

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему “Прикладна спрямованість навчання теми: Інтеграл та його
застосування”

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)-з-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Ковальчук Н.Б.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Кульчицька Н.В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ».....	7
1.1 Становлення і розвиток інтегрального числення в математиці	7
1.2 Аналіз програм шкільного курсу математики при вивченні теми «Інтеграл»	10
1.3 Поняття інтегралу.....	14
1.4 Аналіз підручників з теми дослідження	19
Висновки до розділу 1	30
РОЗДІЛ 2 ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	31
2.1 Компетентнісний підхід у навчанні математики старшої школи	31
2.2 Міжпредметні зв'язки на уроках математики	39
Висновки до розділу 2	47
РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ».....	48
3.1 STEM-освіта.....	48
3.2 Проєкт «Інтеграл та його застосування» як засіб реалізації STEM-освіти... 50	50
3.3 Проєкт "Математичне моделювання фізичних процесів"	54
3.4 Проєкт "Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики"	65
Висновки до розділу 3.	71
ВИСНОВКИ.....	72
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	76
ДОДАТКИ.....	84

ВСТУП

Тема інтегралів і їх застосування займає центральне місце у вищій математиці і має велике значення для розуміння багатьох природничих і технічних процесів. Інтеграли є одним з основних інструментів математичного аналізу, який знаходить широке застосування в фізиці, економіці, інженерії, статистиці та інших науках. Знання та вміння застосовувати інтеграли необхідні для вирішення складних завдань, пов'язаних з розрахунками площ, об'ємів, моментів інерції, визначенням роботи сил, економічних показників і багатьох інших.

Актуальність навчання теми інтегралів з прикладною спрямованістю обумовлена декількома факторами:

1. Широке застосування інтегралів у різних галузях науки і техніки. Інтеграли використовуються для моделювання і аналізу фізичних процесів, зокрема в механіці, електродинаміці, термодинаміці. В економіці інтеграли допомагають визначати економічні показники, такі як прибуток, витрати та інше. В інженерії інтеграли застосовуються при розрахунку конструкцій, аналізі навантажень і деформацій.

2. Розвиток інформаційних технологій і зростання вимог до математичної підготовки фахівців. Сучасні технології вимагають від фахівців не лише теоретичних знань, але й практичних навичок у використанні математичних методів і алгоритмів для вирішення реальних завдань. Інтеграли є одним з ключових математичних інструментів, що дозволяють моделювати складні системи і процеси.

3. Необхідність інтеграції математичної освіти з іншими предметами. Викладання інтегралів з прикладною спрямованістю сприяє кращому розумінню учнями взаємозв'язків між математикою і іншими науками. Це підвищує мотивацію до вивчення математики, оскільки здобувачі освіти бачать практичне застосування отриманих знань.

4. Інноваційні підходи до навчання. В умовах реформування освіти та впровадження нових технологій навчання важливо розробляти сучасні

методичні матеріали і використовувати інтерактивні методи для ефективного засвоєння теми інтегралів. Це дозволяє зробити навчальний процес більш цікавим і доступним для учнів.

Отже, дослідження прикладної спрямованості навчання теми інтегралів є важливим і актуальним завданням, яке сприятиме підвищенню якості математичної освіти і підготовки кваліфікованих фахівців у різних галузях науки і техніки.

Мета дослідження: розробка методичних рекомендацій та навчальних матеріалів з прикладною спрямованістю для ефективного навчання теми "Інтеграл та його застосування" у старшій школі, що сприятиме покращенню розуміння здобувачами освіти теоретичних аспектів і практичного застосування інтегралів у різних галузях науки і техніки.

Мета дослідження характеризується в таких **завданнях**:

1. Опрацювати наукову та навчальну літературу з проблеми дослідження.
2. Аналіз теоретичних основ теми інтегралів: огляд історичного розвитку теорії інтегралів, визначення основних типів інтегралів та їх властивостей, опис методів обчислення інтегралів.
3. Дослідження прикладних аспектів інтегралів: визначення основних галузей науки і техніки, де інтеграли знаходять застосування, опис конкретних прикладів використання інтегралів у фізиці, економіці, інженерії та інших сферах.
4. Розробка методичних рекомендацій з викладання теми інтегралів: аналіз сучасних підходів до навчання математики з акцентом на інтеграли, розробка навчальних матеріалів, включаючи завдання і приклади з прикладною спрямованістю.
5. Практична реалізація і перевірка розроблених матеріалів: проведення експериментального навчання з використанням розроблених методичних матеріалів, аналіз результатів експериментального навчання, виявлення переваг і недоліків.

6. Формулювання висновків і рекомендацій: підведення підсумків проведеного дослідження, визначення перспектив подальшого дослідження та вдосконалення методики навчання інтегралів.

Ці завдання допоможуть досягти поставленої мети, забезпечивши комплексний підхід до вивчення теми інтегралів з прикладною спрямованістю та сприяючи покращенню якості математичної освіти.

Об'єкт дослідження: процес навчання математичного аналізу, зокрема теми "Інтеграл та його застосування", у старшій школі.

Предмет дослідження: застосування інтегралів при розв'язуванні прикладних задач.

Методи дослідження:

1. Аналіз наукової літератури та джерел: вивчення наукових статей, монографій, підручників і посібників з математичного аналізу, що стосуються теми інтегралів, аналіз методичних рекомендацій та досліджень з викладання інтегралів у навчальних закладах.

2. Розробка та моделювання навчальних ситуацій і завдань з прикладною спрямованістю для вивчення інтегралів.

3. Проведення експериментального навчання в класах з використанням розроблених навчальних матеріалів.

4. Спостереження за процесом навчання в класах або групах, де проводиться експериментальне навчання.

Ці методи дослідження забезпечать комплексний підхід до вивчення процесу навчання теми інтегралів та дозволять розробити ефективні методичні рекомендації для викладання цієї теми з прикладною спрямованістю.

Апробація дослідження:

1. Публікація статті «Прикладна спрямованість навчання теми: Інтеграл та його застосування» в збірнику студентських наукових праць Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника «Єврика – XXV» м. Івано-Франківськ.

2. Акт впровадження (використання) результатів виконаної науково-дослідної роботи в Солотвинському ліцеї під час проходження практики в 11 класі (Додаток А).

Структура даної роботи складається з вступу, 3 розділів, висновків, списку використаної літератури, додатків.

Теоретичне і практичне значення даної роботи полягає у тому, що наведені висновки, основні положення та методичні рекомендації можуть бути корисними для вчителів школи, молодих фахівців. Їх можна застосовувати під час вивчення теми «Інтеграл та його застосування» на уроках, факультативах, під час позакласних заходів чи роботи з обдарованими дітьми. Це сприятиме підвищенню якості знань здобувачів освіти та активізації їх пізнавальної діяльності.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

1.1. Становлення і розвиток інтегрального числення в математиці

При вивченні алгебри та початків аналізу учні знайомляться з елементами математичного аналізу, серед яких інтеграл займає важливе місце. Історія поняття інтегралу простягається від античності до сучасності. Від Архімеда до Лейбніца та Ньютона, розвиток інтегральних методів пройшов довгий шлях.

Ідея інтегрування виникла ще в Давній Греції. Перші спроби знайти площі під кривими здійснювали грецькі математики, такі як Евдокс Кнідський (408–355 рр. до н.е.) та Архімед (287–212 рр. до н.е.). Евдокс Кнідський розробив метод вичерпання, який полягав у наближенні площі криволінійної фігури вписаними та описаними багатокутниками. Цей метод дозволив Евдоксу визначити площу круга та об'єм кулі. Архімед значно розвинув метод вичерпання, застосовуючи його для обчислення площі сегмента параболи, площі поверхні кулі та об'єму параболічного циліндра. Його праці заклали основи для подальшого розвитку інтегрального числення.

Методи Архімеда базувалися на обчисленнях геометричних сум. Наприклад, щоб знайти об'єм тіла обертання, Архімед розбивав його на n шарів рівної товщини, а потім обчислював суми об'ємів циліндрів, описаних навколо кожного з цих шарів, показуючи, що різниця цих сум при збільшенні n стає як завгодно малою. У такий спосіб Архімед розв'язував багато задач.

У середньовічний період математичні дослідження на Заході зазнали певного занепаду, але в цей час з'явилися значні досягнення в арабському світі. Математики, такі як Аль-Хорезмі та Омар Хаям, зробили важливі відкриття у сфері алгебри та геометрії, що підготували ґрунт для подальшого розвитку інтегрального числення.

В епоху Відродження інтерес до античних математичних праць відродився в Європі. У XVI столітті італійські математики, такі як Лука Пачолі та

Джироламо Кардано, почали вивчати методи обчислення площ і об'ємів, розвиваючи ідеї, закладені в античності.

