаходження відстаней також відіграє ключову роль у багатьох алгоритмах машинного навчання та аналізу даних. Наприклад, алгоритм  $k$ -найближчих сусідів базується на обчисленні відстаней між точками в багатовимірному просторі ознак. У цьому контексті вибір метрики відстані може суттєво вплинути на результати класифікації або кластеризації.

Тож, можна сказати, що знаходження відстаней за допомогою векторів є потужним та універсальним методом, що знаходить застосування в широкому спектрі наукових та прикладних задач. Він не тільки спрощує геометричні обчислення, але й надає глибше розуміння просторових відношень, що робить його незамінним інструментом у сучасній математиці, фізиці та інформатиці.

Знаходження довжини відрізків у геометрії є фундаментальним завданням, яке можна вирішувати різними методами, включаючи векторний метод. Цей метод особливо ефективний у випадках, коли традиційні геометричні підходи можуть бути складними або громіздкими.

При використанні векторного методу для знаходження довжини відрізка ми оперуємо векторами, які представляють ці відрізки. Ключовим аспектом є вибір зручної системи координат або базисних векторів, відносно яких ми можемо виразити досліджуваний вектор [18].

Розглянемо детальніше процес знаходження довжини відрізка векторним методом на прикладі задачі.

На гіпотенузі  $AB$  трикутника  $ABC$  взято точку  $D$ , що задовольняє умову:  $BD:DA = 3:1$ . Виразити довжину відрізка  $CD$  через довжини катетів:  $CB = a$ ,  $CA = b$ .

Для розв'язання цієї задачі ми спочатку обираємо зручну систему координат. У даному випадку логічно вибрати вектори, що відповідають

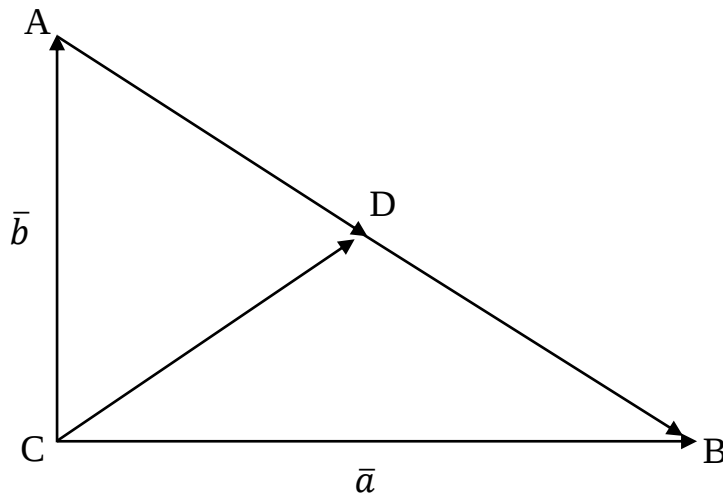
катетам трикутника, як базисні. Тобто, ми приймаємо вектор  $\vec{CB} = \vec{a}$  і вектор  $\vec{CA} = \vec{b}$  за базисні вектори.

Наступним кроком є вираження вектора  $\vec{CD}$  через базисні вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Для цього ми використовуємо інформацію про положення точки  $D$  на гіпотенузі. Оскільки  $BD : DA = 3 : 1$ , ми можемо сказати, що точка  $D$  ділить відрізок  $AB$  у відношенні 3:1. Це означає, що вектор  $\vec{AD}$  можна виразити як  $1/4$  вектора  $\vec{AB}$ .

Вектор  $\vec{AB}$  можна представити як суму векторів:  $\vec{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$ . Отже,  $\vec{AD} = 1/4(-\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{a} + \vec{b})/4$ .

Тепер ми можемо виразити вектор  $\vec{CD}$  як різницю векторів  $\vec{CA}$  і  $\vec{AD}$ :

$$\vec{CD} = \vec{CA} - \vec{AD} = \vec{b} - (-\vec{a} + \vec{b})/4 = \vec{b} + \vec{a}/4 - \vec{b}/4 = (3\vec{b} + \vec{a})/4$$



Маючи вираз для вектора  $\vec{CD}$ , ми можемо обчислити його довжину, використовуючи формулу для модуля вектора:

$$|\vec{CD}| = \sqrt{[(3\vec{b} + \vec{a})/4] \cdot (3\vec{b} + \vec{a})/4}$$

$$\text{Розкриваємо дужки: } |\vec{CD}| = \sqrt{[(9b^2 + 6ab + a^2)/16]}$$

Важливо зазначити, що вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  перпендикулярні, оскільки вони представляють катети прямокутного трикутника. Це означає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Використовуючи це, ми можемо спростити вираз під коренем:

$$|CD| = \sqrt{[(9b^2 + a^2)/16]} = (\sqrt{(9b^2 + a^2)})/4$$

Цей результат і є фінальною відповіддю на поставлене запитання. Ми виразили довжину відрізка CD через довжини катетів a і b.