У XVI-XVII століттях розпочалася наукова революція, що сприяла розвитку математичних методів. П'єр Ферма та Блез Паскаль зробили значний внесок у розвиток інтегрального числення. Ферма користувався поняттям «квадратура», під якою розумів площу фігури, обмеженої віссю x , графіком функції $f(x)$ та прямими $x=a$ і $x=b$. Паскаль обчислював інтеграли степеневих функцій, використовуючи інтегральні суми.

Розвиток теорії інтегралів отримав значний імпульс у XVII столітті завдяки працям таких великих вчених, як Ісаак Ньютон (1643–1727) та Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716). Саме вони незалежно один від одного розробили основи диференціального та інтегрального числення.

Ісаак Ньютон у своїх дослідженнях вивів фундаментальні принципи диференціального та інтегрального числення, зокрема, метод флюксій, який дозволяв обчислювати швидкості змінних величин. Він також сформулював основну теорему аналізу, що пов'язує диференціал з інтегралом.

Готфрід Вільгельм Лейбніц розробив власний метод інтегрування, ввівши символіку інтегралів, яка використовується й сьогодні. Лейбніц вперше застосував знак інтегралу $\int$ і позначення диференціалу dx . Його підхід дозволив узагальнити та систематизувати методи інтеграції.

У XVIII столітті теорія інтегралів продовжувала розвиватися завдяки працям таких математиків, як Леонард Ейлер (1707–1783), Жозеф-Луї Лагранж (1736–1813) та П'єр-Симон Лаплас (1749–1827). Вони значно розширили застосування інтегралів у різних галузях науки та техніки.

Леонард Ейлер вніс значний вклад у розвиток теорії диференціальних рівнянь та функцій. Він розробив методи обчислення визначених інтегралів і застосував інтеграли до вирішення задач механіки та фізики.

Жозеф-Луї Лагранж розробив варіаційне числення, яке дозволило знаходити екстремуми функціоналів. Це стало важливим кроком у розвитку

теорії інтегралів, оскільки варіаційне числення тісно пов'язане з інтегральними методами.

У XIX столітті відбувається формалізація теорії інтегралів, зокрема завдяки працям таких математиків, як Карл Фрідріх Гаус (1777–1855), Бернхард Ріман (1826–1866) та Анрі Лебег (1875–1941).

Карл Фрідріх Гаус розробив методи чисельного інтегрування, зокрема методи Гауса для обчислення визначених інтегралів. Його праці заклали основи для подальшого розвитку чисельних методів інтеграції.

Бернхард Ріман запропонував суворе математичне визначення визначеного інтегралу, відоме як інтеграл Рімана. Це визначення дозволило формалізувати поняття площі під кривою та розв'язати ряд важливих математичних задач.

Анрі Лебег розробив теорію вимірювання та інтегрування, яка дозволила узагальнити інтеграл Рімана і обчислювати інтеграли для ширшого класу функцій. Інтеграл Лебега став основою сучасної теорії інтегралів і знайшов широке застосування в аналізі та теорії ймовірностей.

Істотний внесок у розвиток інтегрального обчислення зробив І. Барроу, який встановив зв'язок між обчисленням площ і проведенням дотичних, а також І. Бернуллі, який ввів термін "інтеграл".

У XX столітті теорія інтегралів продовжувала розвиватися, з'являлися нові напрямки та застосування. Значний внесок у розвиток теорії інтегралів зробили такі математики, як Норберт Вінер (1894–1964) та Лоран Шварц (1915–2002).

Норберт Вінер розробив теорію стохастичних процесів та інтеграл Вінера, який застосовується у квантовій механіці та теорії ймовірностей. Його праці заклали основи для розвитку теорії випадкових процесів.

Лоран Шварц розробив теорію узагальнених функцій, яка дозволила значно розширити клас функцій, для яких можна обчислювати інтеграли. Інтеграл Шварца знайшов застосування у багатьох галузях математики та фізики.

На сучасному етапі теорія інтегралів продовжує активно розвиватися. Інтеграли знаходять застосування у різних галузях науки і техніки, таких як математична фізика, фінансова математика, теорія управління та багато інших.

Сучасні дослідження спрямовані на подальше узагальнення та вдосконалення методів інтеграції, розробку нових чисельних методів, а також застосування інтегралів у різних галузях науки та техніки. Інтегральне числення залишається одним із ключових інструментів у сучасній математиці, що дозволяє розв'язувати складні задачі та моделювати реальні процеси.

1.2 Аналіз програм шкільного курсу математики при вивченні теми «Інтеграл»

Згідно з чинними програмами курсу алгебри і початків аналізу, різних рівнів (стандарту, академічному, профільному та поглибленому) [54], у старших класах вводяться основні поняття математичного аналізу такі як границя, похідна, первісна, невизначений та визначений інтеграл.

Останні версії навчальних програм для 10-11 класів були розроблені з урахуванням нових освітніх стандартів, затверджених Міністерством освіти і науки України. Для теми «Інтеграл» програма передбачає:

- Введення інтеграла як оберненого процесу до диференціювання. Тут акцент робиться на ідеї невизначеного інтегралу та правилах інтегрування.
- У розділі «Визначений інтеграл та його властивості» вивчається використання визначеного інтегралу для обчислення площ під кривими та об'єму тіл обертання.
- Практичні застосування. Учням пропонують розв'язувати задачі, які моделюють фізичні або економічні ситуації, що підвищує практичну цінність вивчення інтегралів.

Порівняємо навчальні програми з математики для учнів 11-х класів загальноосвітніх навчальних закладів (таблиці 1.1 - 1.4) для теми «Інтеграл та його застосування» для різних рівнів [54].

Таблиця 1.1

Навчальна програма з математики (рівень стандарту)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (10 годин)	
Учень/учениця: знаходить первісні за допомогою таблиці первісних та їх властивостей; виділяє первісну, що задовольняє задані початкові умови; обчислює інтеграл за допомогою таблиці первісних та їх властивостей; знаходить площі криволінійних трапецій.	Первісна та її властивості. Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Обчислення площ плоских фігур.

Таблиця 1.2

Навчальна програма з математики (академічний рівень)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (20 годин)	
Учень/учениця: формулює означення первісної та її основні властивості; описує поняття визначеного інтеграла; виділяє первісну, що задовольняє задані початкові умови; обчислює інтеграл, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца; знаходить площі криволінійних трапецій; застосовує інтеграл до розв'язування прикладних задач. виділяє первісну, що задовольняє задані початкові умови; обчислює інтеграл за допомогою таблиці первісних та їх властивостей; знаходить площі криволінійних трапецій.	Первісна та її властивості. Таблиця первісних. Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Формула Ньютона — Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур.

Таблиця 1.3

Навчальна програма з математики (профільний рівень)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (30 годин)	
Учень/учениця: формулює означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості; описує поняття визначеного інтеграла; формулює властивості визначеного інтеграла; знаходить первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень; застосовує інтеграл до розв'язування прикладних задач.	Первісна та її властивості. Таблиця первісних. Невизначений інтеграл та його властивості. Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл обертання.

Таблиця 1.4

Навчальна програма з математики (поглиблений рівень)

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (30 годин)	
Учень/учениця: формулює означення первісної і невизначеного інтеграла та їх основні властивості; описує поняття визначеного інтеграла; формулює властивості визначеного інтеграла; знаходить первісні та визначений інтеграл за допомогою правил знаходження первісних та перетворень; застосовує визначений інтеграл до розв'язування геометричних задач.	Первісна та її властивості. Методи знаходження первісних. Невизначений інтеграл та його властивості. Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл, його фізичний та геометричний зміст. Обчислення визначеного інтеграла. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення об'ємів тіл. Використання інтеграла для розв'язування прикладних задач.

Як бачимо з таблиць 1.1 - 1.4, що за профільним та поглибленим рівнем дана тема вивчається 30 годин, за академічним - 20 годин, а за рівнем стандарту - 10 годин. Програми передбачають поступовий перехід від базових понять до їх застосування у складніших задачах, що дозволяє учням побудувати глибше розуміння теми.

Зауважимо, що програми для різних рівнів суттєво відрізняються за глибиною та обсягом матеріалу. На стандартному та академічному рівні математика вивчається на базовому рівні, тому інтеграли вводяться з метою забезпечення загального розуміння цього математичного поняття. Основні характеристики:

- Обмежений обсяг матеріалу. Зазвичай теми інтегралів зосереджені на базових поняттях, таких як:
 - Означення невизначеного та визначеного інтегралу.
 - Інтегрування простих функцій.
 - Обчислення площі фігур за допомогою визначеного інтегралу.
- Менша кількість прикладних задач. Програма передбачає розв'язання лише базових прикладів із застосуванням інтегралів, без занурення у складні застосування в інших науках (фізика, економіка).
- Менший акцент на математичне моделювання. Учні розв'язують задачі на основі формул та правил інтегрування, але не виконують складних моделей реальних процесів.

Профільний та поглиблений рівень розроблений для учнів, які поглиблено вивчають математику і планують пов'язати своє майбутнє з технічними або природничими науками. Основні особливості:

- Розширений обсяг матеріалу. Профільний рівень охоплює всі теми стандартного рівня, але додає більш складні аспекти, такі як:
 - Метод інтегрування частинами та метод підстановки.
 - Інтегрування складніших функцій (тригонометричні, логарифмічні, експоненціальні).

- Обчислення об'ємів тіл обертання за допомогою визначеного інтегралу.
- Збільшена кількість прикладних задач. Учні розв'язують задачі з фізики (обчислення роботи, енергії тощо) та економіки (наприклад, інтеграційне моделювання попиту).
- Використання математичного моделювання. Особлива увага приділяється застосуванню інтегралів у реальних життєвих ситуаціях. Учні розглядають, як інтеграли використовуються для моделювання процесів, що дозволяє глибше зрозуміти їх прикладне значення.

Отже, стандартний та академічний рівні орієнтовані на учнів, які не потребують поглиблених знань математики для майбутньої професії. Основна мета — дати загальне розуміння інтегралів та їх простих застосувань. Профільний та поглиблений рівні призначені для учнів із високим рівнем підготовки та інтересом до технічних і природничих наук. Програма акцентує увагу на більш складних методах інтегрування та їх застосування в реальних задачах. Це дозволяє варіювати обсяг матеріалу та глибину його подання залежно від потреб учнів та їхніх майбутніх планів.

1.3. Поняття інтегралу

Інтеграл є одним із фундаментальних понять у математиці, що відіграє ключову роль у численні нескінченно малих величин, а також у багатьох інших галузях науки і техніки. Інтеграл можна розглядати як узагальнення поняття суми нескінченно малої величини. Найпростіший тип інтегралу — визначений інтеграл. Він дозволяє обчислити площу області, обмеженої графіком функції, віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$.

Нехай $f(x)$ — неперервна функція на відрізьку $[a, b]$. Визначений інтеграл від $f(x)$ на відрізьку $[a, b]$ позначається як $\int_a^b f(x)dx$ і визначається як границя суми:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ — ширина i -го підінтервалу, а x_i^* — деяка точка у цьому підінтервалі.

У шкільній програмі з математики учні знайомляться з двома основними типами інтегралів: невизначений та визначений (табл. 1.5).

Таблиця 1.5

	Тип інтегралу	Позначення	Опис
1	Невизначений інтеграл	$\int f(x) dx = F(x) + C,$ де C — довільна стала	Сукупність всіх первісних функцій $F(x)$. Використовується для знаходження первісних та розв'язання диференціальних рівнянь.
2	Визначений інтеграл	$\int_a^b f(x) dx$	Обчислює площу під кривою функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Має числове значення і використовується для обчислення площ, об'ємів, роботи сили та інших величин.

Основна теорема математичного аналізу пов'язує визначений і невизначений інтеграли. Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, то:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ця теорема дає практичний спосіб обчислення визначеного інтеграла.

Інтеграли мають важливі властивості, які роблять їх потужним інструментом в аналізі, геометрії та інших галузях математики. Ці властивості допомагають спрощувати обчислення і аналізувати поведінку функцій (табл. 1.6).

Таблиця 1.6

Основні властивості інтегралів			
	Властивість	Формула	Опис
1	Лінійність інтегралу	$\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx =$ $= c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$	Інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій, а інтеграл від константи, помноженої на функцію, дорівнює константі, помноженій на інтеграл цієї функції
2	Адитивність за інтервалом інтегрування	Якщо $a < c < b$, то: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$	Інтеграл на інтервалі $[a, b]$ можна розділити на два інтеграли на підінтервалах $[a, c]$ і $[c, b]$.
3	Монотонність інтегралу	Якщо $f(x) \leq g(x)$ на відрізку $[a, b]$, то: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$	Якщо функція $f(x)$ менша або дорівнює функції $g(x)$ на певному інтервалі, то інтеграл $f(x)$ буде меншим або дорівнювати інтегралу $g(x)$.
4	Невід'ємність інтегралу	Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то: $\int_a^b f(x) dx \geq 0$	Якщо функція $f(x)$ невід'ємна на певному інтервалі, то її інтеграл також буде невід'ємним.

Обчислення інтегралів є однією з центральних задач в математичному аналізі. Для цього розроблено кілька методів, які дозволяють знаходити первісні функції та обчислювати значення визначених інтегралів. Далі розглянемо основні методи, які використовуються для обчислення інтегралів.

Метод безпосереднього інтегрування полягає в безпосередньому застосуванні таблиці первісних для стандартних функцій (табл.1.7). Знання таблиць інтегралів дозволяє швидко знаходити первісні для основних функцій.

Таблиця 1.7

Таблиця первісних (невизначених інтегралів) для деяких функцій

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$	Невизначений інтеграл
0	C	$\int 0 dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Метод підстановки (або заміни змінної) використовується для спрощення інтегралів шляхом введення нової змінної. Це дозволяє звести інтеграл до більш простого вигляду.

Формула: $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$, де $u = g(x)$ і $du = g'(x) dx$.

Приклад: $\int 2xe^{x^2} dx$.

Підстановкою $u = x^2$, $du = 2x dx$ отримуємо: $\int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$.

Метод інтегрування частинами базується на диференційному аналозі правила добутку для похідних. Він використовується для інтегралів, де функцію можна розбити на добуток двох функцій, одна з яких легко диференціюється, а інша легко інтегрується.

Формула: $\int u dv = uv - \int v du$.

Приклад: $\int xe^x dx$.

Нехай $u = x$ і $dv = e^x dx$, тоді $du = dx$ і $v = e^x$, маємо:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Метод розкладання на прості дроби використовується для раціональних функцій, тобто відношень поліномів. Основна ідея полягає в розкладанні раціональної функції на суму простих дробів, які легше інтегрувати.

Приклад: $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$.

Розкладемо на прості дроби: $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$.

Знайдемо коефіцієнти A і B : $1 = A(x + 2) + B(x - 1)$.

Підставляючи $x = 1$, отримуємо $A = \frac{1}{3}$. Підставляючи $x = -2$, отримуємо

$B = -\frac{1}{3}$. Тому:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \ln |x + 2| + C.$$

Метод інтегрування тригонометричних функцій передбачає використання тригонометричних підстановок, які дозволяють звести інтеграл до більш простого вигляду.

Приклад: $\int \sin^2 x dx$.

Використовуючи формулу половинного кута, отримуємо: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Тому:

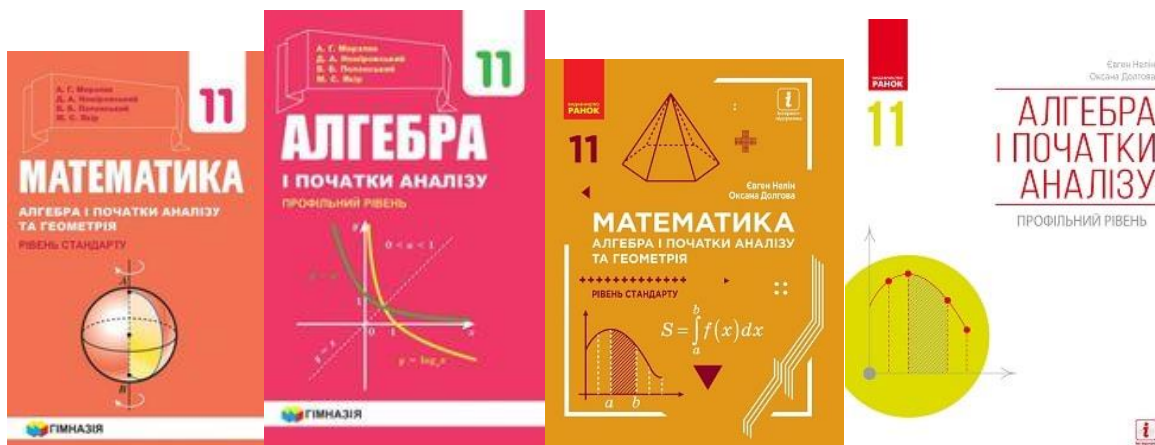
$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Інтеграли є одним з найважливіших інструментів в математиці і мають широке застосування у фізиці, інженерії, економіці та багатьох інших галузях. Розуміння основних властивостей, типів та методів обчислення інтегралів дозволяє ефективно використовувати їх у різних задачах, забезпечуючи точність і зручність обчислень. Інтегральне числення продовжує розвиватися, відкриваючи нові можливості для досліджень та практичних застосувань.