Векторний метод, як ми бачимо, дозволяє ефективно вирішувати геометричні задачі, зводячи їх до алгебраїчних обчислень. Цей підхід особливо корисний у складних геометричних конфігураціях, де традиційні методи можуть бути менш ефективними.

Важливо зазначити, що успішне застосування векторного методу вимагає глибокого розуміння властивостей векторів, включаючи операції додавання та віднімання векторів, множення вектора на скаляр, а також обчислення модуля вектора. Крім того, знання про скалярний добуток векторів та його властивості є критичним для розв'язання більш складних задач.

У контексті шкільної математики, введення векторного методу розширює математичний інструментарій учнів, дозволяючи їм підходити до геометричних задач з нової перспективи. Це не тільки збагачує їхнє розуміння геометрії, але й готує їх до більш прогресивних математичних концепцій, які вони зустрінуть у вищій математиці.

Застосування векторного методу для знаходження довжин відрізків також демонструє важливість міждисциплінарного підходу в математиці. Воно показує, як алгебраїчні методи можуть бути успішно застосовані до геометричних проблем, підкреслюючи глибокі зв'язки між різними галузями математики.

Отже, векторний метод є потужним інструментом для розв'язання геометричних задач, зокрема для знаходження довжин відрізків. Він дозволяє систематично підходити до складних геометричних конфігурацій, зводячи їх до алгебраїчних обчислень. Володіння цим методом значно розширює математичні можливості учнів та студентів, підготовлюючи їх до більш складних математичних концепцій у майбутньому.

### 3.2. Задачі на колінеарність, компланарність та обрахунок кута між векторами

Розв'язання задач на колінеарність, компланарність та обчислення кутів між векторами вимагає не лише знання теоретичних основ, але й розвинених навичок аналітичного мислення та геометричної інтуїції. Ці задачі сприяють формуванню цілісного розуміння векторного простору та його властивостей, а також розвивають здатність до абстрактного мислення та математичного моделювання реальних фізичних процесів.

Колінеарність векторів є фундаментальним поняттям у векторній алгебрі та аналітичній геометрії, яке характеризує взаємне розташування векторів у просторі. За означенням, вектори називаються колінеарними, якщо вони паралельні одній прямій або лежать на одній прямій. Це визначення має глибокий геометричний зміст, оскільки воно описує ситуацію, коли вектори мають однаковий або протилежний напрямок.

Існують кілька еквівалентних умов колінеарності векторів, які дозволяють визначити це співвідношення аналітично. Перша умова стверджує, що два вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  є колінеарними, якщо існує таке число  $n$ , що  $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$ . Це означає, що один вектор можна отримати з іншого шляхом множення на скаляр. Цей скаляр може бути додатним (вектори співнаправлені) або від'ємним (вектори протилежно направлені) [19].

Друга умова колінеарності базується на порівнянні координат векторів. Згідно з цією умовою, два вектори колінеарні, якщо відношення їх відповідних координат рівні. Математично це можна записати як  $(a_1/b_1) = (a_2/b_2) = (a_3/b_3)$  для тривимірних векторів. Важливо зазначити, що ця умова не може бути застосована, якщо хоча б одна з компонент вектора дорівнює нулю, оскільки ділення на нуль не визначене.

Третя умова колінеарності стосується векторного добутку і застосовується лише для тривимірних (просторових) задач. Вона стверджує, що два вектори колінеарні, якщо їх векторний добуток дорівнює нуль-вектору. Це пов'язано з геометричним змістом векторного добутку: якщо вектори колінеарні, площа паралелограма, побудованого на них, дорівнює нулю.

Розглянемо три приклади розв'язування задач на колінеарність векторів, які демонструють різні аспекти цього важливого поняття векторної алгебри. Ці приклади ілюструють методи перевірки колінеарності векторів у тривимірному просторі та знаходження параметрів, при яких вектори стають колінеарними.

У першому прикладі розглянемо задачу визначення колінеарності серед трьох векторів:  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{4; 8; 12\}$  та  $\vec{c} = \{5; 10; 12\}$ . Для розв'язання використаємо другу умову колінеарності, яка стверджує, що відношення відповідних координат колінеарних векторів повинні бути рівними. Для векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  перевіряємо умову:  $1/4 = 2/8 = 3/12 = 1/4$ . Оскільки ця рівність виконується для всіх трьох пар координат, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні. Для векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{c}$  маємо:  $1/5 = 2/10 \neq 3/12$ , отже ці вектори не колінеарні. Аналогічно для  $\vec{b}$  і  $\vec{c}$ :  $4/5 = 8/10 \neq 12/12$ , що також вказує на їх неколінеарність. Таким чином, серед заданих векторів колінеарними є лише  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  [6].

У другому прикладі доводимо колінеарність векторів  $\vec{a} = \{0; 3; 1\}$  та  $\vec{b} = \{0; 6; 2\}$ . Оскільки вектори мають компоненту, що дорівнює нулю, використовуємо першу умову колінеарності, яка передбачає існування такого числа  $n$ , що  $\vec{b} = n \cdot \vec{a}$ . Знаходимо  $n$ , використовуючи ненульову компоненту:  $n = 6/3 = 2$ . Перевіряємо, чи справджується рівність  $\vec{b} = n \cdot \vec{a}$  для всіх компонент:  $\{0; 6; 2\} = 2 \cdot \{0; 3; 1\} = \{0; 6; 2\}$ . Оскільки ця рівність виконується, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дійсно колінеарні.

Третій приклад ілюструє задачу на знаходження параметрів, при яких вектори стають колінеарними. Розглядаємо вектори  $\vec{a} = \{3; 2; m\}$  і  $\vec{b} = \{9; n; 12\}$ , де  $m$  і  $n$  - невідомі параметри. Застосовуємо другу умову колінеарності:  $3/9 = 2/n$

$= m/12$ . З цієї пропорції отримуємо два рівняння:  $3/9 = 2/n$  та  $3/9 = m/12$ . Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:  $n = 2 \cdot 9/3 = 6$  та  $m = 3 \cdot 12/9 = 4$ . Таким чином, вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  будуть колінеарними тоді і тільки тоді, коли  $n = 6$  і  $m = 4$ .

Ці приклади демонструють різноманітність задач на колінеарність векторів та методів їх розв'язання. Вони підкреслюють важливість розуміння різних умов колінеарності та вміння їх застосовувати в залежності від конкретної ситуації. Перший приклад показує, як можна порівнювати кілька векторів на предмет їх колінеарності, використовуючи відношення координат. Другий приклад ілюструє метод перевірки колінеарності у випадку, коли один з компонентів вектора дорівнює нулю, що вимагає застосування іншого підходу. Третій приклад демонструє, як поняття колінеарності може бути використане для знаходження невідомих параметрів у векторних рівняннях.

Розуміння колінеарності векторів та вміння розв'язувати пов'язані з нею задачі має важливе значення в багатьох областях математики, фізики та інженерії. Колінеарність векторів використовується при аналізі сил у механіці, при вивченні напрямленості електромагнітних полів у фізиці, а також у комп'ютерній графіці для оптимізації рендерингу 3D-об'єктів. Ці задачі демонструють, як абстрактні математичні концепції знаходять своє застосування у практичних галузях науки та техніки.

Компланарність векторів є важливим геометричним поняттям у тривимірному просторі, яке характеризує взаємне розташування векторів відносно площини. За означенням, вектори називаються компланарними, якщо вони паралельні одній площині або лежать на одній площині. Це визначення має глибокий геометричний зміст, оскільки воно описує ситуацію, коли вектори не виходять за межі певної площини в просторі.

Важливо зазначити, що будь-які два вектори завжди є компланарними. Це випливає з того факту, що завжди можливо знайти площину, паралельну двом

довільним векторам. Ця властивість є фундаментальною для розуміння геометрії векторів у тривимірному просторі.

Умови компланарності векторів набувають особливого значення при розгляді трьох і більше векторів. Для трьох векторів існує дві еквівалентні умови компланарності. Перша умова стверджує, що три вектори є компланарними, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю. Мішаний добуток векторів  $a$ ,  $b$  і  $c$ , який позначається як  $(a \times b) \cdot c$ , є скалярною величиною, що геометрично інтерпретується як об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Якщо цей об'єм дорівнює нулю, то вектори лежать в одній площині.

Друга умова компланарності для трьох векторів полягає в їх лінійній залежності. Це означає, що один з векторів можна виразити як лінійну комбінацію двох інших. Математично це записується у вигляді рівняння  $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ , де  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  - деякі скалярні коефіцієнти, не всі з яких дорівнюють нулю одночасно.

Для  $n$  векторів умова компланарності узагальнюється наступним чином: вектори вважаються компланарними, якщо серед них не більше двох лінійно незалежних векторів. Це означає, що всі інші вектори можна виразити як лінійні комбінації цих двох незалежних векторів [7].

Розглянемо приклад розв'язування задачі на компланарність векторів, яка демонструє застосування методу визначення кількості лінійно незалежних векторів. Ця задача є важливою для розуміння геометричних властивостей векторів у тривимірному просторі та їх взаємного розташування.

Нехай дано чотири вектори:  $\vec{a} = \{1; 1; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 2; 0\}$ ,  $\vec{c} = \{0; -1; 1\}$  та  $\vec{d} = \{3; 3; 3\}$ . Необхідно перевірити, чи є ці вектори компланарними. Для розв'язання цієї задачі використаємо метод визначення кількості лінійно незалежних векторів за допомогою елементарних перетворень матриці.