1.4 Аналіз підручників з теми дослідження

Для аналізу були обрані чинні підручники рівнів стандарту і профільного, рекомендовані Міністерством освіти і науки України, таких авторів як А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір [51], [52]; Є. П. Нелін, О. Є. Долгова [56], [57]; О. С. Істер, О. В. Єргіна [33], [34]; Г. П. Бевз, В. Г. Бевз [8].

В темі «інтеграл та його застосування» першим поняттям, з яким знайомляться учні, є первісна. Автори підручників [33], [34] доцільно підводять до даного поняття через аналогію взаємно обернених операцій (дій): додавання – віднімання, множення – ділення, множення одночлена на многочлен – винесення спільного множника за дужки, піднесення до степеня – добування кореня. Операція знаходження первісної (інтегрування) є взаємно оберненою до знаходження похідної функції (операції диференціювання).





Оскільки тему «Похідна та її застосування» за новою навчальною програмою [54] вивчають тепер в 10 класі, то на етапі актуалізації знань на перших уроках теми «Інтеграл та його застосування» необхідно повторити означення похідної та таблицю похідних, щоб потім вміти застосовувати її в оберненій послідовності, розв'язати кілька прикладів на диференціювання функцій.

На етапі мотивації, перед введенням поняття "первісна" та під час закріплення даного поняття розглядається фізична задача, в якій за відомим законом швидкості визначають закон руху. Наприклад, якщо $v(t) = g(t)$, то $s(t) = \frac{gt^2}{2}$ є первісною функції $v(t)$, оскільки $s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g \cdot 2t}{2} = gt = v(t)$.

Знаходження функції $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$ називають інтегруванням.

Під час вивчення правил знаходження первісних автори згаданих підручників розглядають задачі з використанням механічного руху:

Задача 1 [51, с. 55]. Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t) = 3t^2 + 4t$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ м (переміщення вимірюють у метрах, час – у секундах).

Розв'язання. Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty]$. Тоді можна записати: $s(t) = t^3 + 2t^2 + C$, де C – деяке число. Знайдемо число C з умови $s(0) = 3$. Маємо: $t^3 + 2t^2 + C = 3$, звідси $C = 3$.

Отже, шуканий закон руху задається формулою: $s(t) = t^3 + 2t^2 + 3$.

Відповідь: $s(t) = t^3 + 2t^2 + 3$.

Задача 2 [52, с. 94]. Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t) = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ м (переміщення вимірюють у метрах, час – у секундах).

Розв'язання. Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty]$.

Тоді можна записати: $s(t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2t+1} + C$, тобто $s(t) = 3\sqrt{2t+1} + C$,

де C – деяке число. Знайдемо число C з умови $s(0) = 3$.

Маємо: $3\sqrt{2 \cdot 0 + 1} + C = 3$, звідси $C = 0$.

Отже, шуканий закон руху задається формулою: $s(t) = 3\sqrt{2t+1}$.

Відповідь: $s(t) = 3\sqrt{2t+1}$.

Задача 3 [33, с. 94] або [34, с. 152]. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = -2t$ (м/с²). Знайти швидкість точки $v(t)$ як функцію від часу, якщо в момент часу $t = 4$ с швидкість точки була 10 м/с.

Розв'язання. $v(t)$ – первісна для $a(t)$. Маємо: $v(t) = -2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = -t^2 + C$.

Оскільки для $t = 4$ с швидкість точки була 10 м/с, то $10 = -4^2 + C$, отже $C = 26$.

Таким чином, отримали закон швидкості: $v(t) = 26 - t^2$.

Відповідь: $v(t) = 26 - t^2$.

Задача 4 [33, с.94] або [34, с.152]. Швидкість точки, що рухається по прямій, задається рівнянням $v(t) = 1 + \frac{1}{2}t$ (t – у секундах, v – у м/с, s – у метрах).

У момент часу $t = 2$ точка віддалена на $s = 7$ від початку координат. На якій відстані від початку від початку координат буде знаходитися точка в момент часу $t = 10$?

Розв'язання. Оскільки $s(t)$ – первісна для $v(t)$, то

$$s(t) = t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = t + \frac{t^2}{4} + C.$$

За умовою, $s(2) = 7$, тому $7 = 2 + \frac{2^2}{4} + C$, отже, $C = 4$.

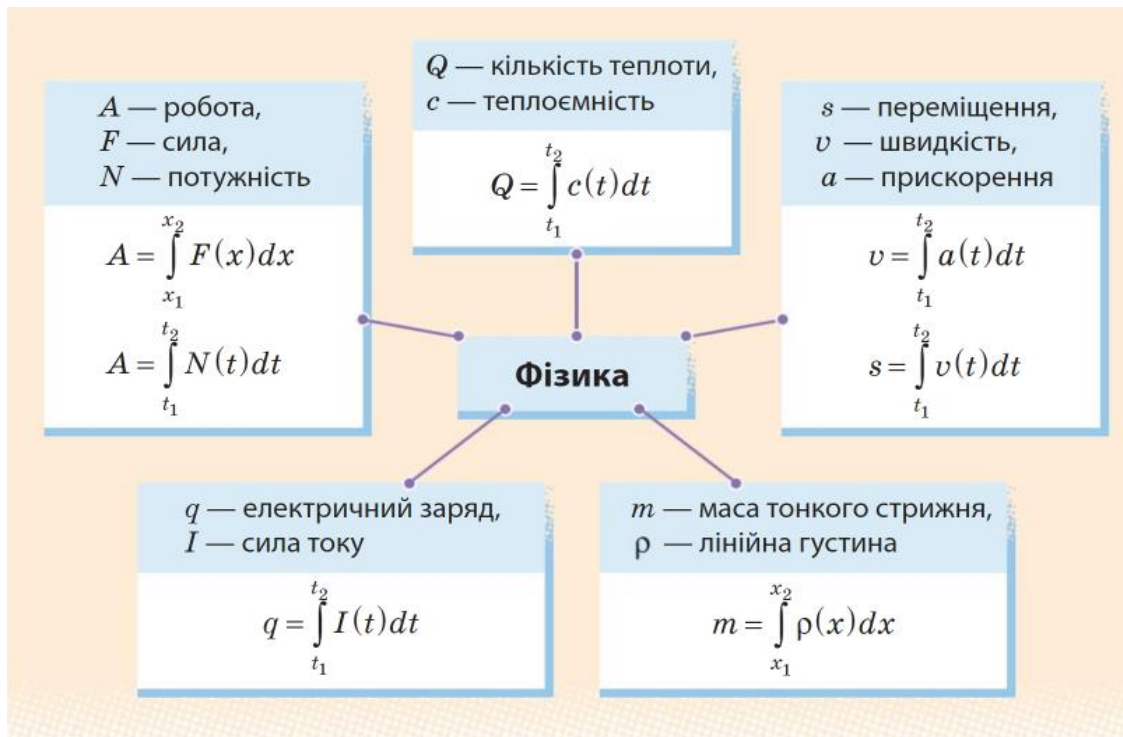
Тоді $s(t) = t + \frac{t^2}{4} + 4$ – закон руху тіла.

Для $t = 10$ маємо: $s(10) = 10 + \frac{10^2}{4} + 4 = 39$ (м).

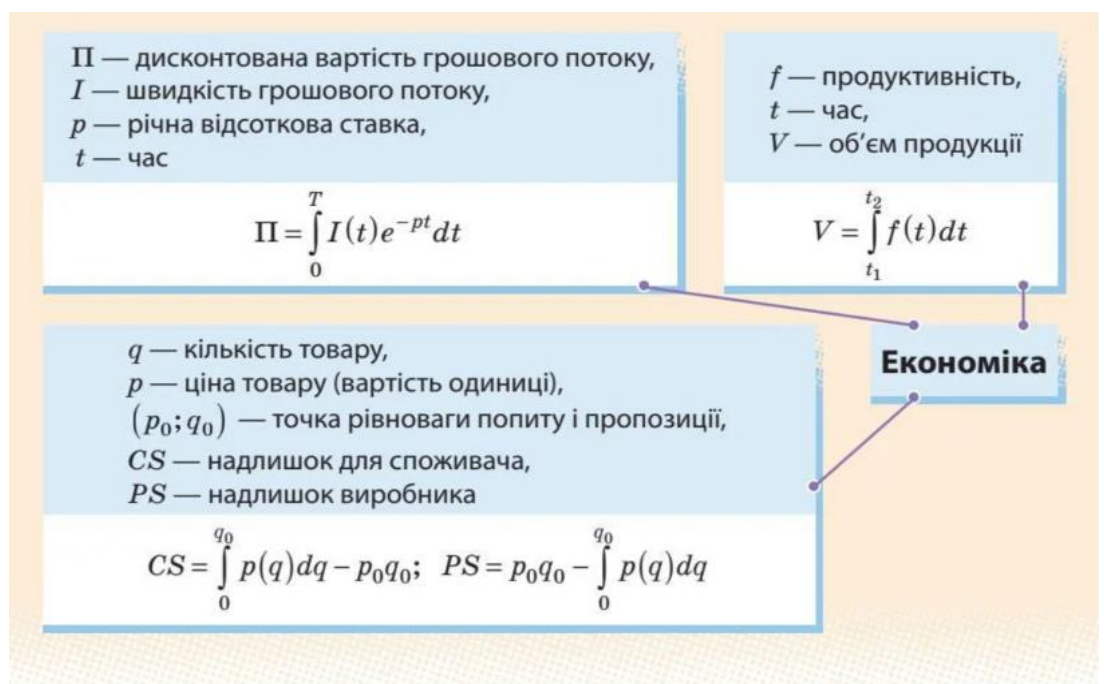
Відповідь: 39 м.