Почнемо з формування матриці, де кожен рядок представляє координати одного з векторів:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

Наша мета - привести цю матрицю до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків. Ці перетворення включають додавання одного рядка до іншого, множення рядка на ненульове число та обмін рядків місцями.

Перше перетворення:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Друге перетворення:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Після цих перетворень ми отримали матрицю, яка має лише два ненульові рядки. Це означає, що серед початкових чотирьох векторів лише два є лінійно незалежними.

Згідно з теорією лінійної алгебри, вектори є компланарними тоді і тільки тоді, коли серед них можна знайти не більше двох лінійно незалежних векторів. У нашому випадку ми маємо саме два лінійно незалежні вектори, що підтверджує компланарність усіх чотирьох заданих векторів.

Геометрично це означає, що всі чотири вектори лежать в одній площині або паралельні одній площині в тривимірному просторі. Це важлива властивість, яка може бути використана в різних галузях, таких як комп'ютерна графіка, де компланарність векторів може бути використана для оптимізації рендерингу 3D-сцен, або в фізиці для аналізу сил, що діють в одній площині.

Цей метод розв'язання задачі на компланарність векторів демонструє потужність лінійної алгебри в геометричному аналізі. Він дозволяє ефективно визначати взаємне розташування векторів у просторі, що має широке практичне застосування в різноманітних галузях науки та техніки.

Означення кута між векторами є фундаментальним поняттям у векторній алгебрі та аналітичній геометрії. Воно визначає міру розбіжності напрямків двох векторів у просторі. Згідно з наданим означенням, кутом між двома векторами, відкладеними від однієї точки, називається найкоротший кут, на який необхідно повернути один з векторів навколо свого початку, щоб досягти положення співнаправленості з іншим вектором.

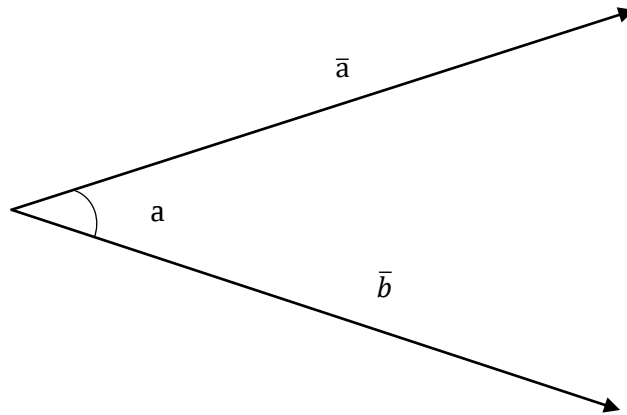


Рис. 2.6. Кут між векторами

Це означення має глибокий геометричний зміст. Воно передбачає, що вектори розглядаються як напрямлені відрізки, які мають спільний початок. Важливо зазначити, що мова йде саме про найкоротший кут повороту, оскільки теоретично можливо здійснити поворот на більший кут, але це не відповідатиме інтуїтивному розумінню кута між векторами.

Концепція кута між векторами тісно пов'язана з поняттям скалярного добутку векторів. Саме цей зв'язок відображено в основному співвідношенні, яке встановлює, що косинус кута між векторами дорівнює скалярному добутку

векторів, поділеному на добуток їхніх модулів. Це співвідношення є надзвичайно важливим, оскільки воно дозволяє обчислювати кут між векторами, знаючи їхні координати.

Математично це співвідношення виражається формулою:  $\cos \alpha = (a \cdot b) / (|a| \cdot |b|)$ , де  $\alpha$  - кут між векторами  $a$  і  $b$ ,  $(a \cdot b)$  позначає їх скалярний добуток, а  $|a|$  і  $|b|$  - модулі (довжини) відповідних векторів. Ця формула є універсальною і застосовується як для двовимірного, так і для тривимірного простору.

Розглянемо два приклади розв'язування задач на обрахунок кута між векторами, які демонструють застосування цієї важливої концепції векторної алгебри у двовимірному та тривимірному просторах. Ці приклади ілюструють методику використання скалярного добутку векторів для визначення кута між ними [13].

У першому прикладі ми розглянемо задачу знаходження кута між векторами на площині. Нехай дано вектори  $\vec{a} = \{3; 4\}$  і  $\vec{b} = \{4; 3\}$ . Для розв'язання цієї задачі використаємо формулу, яка пов'язує скалярний добуток векторів з косинусом кута між ними:  $\cos \alpha = (\vec{a} \cdot \vec{b}) / (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$ , де  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  - скалярний добуток векторів, а  $|\vec{a}|$  і  $|\vec{b}|$  - модулі векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  відповідно.

Почнемо з обчислення скалярного добутку векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 12 + 12 = 24$ . Далі знайдемо модулі векторів:  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$  та  $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ . Тепер маємо всі необхідні компоненти для обчислення косинуса кута. Підставляємо значення у формулу:  $\cos \alpha = 24 / (5 \cdot 5) = 24 / 25 = 0.96$ .

Отриманий результат 0.96 є косинусом кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ . Для знаходження самого кута можна використати арккосинус:  $\alpha = \arccos(0.96) \approx 16.26^\circ$ . Цей результат означає, що вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  утворюють між собою кут приблизно 16.26 градусів.

У другому прикладі розглянемо задачу на знаходження кута між векторами у тривимірному просторі. Нехай дано вектори  $\vec{a} = \{3; 4; 0\}$  і  $\vec{b} = \{4; 4;$

2}. Для розв'язання цієї задачі використаємо ту ж формулу, що і в попередньому прикладі, але з урахуванням трьох координат векторів.

Спочатку обчислимо скалярний добуток векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ :  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 12 + 16 + 0 = 28$ . Далі знайдемо модулі векторів:  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$  та  $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$ . Тепер маємо всі необхідні компоненти для обчислення косинуса кута. Підставляємо значення у формулу:  $\cos \alpha = 28 / (5 \cdot 6) = 28 / 30 = 14/15 \approx 0.9333$ .

Отриманий результат 0.9333 є косинусом кута між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у тривимірному просторі. Для знаходження самого кута знову використаємо арккосинус:  $\alpha = \arccos(0.9333) \approx 21.04^\circ$ . Цей результат означає, що вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  у тривимірному просторі утворюють між собою кут приблизно 21.04 градуси.

Ці приклади демонструють, як концепція кута між векторами застосовується у різних вимірах простору. Вони підкреслюють важливість розуміння скалярного добутку векторів та обчислення модулів векторів для знаходження кутів між ними. Такі обчислення мають широке практичне застосування у фізиці, інженерії та комп'ютерній графіці, де часто необхідно аналізувати взаємне розташування векторів та їх орієнтацію у просторі. Знання кута між векторами дозволяє розв'язувати задачі на визначення напрямку руху, розрахунок сил у механічних системах, оптимізацію розташування об'єктів у просторі та багато інших практичних завдань.

Розглянуті задачі на колінеарність, компланарність векторів та обчислення кутів між ними демонструють багатогранність та глибину векторної алгебри як математичної дисципліни. Вони не лише ілюструють теоретичні концепції, але й розкривають їх практичне значення у розв'язанні конкретних геометричних та фізичних проблем.

Аналіз методів розв'язання цих задач підкреслює важливість системного підходу до вивчення векторної алгебри. Зокрема, вміння застосовувати різні умови колінеарності та компланарності, а також використовувати скалярний

добуток для обчислення кутів між векторами, є ключовими навичками для успішного оперування векторними величинами.

Особливу увагу слід звернути на взаємозв'язок між алгебраїчними методами та геометричною інтерпретацією векторів. Це дозволяє розвивати як аналітичне мислення, так і просторову уяву, що є надзвичайно важливим для подальшого вивчення вищої математики та її застосувань.

Практичне значення розглянутих задач виходить далеко за межі суто математичних дисциплін. Вони знаходять широке застосування у фізиці, інженерії, комп'ютерній графіці та багатьох інших галузях. Зокрема, розуміння колінеарності та компланарності векторів є критичним для аналізу сил у механіці, оптимізації просторових конструкцій в інженерії та моделювання тривимірних об'єктів у комп'ютерній графіці [5].

Таким чином, оволодіння методами розв'язання задач на колінеарність, компланарність та обчислення кутів між векторами не лише збагачує математичний інструментарій студента, але й формує фундамент для подальшого професійного розвитку в різноманітних технічних та наукових галузях. Це підкреслює важливість глибокого та всебічного вивчення векторної алгебри як невід'ємної складової сучасної математичної освіти.

## ВИСНОВКИ

Підсумовуючи результати проведеного дослідження векторного методу розв'язування планіметричних задач, можна зробити ряд важливих висновків, які підкреслюють значущість та ефективність даного підходу в контексті сучасної математичної науки та освіти.

Насамперед, варто відзначити, що векторний метод демонструє високу універсальність та гнучкість при вирішенні широкого спектру геометричних проблем. Дослідження показало, що застосування векторної алгебри дозволяє суттєво спростити процес розв'язання багатьох планіметричних задач, особливо тих, які традиційними методами вимагають складних геометричних побудов або громіздких тригонометричних обчислень. Це підтверджує гіпотезу про те, що векторний метод є потужним інструментом оптимізації та уніфікації підходів до геометричного аналізу.