У підручниках [56, с. 95] та [57, с. 115] наведені таблиці формул інтегралів з фізики (табл. 1.8) та економіки (табл. 1.9).

Таблиця 1.8



Таблиця 1.9



На застосування визначеного інтеграла у підручниках [51], [52] є тільки задачі геометричного змісту на знаходження площ криволінійної трапеції, а от для профільних класів розглядається також використання визначеного інтеграла для обчислення об'єму тіл обертання [52].

Крім згаданих задач, автори підручників [8], [33], [34], [56], [57] подають ще задачі прикладного змісту на знаходження шляху, роботи, маси стержня, кількості електрики тощо, що підвищує ефективність навчання та інтерес до математики.

Задача 5 [8, с.69]. Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою: $v(t) = 2(t + 2)^{2,5}$. Який шлях пройде пілот цієї гонки з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху?

Розв'язання. Шлях, пройдений пілотом, можна знайти, проінтегрувавши функцію швидкості $v(t)$ за часом від 2 до 7 секунд:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_2^7 2(t + 2)^{2,5} dt.$$

Зробимо заміну змінних $u = t + 2$, тоді $du = dt$. Межі інтегрування зміняться відповідно:

$$\text{При } t_1 = 2, \quad u_1 = 4,$$

$$\text{При } t_2 = 7, \quad u_2 = 9.$$

Тепер наш інтеграл має вигляд: $s = \int_4^9 2u^{2,5} du$.

Обчислимо цей інтеграл:

$$s = 2 \int_4^9 u^{2,5} du = 2 \left[\frac{u^{3,5}}{3,5} \right]_4^9 = \frac{2}{3,5} [u^{3,5}]_4^9.$$

Підставимо межі інтегрування: $s = \frac{2}{3,5} (9^{3,5} - 4^{3,5})$.

Обчислимо значення: $9^{3,5} = (3^2)^{\frac{7}{2}} = 3^7 = 2187$, $4^{3,5} = (2^2)^{\frac{7}{2}} = 2^7 = 128$,

$$s = \frac{2}{3,5} (2187 - 128) = \frac{2}{3,5} \cdot 2059 = \frac{4118}{3,5} \approx 1176,57 \text{ м.}$$

Таким чином, пілот пройде шлях 1176,57 м метрів з 2-ї до 7-ї секунди від початку руху.

Відповідь: 1176,57 м.

Задача 6 [56,с. 99] або [57, с. 125]. Потрібно пофарбувати з однієї сторони 30 однакових плоских металевих деталей. Ескіз деталі зображено на рисунку 1.1 (верхня межа деталі задається графіком функції $y = 8\sqrt{x}$, а нижня – графіком функції $y = x^2$, одиничний відрізок на ескізі дорівнює 20 см). Скільки банок, що містять по 0,9 кг фарби потрібно придбати, якщо для фарбування 1 м^2 поверхні витрачається 130 г фарби?

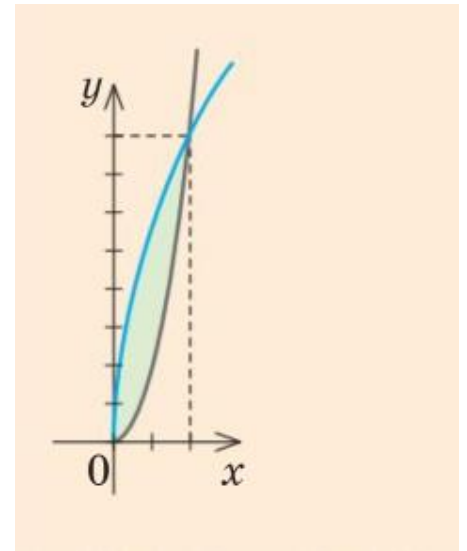


Рис 1.1

Розв'язання. Для того щоб розв'язати задачу через визначений інтеграл, нам потрібно знайти площу між двома кривими. У нас є дві функції: 1) $y = 8\sqrt{x}$ - верхня межа, 2) $y = x^2$ - нижня межа.

Зображення показує, що площа між цими двома кривими обмежена зліва вертикальною лінією $x = 0$, а справа вертикальною лінією $x = 0,2$ (оскільки один відрізок на ескізі дорівнює 20 см, що відповідає 0,2 м). Площа між двома кривими обчислюється за допомогою визначеного інтегралу:

$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, де $f(x) = 8\sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 0,2$.

$$S = \int_0^{0,2} (8\sqrt{x} - x^2)dx.$$

Обчислимо цей інтеграл:

$$\int 8\sqrt{x} \, dx = \int 8x^{\frac{1}{2}} \, dx = 8 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} x^{\frac{3}{2}},$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3.$$

Тепер знайдемо площу: $S = \left[\frac{16}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{0,2}$.

Підставимо межі інтегрування:

$$S = \left(\frac{16}{3} (0,2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (0,2)^3 \right) - \left(\frac{16}{3} (0)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (0)^3 \right).$$

Обчислимо значення:

$$S = \frac{16}{3} \cdot 0,08944 - \frac{1}{3} \cdot 0,008 = 0,4779 - 0,0027 \approx 0,4752 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Знаючи, що площа однієї деталі складає $0,4752 \text{ м}^2$, а фарби на 1 м^2 потрібно 130 г , то на одну деталь потрібно: $0,4752 \cdot 130 \approx 61,78 \text{ (г)}$.

Для 30 деталей: $61,78 \cdot 30 = 1853,4 \text{ (г)}$.

Оскільки кожна банка містить $0,9 \text{ кг}$ (900 г) фарби, потрібно: $\frac{1853,4}{900} \approx 2,06$ банки.

Оскільки ми не можемо купити частину банки, необхідно придбати 3 банки фарби.

Відповідь: 3 банки.

Задача 7 [56, с. 99] або [57, с. 118]. Під дією сили $F = 10 \text{ Н}$ пружина розтягується на 2 см . Яку роботу при цьому виконує сила F , якщо за законом Гука $F = kx$, де x – деформація пружини, k – коефіцієнт.

Розв'язання. Закон Гука стверджує, що сила пружності прямо пропорційна деформації: $F(x) = kx$, де k — коефіцієнт жорсткості пружини, x — деформація пружини. Роботу, що виконується змінною силою $F(x)$, знайдемо через визначений інтеграл: $A = \int_0^x F(x) dx$.

Підставимо вираз для сили: $A = \int_0^{0,02} kx dx$.

Виразимо k : $k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0,02} = 500 \text{ (Н/м)}$.

Тоді підставимо k у вираз для роботи: $A = \int_0^{0,02} 500x dx$.

Обчислимо інтеграл:

$$\begin{aligned} A &= 500 \int_0^{0,02} x dx = 500 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,02} = 500 \cdot \frac{(0,02)^2}{2} = 500 \cdot \frac{0,0004}{2} = \\ &= 500 \cdot 0,0002 = 0,1 \text{ (Дж)} \end{aligned}$$

Таким чином, робота, яку виконує сила F , дорівнює $0,1 \text{ Дж}$.

Відповідь: $0,1 \text{ Дж}$.

Задача 8 [33, с. 113] або [34, с. 194]. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проєкцію якої на цю вісь задано формулою $f(x) = x^2 - 2x$. Знайдіть роботу, яку виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 3 в точку з абсцисою 6.

Розв'язання. Робота, яку виконує змінна сила при переміщенні тіла, визначається за допомогою визначеного інтегралу: $A = \int_a^b f(x) dx$.

У нашому випадку $f(x) = x^2 - 2x$, $a = 3$, $b = 6$.

Обчислимо інтеграл: $A = \int_3^6 (x^2 - 2x) dx$.

Знайдемо первісну для функції $f(x) = x^2 - 2x$: $\int (x^2 - 2x) dx = \frac{x^3}{3} - x^2$.

Підставимо межі інтегрування: $A = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_3^6 = \left(\frac{6^3}{3} - 6^2 \right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 \right)$.

Обчислимо значення:

$$A = \left(\frac{216}{3} - 36 \right) - \left(\frac{27}{3} - 9 \right) = (72 - 36) - (9 - 9) = 36 \text{ (Дж)}.$$

Таким чином, робота, яку виконує сила при переміщенні тіла, дорівнює 36 Дж.

Відповідь: 36 Дж.

Задача 9 [34, с.194]. Дано прямолінійний неоднорідний стержень довжини l . Його густину в точці x можна знайти за формулою $q = q(x)$. Знайдіть масу стержня, якщо $q(x) = 2x + 1$, $l = 3$.

Розв'язання. Маса неоднорідного стержня визначається як інтеграл від густини по довжині стержня: $m = \int_0^l q(x) dx$.

Для $q(x) = 2x + 1$, $l = 3$. Маємо: $m = \int_0^3 (2x + 1) dx$.

Обчислимо інтеграл: $m = [x^2 + x]_0^3 = (9 + 3) - (0 + 0) = 12 \text{ (од. м.)}$.

Відповідь: 12 одиниць маси.

Задача 10 [34, с.196]. Сила у 3 Н розтягує пружину на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю пружину на 5 см?

Розв'язання. Закон Гука стверджує, що сила, необхідна для розтягування пружини, пропорційна її розтягуванню: $F = kx$, де k — коефіцієнт жорсткості

пружины, x — величина розтягування. З умови задачі відомо, що сила 3 Н розтягує пружину на 1 см. Визначимо коефіцієнт жорсткості k :

$$k = \frac{F}{x} = \frac{3}{0,01} = 300 \text{ (Н/м)}.$$

Робота, необхідна для розтягування пружини, визначається як:

$$A = \int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Підставимо значення для $x = 5 \text{ см} = 0.05 \text{ м}$:

$$A = \frac{300 \cdot (0,05)^2}{2} = \frac{300 \cdot 0,0025}{2} = 0,375 \text{ (Дж)}.$$

Таким чином, робота, яку треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, дорівнює 0,375 Дж.

Відповідь: 0,375 Дж.

Задача 11 [34, с.196]. Для того щоб стиснути пружину на 0,03 м, треба виконати роботу в 16 Дж. На яку довжину можна стиснути цю пружину, виконавши роботу у 144 Дж?

Розв'язання. Робота, виконана при стисканні пружини, визначається як:

$A = \int_0^x F(x) dx$, де $F(x) = kx$ — сила, що діє на пружину, k — коефіцієнт жорсткості, x — деформація пружини.

З умови задачі для деформації $x_1 = 0,03 \text{ м}$ виконана робота $A_1 = 16 \text{ Дж}$. Для обчислення k скористаємося формулою для роботи:

$$A_1 = \int_0^{0,03} kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^{0,03} = \frac{k \cdot (0,03)^2}{2} = 16 \text{ (Дж)}.$$

Звідси виразимо k :

$$k = \frac{2 \cdot 16}{(0,03)^2} = \frac{32}{0,0009} = 35555,56 \text{ (Н/м)}.$$

Тепер знайдемо деформацію x_2 , при якій виконується робота $A_2 = 144 \text{ Дж}$:

$$A_2 = \int_0^{x_2} kx dx = \frac{kx^2}{2} \Big|_0^{x_2} = \frac{kx_2^2}{2}.$$

Підставимо значення:

$$144 = \frac{35555,56 \cdot x_2^2}{2},$$

$$x_2^2 = \frac{2 \cdot 144}{35555,56} \approx 0,0081 \text{ м}^2,$$

$$x_2 = \sqrt{0,0081} = 0,09 \text{ м}.$$

Таким чином, для виконання роботи в 144 Дж, пружину треба стиснути на 0,09 м.
Відповідь: 0,09 м.

Задача 12 [8, с. 70]. Сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = 4 + 2t$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди?

Розв'язання. Кількість електрики q , що проходить через поперечний переріз провідника, визначається як інтеграл від сили струму $I(t)$ за часом:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Підставимо функцію $I(t) = 4 + 2t$ у цей інтеграл: $q = \int_2^6 (4 + 2t) dt$.

Знайдемо первісну для функції $(4 + 2t)$: $q = [4t + t^2]_2^6$.

Підставимо межі інтегрування: $q = (4 \cdot 6 + 6^2) - (4 \cdot 2 + 2^2)$.

Обчислимо значення: $q = (24 + 36) - (8 + 4) = 60 - 12 = 48 \text{ (Кл)}$.

Таким чином, через поперечний переріз провідника за час від 2-ї до 6-ї секунди пройде 48 Кл електрики.

Відповідь: 48 Кл.

Задача 13 [34, с.198]. Офіс обладнано приладами освітлення, які споживають 900 Вт щогодини. Щодоби прилади працюють по 10 годин. Якщо замінити їх на енергозберігаючі прилади, то витрати скоротяться на 80%. Скільки Вт протягом тижня (5 робочих днів) можна заощадити, використовуючи енергозберігаючі прилади?

Розв'язання. Споживана потужність дорівнює $P = 900 \text{ Вт}$. Прилади працюють по 10 годин на день. За тиждень (5 робочих днів) споживана енергія (у ват·годинах) дорівнює: $E_{\text{без економії}} = \int_0^5 P \cdot t dt$.

Оскільки P не змінюється, це спрощується до:

$$E_{\text{без економії}} = P \cdot \int_0^5 10 \, dt = P \cdot (10 \cdot 5) = 900 \cdot 50 = 45000 \text{ (Вт}\cdot\text{год)}.$$

Якщо прилади зменшують споживання на 80%, то потужність P' дорівнює $0,2P$.

Тоді енергія спожита за 5 днів: $E_{\text{з економією}} = \int_0^5 0,2P \cdot t \, dt$,

$$E_{\text{з економією}} = 0,2P \cdot \int_0^5 10 \, dt = 0,2 \cdot 45000 = 9000 \text{ (Вт}\cdot\text{год)}.$$

Заощаджена енергія:

$$\Delta E = E_{\text{без економії}} - E_{\text{з економією}} = 45000 - 9000 = 36000 \text{ (Вт}\cdot\text{год)}.$$

Відповідь: 36000 Вт·год.

У підручнику [8, с. 67], крім фізичних задач, представлено окремі типи застосування визначеного інтеграла в задачах економічного змісту, а також подається детальне пояснення та виведення формули для обсягу виробленої продукції через інтеграл:

Якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t , то обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$ можна обчислити за формулою

$$U = \int_0^T f(t) \, dt.$$

Задача 14 [8, с. 67]. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2,53t^2 + 24,75t + 111,1$, де t — робочий час у годинах. Визначте обсяг продукції, виготовленої за 5 робочих годин.

Розв'язання. Обсяг випуску продукції протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці. Тому

$$\begin{aligned} U &= \int_0^5 f(t) \, dt = \int_0^5 (-2,53t^2 + 24,75t + 111,1) dt = \\ &= \left(\frac{-2,53t^3}{3} + \frac{24,75t^2}{2} + 111,1t \right) \Big|_0^5 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-2,53 \cdot 125}{3} + \frac{24,75 \cdot 25}{2} + 111,1 \cdot 5 \right) = \\
&= \frac{-316,25}{3} + \frac{618,75}{2} + 555,5 \approx 759 \text{ (од.)}.
\end{aligned}$$

Відповідь: 759 од.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дипломної роботи було проаналізовано основні аспекти розвитку інтегрального числення, його зміст та значення в сучасній математиці. Проведений огляд програм шкільного курсу математики показав, що тема «Інтеграл та його застосування» займає важливе місце у навчальному процесі, сприяючи розвитку логічного мислення та практичних навичок учнів. Було досліджено поняття інтегралу, його основні властивості та принципи застосування в математичному аналізі. Окрему увагу приділено аналізу підручників, які використовуються для вивчення цієї теми, що дозволило оцінити якість наявних навчальних матеріалів.

Отже, аналізуючи сучасні шкільні підручники з алгебри та початків аналізу для старшої школи, можна зробити висновок, що основна увага приділяється фізичним задачам, зокрема тим, де за відомою швидкістю визначається закон руху. Ця задача часто використовується як мотиваційний приклад перед введенням поняття "первісна" і під час закріплення матеріалу. У підручниках [8], [33], [34], [56], [57] також наведені фізичні задачі, які демонструють застосування визначеного інтеграла. У підручнику [8] подано приклади використання визначеного інтеграла також для розв'язання деяких економічних задач.