Важливим результатом дослідження є виявлення специфічних переваг векторного методу у порівнянні з класичними підходами евклідової геометрії. Зокрема, було встановлено, що векторний метод дозволяє більш ефективно оперувати абстрактними геометричними об'єктами, надаючи їм чітку алгебраїчну інтерпретацію. Це не лише спрощує процес розв'язання задач, але й сприяє розвитку абстрактного мислення та формуванню більш глибокого розуміння взаємозв'язків між різними розділами математики.

Аналіз застосування векторного методу до різних типів планіметричних задач дозволив виявити його особливу ефективність при роботі з задачами на доведення геометричних тверджень, знаходження екстремумів геометричних величин та дослідження геометричних місць точок. У цих випадках векторний метод часто надає більш елегантні та прозорі розв'язки, ніж традиційні геометричні підходи. Це підкреслює важливість інтеграції векторного методу в

сучасні навчальні програми з математики для підвищення якості математичної освіти.

Особливу увагу в дослідженні було приділено педагогічним аспектам впровадження векторного методу в навчальний процес. Результати показали, що систематичне використання векторного підходу сприяє розвитку критичного мислення учнів, підвищує їхню здатність до аналізу та синтезу математичної інформації, а також покращує навички математичного моделювання. Це має важливе значення не лише для вивчення математики, але й для формування загальних компетенцій, необхідних у сучасному світі науки та технологій.

Дослідження також виявило певні обмеження та потенційні труднощі у застосуванні векторного методу. Зокрема, було встановлено, що для ефективного використання цього підходу необхідна ґрунтовна підготовка в галузі лінійної алгебри, що може становити певні виклики для учнів середньої школи. Проте, ці труднощі можуть бути подолані шляхом розробки спеціальних методичних підходів та навчальних матеріалів, орієнтованих на поступове формування необхідних компетенцій.

Важливим результатом дослідження є розробка методичних рекомендацій щодо ефективного впровадження векторного методу в навчальний процес. Ці рекомендації включають пропозиції щодо оптимальної послідовності вивчення векторної алгебри та її застосувань у планіметрії, а також систему завдань різного рівня складності для практичного відпрацювання навичок використання векторного методу. Очікується, що реалізація цих рекомендацій сприятиме підвищенню ефективності математичної освіти та розвитку математичного мислення учнів.

Аналіз результатів дослідження також дозволяє зробити висновок про значний потенціал векторного методу в контексті міждисциплінарних досліджень. Зокрема, було виявлено, що векторний підхід створює природний міст між геометрією та фізикою, що відкриває нові можливості для інтеграції

знань з різних наукових дисциплін. Це має особливе значення в контексті сучасних тенденцій до міждисциплінарності в науці та освіті.

Важливо відзначити, що дослідження векторного методу розв'язування планіметричних задач також сприяло поглибленню розуміння історичного розвитку математичної думки. Аналіз еволюції векторного підходу від його зародження до сучасного стану дозволив краще усвідомити логіку розвитку математичних ідей та їх вплив на формування сучасної наукової картини світу.

У контексті сучасних освітніх технологій дослідження виявило значний потенціал векторного методу для розробки комп'ютерних програм та онлайн-ресурсів, спрямованих на візуалізацію та інтерактивне вивчення геометричних закономірностей. Це відкриває нові перспективи для розвитку дистанційної освіти та самостійного навчання математики.

Підсумовуючи, можна стверджувати, що проведене дослідження векторного методу розв'язування планіметричних задач не лише підтвердило його ефективність та актуальність, але й виявило нові аспекти його застосування в сучасній математичній освіті та науці. Результати дослідження створюють підґрунтя для подальшого розвитку методології математичного аналізу та вдосконалення підходів до викладання математики.

Водночас, дослідження окреслило ряд перспективних напрямків для подальших наукових розвідок. Зокрема, актуальними залишаються питання оптимізації методики викладання векторної алгебри в школі, розробки спеціалізованих комп'ютерних програм для підтримки навчального процесу, а також дослідження можливостей застосування векторного методу в інших галузях математики та суміжних наук.

У цілому, проведене дослідження дозволяє зробити висновок про те, що векторний метод розв'язування планіметричних задач є не лише ефективним математичним інструментом, але й важливим елементом сучасної математичної культури.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. «Вектори на площині» навчальний посібник для 9 класу. Освітній проект «На Урок» для вчителів. URL: <https://naurok.com.ua/vektori-na-ploschini-navchalniy-posibnik-dlya-9-klasu-87595.html>.
2. Вектор: означення та основні поняття. Вивчення математики онлайн. URL: <https://ua.onlinemschool.com/math/library/vector/vector-definition/> .
3. Вектори та їх властивості. SlideShare. URL: <https://www.slideshare.net/slideshow/ss-36518308/36518308> .
4. Вектори. Домашня сторінка - Free Tutor. URL: <https://freetutor.com.ua/Math/Vectors> .
5. Вектори. Означення та основні поняття. Математика абітурієнту. URL: <https://mathab.com.ua/geometriya/vektori/vektori-oznachennya-ta-osnovni-ponyattya.html> .
6. Довідник Вектори. Означення. Властивості. Приклади. Освітній проект «На Урок» для вчителів. URL: <https://naurok.com.ua/dovidnik-vektori-oznachennya-vlastivosti-prikladi-116993.html> .
7. Додавання і віднімання векторів. Множення вектора на число – урок. Геометрія, 10 клас. МійКлас. URL: <https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/10-klas/vektori-v-prostori-15495/dodavannia-i-vidnimannia-vektoriv-mnozhenia-vektora-na-chislo-15498/re-28d32a41-7eb5-4b72-a3fa-c829c8f4ffb7>.
8. Євген П. Все, що вам потрібно знати про вектори: від основ до застосувань. Друкарня. URL: [https://drukarnia.com.ua/articles/vse-sho-vam-potribno-znati-pro-vektori-vid-osnov-do-zastosuvan-Shi\\_J](https://drukarnia.com.ua/articles/vse-sho-vam-potribno-znati-pro-vektori-vid-osnov-do-zastosuvan-Shi_J) .
9. Знаходження відстані між двома точками за допомогою векторів. House of Math. URL: <https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/chysla-ta-velychyny/vektory/dvovymirnyy-prostir/znayomstvo-z-vektoramy/znakhodzhennya-vidstani-mizh-dvoma-tochkamy-za-dopomohoyu-vektoriv> .

10. Означення та основні властивості векторів. StudFiles. URL: <https://studfile.net/preview/2303107/page:8/> .
11. Означення, зміст та властивості лінійних операцій над векторами - Bondarenko.dn.ua. ДПА и ЗНО онлайн. URL: <https://bondarenko.dn.ua/vstupni-oznachennya-zmist-ta-vlastivosti-liniynih-operatsij-nad-vektorami/> .
12. Основні властивості векторів. LibreTexts - Ukrayinska. URL: <https://ukrayinska.libretexts.org> .
13. Планіметрія. Геометрія. formula.kr.ua. URL: <https://formula.kr.ua/geometriya/planimetriya/> .
14. Планіметрія. Найпростіші фігури на площині. Підготовка до ЗНО з математики. URL: <https://mathzno.dp.ua/lesson/geometry-1/> .
15. Планіметрія. Частина 7. Координати та вектори на площині. Освітній проект «На Урок» для вчителів. URL: <https://naurok.com.ua/v-planimetriya-chastina-7-koordinati-ta-vektori-na-ploschini-196672.html> .
16. Поняття вектора у просторі – урок. Геометрія, 10 клас. МійКлас. URL: <https://www.miyklas.com.ua/p/geometria/10-klas/vektori-v-prostori-15495/poniattia-vektora-u-prostori-15496/re-1863421f-8ba7-41bd-957b-2bd7fefa9201> .
17. Презентація "Початкові відомості про вектор". Освітній проект «На Урок» для вчителів. URL: <https://naurok.com.ua/prezentaciya-pochatkovi-vidomosti-pro-vektor-395118.html> .
18. Семен Б. Вектори та дії над ними, 2020. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=0SnRgBF83ZE> .
19. Фізмат онлайн. Все про вектори, 2023. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=8czV5MLofMQ> .
20. Як обчислити площу трикутника з векторами. House of Math. URL: <https://www.houseofmath.com/uk/encyclopedia/chysla-ta-velychyny/vektory/tryvymirnyy-prostir/rozrakhunky-z-vektoramy/yak-obchyslyty-ploshchu-trykutnyka-z-vektoramy> .

## ДОДАТКИ

### Додаток А

#### Приклади задач на проекцію вектора

**Приклад 1.** Знайти проекцію вектора  $\vec{a} = \{1; 2\}$  на вектор  $\vec{b} = \{3; 4\}$ .

Розв'язок: Знайдемо скалярний добуток цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

Знайдемо модуль вектора

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Знайдемо проекцію вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{5} = 2.2$$

Відповідь:  $\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = 2.2$ .

**Приклад 2.** Знайти проекцію вектора  $\vec{a} = \{1; 4; 0\}$  на вектор  $\vec{b} = \{4; 2; 4\}$ .

Розв'язок: Знайдемо скалярний добуток цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 4 = 4 + 8 + 0 = 12.$$

Знайдемо модуль вектора

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 16 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Знайдемо проекцію вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{12}{6} = 2$$

Відповідь:  $\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = 2$ .

## Додаток Б

## Приклади задач на компланарність векторів

**Приклад 1.** Перевірити чи(довести що) компланарні три вектора  $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{1; 2; 1\}$ .

Розв'язок: Знайдемо мішаний добуток цих векторів

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \cdot \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

Відповідь: вектори не компланарні так, як їх мішаний добуток не дорівнює нулю.