Отримані результати закладають основу для подальшого дослідження інтегралу як одного з ключових математичних інструментів у другому розділі роботи, де буде розглянуто прикладні аспекти його використання в різних галузях.

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Компетентнісний підхід у навчанні математики старшої школи

Компетентнісний підхід у навчанні математики старшої школи – це сучасна освітня стратегія, яка спрямована на розвиток не лише знань і навичок учнів, але й на формування ключових компетентностей, які допомагають учням успішно застосовувати знання в реальних життєвих ситуаціях. Він полягає в переході від традиційної моделі, де основна увага приділяється запам'ятовуванню та відтворенню матеріалу, до моделі, яка сприяє розвитку вміння застосовувати знання на практиці та вирішувати проблеми.

Основні елементи компетентнісного підходу:

- Зміщення акценту з накопичення знань на розвиток компетенцій: Учням надаються можливості для формування умінь застосовувати математичні знання в реальному житті, розв'язувати задачі, моделювати ситуації, та аналізувати різноманітні проблеми. Наприклад, це може бути інтеграція математичних знань із іншими дисциплінами, такими як фізика чи економіка.
- Активне навчання: Учні беруть участь у різноманітних формах діяльності, зокрема проєктній роботі, вирішенні задач з реального життя, групових дискусіях, що розвиває їх самостійність і навички роботи в команді.
- Формування критичного мислення: Компетентнісний підхід стимулює учнів не лише механічно вирішувати математичні задачі, але й критично аналізувати умови задач, шукати альтернативні шляхи розв'язання, робити висновки на основі обчислень.

У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [28] (затвердженому постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392) надається тлумачення понять:

компетентність – набута у процесі навчання інтегрована здатність учня, що складається із знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці;

ключова компетентність — спеціально структурований комплекс характеристик (якостей) особистості, що дає можливість їй ефективно діяти у різних сферах життєдіяльності і належить до загальногалузевого змісту освітніх стандартів.

У контексті старшої школи компетентнісний підхід означає, що учням потрібно не лише засвоїти теорію, але й навчитися вирішувати комплексні завдання, що потребують міждисциплінарних знань. Це може бути завдання на моделювання фізичних процесів за допомогою інтегралів або оптимізаційні задачі, які допомагають учням застосовувати математику для аналізу економічних даних.

Наприклад, під час вивчення теми "Інтеграли та їх застосування", учням можуть бути запропоновані задачі на обчислення площ або об'ємів у фізиці, або ж задачі на обчислення прибутку чи витрат у контексті економіки. Це дозволяє формувати у них здатність застосовувати математичні методи для вирішення реальних проблем.

У компетентнісному підході вчитель виступає не лише джерелом знань, але й фасилітатором навчального процесу, що допомагає учням знаходити оптимальні шляхи вирішення проблем, ставити перед собою цілі і працювати над досягненням результатів. Важливою є здатність вчителя створювати середовище, де учні можуть розвивати свої здібності через активне навчання.

У рамках компетентнісного підходу в навчанні математики формуються кілька ключових компетентностей:

- Математична компетентність: здатність застосовувати математичні знання для вирішення задач.
- Інформаційно-цифрова компетентність: здатність працювати з інформацією, використовувати математичні моделі та інструменти для обчислень.
- Навички вирішення проблем: учні вчаться використовувати математику для аналізу та розв'язання практичних завдань у різних сферах.

Наведемо приклади задач, які сприяють розвитку математичної компетентності учнів, зокрема, вони формують навички застосування математичних знань у практичних ситуаціях, вдосконалюють логічне мислення, а також сприяють розвитку аналітичних і дослідницьких здібностей.

Задача 15. На залізничному переїзді у машини відмовив двигун. Господар автомобіля побіг назустріч поїзду, подаючи сигнали про небезпеку. Чи можна запобігти аварії, якщо поїзд знаходиться на відстані 900 метрів від переїзду і при екстреному гальмуванні швидкість вантажного поїзда змінюється за законом $v = 0,2t$, а швидкість пасажирського за законом $v = 0,4t$, де v – швидкість (м/с), t – час (с)? Швидкість руху поїзда до початку гальмування – 72 км/год.

Розв'язання: Переведемо початкову швидкість у м/с:

$$v_0 = 72 \text{ км/год} = \frac{(72 \cdot 1000)}{3600} \text{ м/с} = 20 \text{ м/с}.$$

Знайдемо час, за який поїзд зупиниться. Для вантажного поїзда:

$$v(t) = v_0 - 0,2t.$$

$$\text{Поїзд зупиняється, коли } v(t) = 0: 0 = 20 - 0,2t \rightarrow t = \frac{20}{0,2} = 100 \text{ (с)}.$$

$$\text{Для пасажирського поїзда: } v(t) = v_0 - 0,4t.$$

$$\text{Поїзд зупиняється, коли } v(t) = 0: 0 = 20 - 0,4t \rightarrow t = \frac{20}{0,4} = 50 \text{ (с)}.$$

Обчислимо гальмівний шлях. Гальмівний шлях обчислюється за формулою:

$$S = \int_0^t v(t) dt$$

Для вантажного поїзда:

$$S_{\text{вантажний}} = \int_0^{100} (20 - 0,2t) dt = [20t - 0,1t^2]_0^{100} = 2000 - 1000 = 1000 \text{ (м)}$$

Для пасажирського поїзда:

$$\begin{aligned} S_{\text{пасажирський}} &= \int_0^{50} (20 - 0,4t) dt = [20t - 0,2t^2]_0^{50} = 1000 - 500 = \\ &= 500 \text{ (м)} \end{aligned}$$

Висновок: вантажний потяг зупиниться на відстані 1000 метрів, що більше за відстань до переїзду (900 метрів), отже, зіткнення уникнути не вдасться.

Пасажирський потяг зупиниться на відстані 500 метрів, що менше за відстань до переїзду, отже, зіткнення можна уникнути.

Відповідь: якщо потяг вантажний – ні, якщо потяг пасажирський – так.

Задача 16. Палуба корабля нагадує дві перехресні параболи. Скільки необхідно фарби для її покриття, якщо довжина корабля 80 м, ширина в центрі – 20 м, а на кожен квадратний метр необхідно 0,25 кг фарби?

Розв'язання. Запишемо рівняння параболи. Припустимо, що палуба корабля симетрична відносно осей координат. Тоді рівняння параболи можна записати у вигляді: $y = ax^2$. Знайдемо коефіцієнт a .

Відомо, що ширина в центрі (при $x = 0$) дорівнює 20 м, а довжина корабля становить 80 м, тобто x змінюється від -40 м до 40 м. Оскільки максимальна ширина дорівнює 20 м: $20 = a \cdot (40)^2$. Звідси $a = 0,0125$.

Знайдемо площу палуби. Площа палуби обчислюється як інтеграл від -40 до 40 від функції $y(x)$:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{40} y(x) dx = 2 \int_0^{40} 0,0125x^2 dx, \\ S &= 2 \cdot \left[\frac{0,0125x^3}{3} \right]_0^{40} = 2 \cdot \left[\frac{0,0125 \cdot 40^3}{3} - \frac{0,0125 \cdot 0^3}{3} \right] = \\ &= 2 \cdot \left[\frac{0,0125 \cdot 64000}{3} \right] = 2 \cdot 266,67 = 533,34 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Знайдемо масу фарби. Маса фарби обчислюється за формулою:

$$m = S \cdot 0,25 = 533,34 \cdot 0,25 \approx 133,34 \text{ (кг)}.$$

Відповідь: необхідна маса фарби для покриття палуби корабля становить 133,34 кг.

Задача 17. Камінь підкинутий вертикально вгору з даху будівлі висотою 15 м. Яка початкова швидкість каменя, якщо через 1 с він перебував на висоті 25 м?

Розв'язання. Рівняння швидкості каменя можна записати у вигляді:

$$v(t) = v_0 - gt.$$

Положення каменя $h(t)$ в момент часу t знайдемо, інтегруючи швидкість:

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v(t)dt = h_0 + \int_0^t (v_0 - gt)dt,$$

$$h(t) = h_0 + \left[v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right]_0^t,$$

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Підставимо відомі значення. Через 1 секунду камінь перебував на висоті 25 м, тому підставимо ці значення в рівняння:

$$25 = 15 + v_0 \cdot 1 - \frac{9,8 \cdot 1^2}{2},$$

$$25 = 15 + v_0 - 4,9.$$

Знайдемо початкову швидкість v_0 : $v_0 = 25 - 15 + 4,9 = 14,9$ (м/с).