**Приклад 2.** Перевірити чи компланарні вектори  $\vec{a} = \{1; 1; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 2; 0\}$ ,  $\vec{c} = \{0; -1; 1\}$ ,  $\vec{d} = \{3; 3; 3\}$ .

Розв'язок: Знайдемо кількість лінійно незалежних векторів, для цього запишемо значення векторів в матрицю, і виконаємо над нею елементарні перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

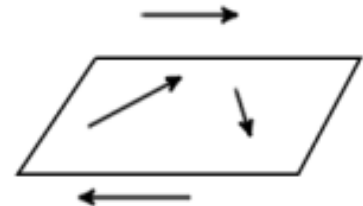


Рис. 13

Так як залишилось лише дві ненульові стрічки, то серед приведених векторів лише два лінійно незалежних вектора.

Відповідь: вектори компланарні так, як серед приведених векторів лише два лінійно незалежних вектора.

### Приклади задач на колінеарність векторів

**Приклад 1.** Які з векторів  $\vec{a} = \{1; 2\}$ ,  $\vec{b} = \{4; 8\}$ ,  $\vec{c} = \{5; 9\}$  колінеарні?

Розв'язок: Так як вектори не містять компоненти що дорівнюють нулю, то скористаємось другою умовою колінеарності, яка у випадку плоскої задачі для векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  буде мати наступний вигляд:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

Тобто:

$$\text{Вектора } \vec{a} \text{ і } \vec{b} \text{ колінеарні т. я. } \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

$$\text{Вектора } \vec{a} \text{ і } \vec{c} \text{ не колінеарні т. я. } \frac{1}{5} \neq \frac{2}{9}$$

$$\text{Вектора } \vec{c} \text{ і } \vec{b} \text{ не колінеарні т. я. } \frac{5}{4} \neq \frac{9}{8}$$

**Приклад 2.** Довести що вектори  $\vec{a} = \{0; 3\}$  і  $\vec{b} = \{0; 6\}$  колінеарні.

Розв'язок: Так як вектори мають компоненти що дорівнюють нулю, то скористаємось першою умовою колінеарності, знайдемо чи існує таке число  $n$  для якого:  $\vec{b} = n\vec{a}$

Для цього знайдемо ненульовий компонент вектора  $\vec{b}$  в даному випадку це  $a_y$ .

$$\text{Якщо вектори колінеарні тоді } n = \frac{b_y}{a_y} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{Знайдемо значення } n\vec{a}: n\vec{a} = \{2 \cdot 0; 2 \cdot 3\} = \{0; 6\}$$

Так як  $\vec{b} = n\vec{a}$ , то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні.

**Приклад 3.** Знайти значення параметра  $n$  при якому вектори  $\vec{a} = \{3; 2\}$  і  $\vec{b} = \{9; n\}$  колінеарні.

Розв'язок: Так як вектори не містять компонентів рівних нулю, то скористаємось другою умовою колінеарності  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$ . Тобто:  $\frac{3}{9} = \frac{2}{n}$ . Розв'яжемо це рівняння:  $n =$

$$\frac{2 \cdot 9}{3} = 6$$

Відповідь: вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні коли  $n = 6$ .

**Приклад 5.** Довести що вектори  $\vec{a} = \{0; 3; 1\}$  і  $\vec{b} = \{0; 6; 2\}$  колінеарні.

Розв'язок: Так як вектори мають компоненти що дорівнюють нулю, то скористаємось першою умовою колінеарності, знайдемо чи існує таке число  $n$  для якого:  $\vec{b} = n\vec{a}$ . Для цього знайдемо ненульовий компонент вектора  $\vec{a}$  в даному випадку це  $a_y$ . Якщо вектори колінеарні тоді  $n = \frac{b_y}{a_y} = \frac{6}{3} = 2$ . Знайдемо значення  $n\vec{a}$ :  $n\vec{a} = \{2 \cdot 0; 2 \cdot 3; 2 \cdot 1\} = \{0; 6; 2\}$

Так як  $\vec{b} = n\vec{a}$ , то вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні.

**Приклад 6.** Знайти значення параметрів  $n$  і  $m$  за яких вектори  $\vec{a} = \{3; 2; m\}$  і  $\vec{b} = \{9; n; 12\}$  колінеарні.

Розв'язок: Так як вектори не містять компонентів рівних нулю, то скористаємось другою умовою колінеарності  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$  тобто:  $\frac{3}{9} = \frac{2}{n} = \frac{m}{12}$ .

З цього співвідношення отримаємо два рівняння:  $\frac{3}{9} = \frac{2}{n}$  та  $\frac{3}{9} = \frac{m}{12}$

Розв'яжемо ці рівняння:  $n = \frac{2 \cdot 9}{3} = 6$  та  $m = \frac{3 \cdot 12}{9} = 4$

Відповідь: вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  колінеарні коли  $n = 6$  і  $m = 4$ .