Відповідь: 14,9 м/с.

Задача 18. Радіозавод випускає в рік 28 000 радіоприймачів, і кожен наступний рік випуск радіоприймачів збільшується на 600 шт. Визначте суму амортизаційних відрахувань за 10 років при нормі амортизації, що дорівнює 1,2% від собівартості продукції, що випускається. Собівартість одного радіоприймача 450 грн.

Розв'язання. Крок 1: Визначимо функцію випуску радіоприймачів за рік.

Кількість радіоприймачів, що випускається на t -му році, можна описати лінійною функцією: $N(t) = N_0 + k t$, де $N_0 = 28000$ — кількість радіоприймачів у першому році, $k = 600$ — річне збільшення кількості випуску.

Крок 2: Знайдемо сумарну кількість випущених радіоприймачів за 10 років.

Сумарну кількість радіоприймачів, випущених за 10 років, можна знайти як інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} N(t)dt &= \int_0^{10} (28000 + 600t)dt = \\ &= \left[28000t + \frac{600t^2}{2} \right]_0^{10} = 28000 \cdot 10 + \frac{600 \cdot 10^2}{2} = \\ &= 280000 + 30000 = 310000. \end{aligned}$$

Крок 3: Знайдемо амортизаційні відрахування.

Сума амортизаційних відрахувань дорівнює 1,2% від загальної вартості продукції:

$$Amortization = 0,012 \cdot 310000 \cdot 450 = 1674000 \text{ грн.}$$

Висновок: сума амортизаційних відрахувань за 10 років дорівнює 1674000 грн.

Задача 19. Деякий вид шкідників розмножується в саду експоненційно ("експоненційно" означає, що кількість цих шкідників збільшується в геометричній прогресії, тобто з певним постійним відсотком зростання за певний проміжок часу). На початку дослідження їх кількість оцінювалася в $3,0 \cdot 10^4$ особин, через 5 днів їх кількість подвоїлася. Кожен день один шкідник поїдає 5 см^2 листя. Скільки листя з'їдять шкідники за 20 днів?

Розв'язання. Крок 1: Визначимо функцію зростання кількості шкідників.

Кількість шкідників $N(t)$ зростає експоненційно, тобто: $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, де $N_0 = 3,0 \cdot 10^4$ — початкова кількість шкідників, k — константа, яка залежить від швидкості розмноження.

Крок 2: Знайдемо константу k . Через 5 днів кількість шкідників подвоїлася, тобто

$$N(5) = 2 \cdot N_0.$$

Підставимо це в рівняння:

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{5k},$$

$$e^{5k} = 2,$$

$$5k = \ln(2),$$

$$k = \frac{\ln(2)}{5} \approx 0.1386.$$

Крок 3: Знайдемо кількість шкідників через 20 днів. Функція кількості шкідників через 20 днів буде:

$$N(20) = 3,0 \cdot 10^4 \cdot e^{0,1386 \cdot 20},$$

$$N(20) \approx 3,0 \cdot 10^4 \cdot e^{2,772} \approx 3,0 \cdot 10^4 \cdot 15,98 \approx 479400.$$

Крок 4: Знайдемо кількість листя, з'їденого шкідниками за 20 днів. Сумарна кількість з'їденого листя:

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} N(t) \cdot r \, dt &= 5 \cdot \int_0^{20} 3,0 \cdot 10^4 \cdot e^{0,1386t} \, dt = \left[5 \cdot 3,0 \cdot 10^4 \cdot \frac{e^{0,1386t}}{0,1386} \right]_0^{20} = \\
&= 5 \cdot 3,0 \cdot 10^4 \cdot \frac{e^{2,772} - e^0}{0,1386} \approx 5 \cdot 3,0 \cdot 10^4 \cdot \frac{15,98 - 1}{0,1386} \approx \\
&\approx 15 \cdot 10^4 \cdot 108,36 \approx 1625400 \text{ (см}^2\text{)} = 162,54 \text{ (м}^2\text{)}.
\end{aligned}$$

Відповідь: шкідники з'їдять приблизно 162,54 м² листя за 20 днів.

Задача 20. Швидкість зростання популяції пеніцилінових грибків при необмеженості ресурсів живлення описується експоненціальним законом $v = ae^{kt}$. Знайдіть приріст чисельності популяції ΔP за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$.
Розв'язання. Задача також розв'язується методом безпосереднього інтегрування. Приріст чисельності популяції

$$\Delta P = \int_{t_0}^t ae^{kt} \, dt = \frac{a}{k} e^{kt} \Big|_{t_0}^t = \frac{a}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}) = P(t) - P(t_0).$$

Відповідь: $\Delta P = P(t) - P(t_0)$.

Задача 21. Експериментально встановлено, що продуктивність праці робітника наближено виражається функцією:

$f(t) = -0,0036t^2 - 0,089t + 20,96$, де t — час у годинах. Обчислити обсяг випуску продукції за квартал, вважаючи робочий день восьмигодинним, а кількість робочих днів у кварталі 62.

Розв'язання. Крок 1: Обчислення обсягу випуску продукції за один робочий день. Потрібно обчислити інтеграл функції $f(t)$ на інтервалі від $t = 0$ до $t = 8$.

$$P_{\text{день}} = \int_0^8 f(t) \, dt.$$

Інтегруємо:

$$\int_0^8 (-0,0036t^2 - 0,089t + 20,96) \, dt = (-0,0012t^3 - 0,0445t^2 + 20,96t) \Big|_0^8.$$

Підставимо значення: $P_{\text{день}} = (-0,0012 \cdot 8^3 - 0,0445 \cdot 8^2 + 20,96 \cdot 8) - (-0,0012 \cdot 0^3 - 0,0445 \cdot 0^2 + 20,96 \cdot 0) = -0,0012 \cdot 512 - 0,0445 \cdot 64 +$

$$+167,68 = -0,6144 - 2,848 + 167,68 = 164,2176.$$

Отже, за один робочий день робітник виробляє 164,2176 одиниць продукції.

Крок 2: Обчислення обсягу випуску продукції за квартал:

$$P_{\text{квартал}} = P_{\text{день}} \cdot 62 = 164,2176 \cdot 62 = 10181,49 \approx 10181.$$

Відповідь: 10181 одиниць продукції.

Дані компетентнісні задачі продемонстрували важливість застосування математичного моделювання у різних сферах, таких як транспорт, інженерія, біологія, економіка та виробництво. Вирішення задач сприяє розвитку аналітичного мислення, здатності до побудови математичних моделей, а також умінню оцінювати результати та робити обґрунтовані висновки. Компетентнісний підхід забезпечує формування ключових умінь, необхідних для вирішення реальних задач та підготовки до професійної діяльності.

Як зазначено в [20], рівні сформованості математичної компетентності передбачають, що учні:

- виокремлюють проблеми і досліджують ситуації, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделюють процеси і ситуації, розробляють стратегії та плани дій для розв'язання проблемних ситуацій;
- критично оцінюють процес та результат розв'язання проблемних ситуацій;
- розвивають математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіють математичною мовою.

Отже, традиційна освітня парадигма, зорієнтована на засвоєння знань, поступається місцем новій, основою якої є формування життєвої компетентності здобувача освіти. Ця нова парадигма передбачає здатність учнів використовувати набуті знання та вміння в реальному житті, застосовувати їх у різних практичних ситуаціях, критично мислити та робити обґрунтовані висновки. Математика залишається провідним навчальним предметом сучасної школи і набуває ролі інструменту формування в учнів усіх ключових

компетеностей. За таких умов посилюється роль і значення методичного забезпечення компетентнісного навчання математики [14].

Однією з основних проблем впровадження компетентнісного підходу є необхідність оновлення підручників та методичних матеріалів, а також забезпечення належної підготовки вчителів. Проте перспектива цього підходу полягає в тому, що він дозволяє випускникам школи отримати набір універсальних знань і навичок, які будуть корисні в будь-якій сфері їхньої майбутньої діяльності.

2.2 Міжпредметні зв'язки на уроках математики

Міжпредметні зв'язки є важливим компонентом сучасної освіти, зокрема на уроках математики. Вони сприяють формуванню цілісного бачення знань, розширенню світогляду учнів і розвитку навичок, необхідних для успішного вирішення реальних проблем. На практиці міжпредметні зв'язки дозволяють учням зрозуміти, як математичні знання взаємопов'язані з іншими науками та сферами життя, що підвищує мотивацію до вивчення математики і сприяє розвитку критичного мислення.

Актуальність міжпредметних зв'язків у шкільному навчанні є безсумнівною. Це обумовлено сучасним розвитком науки, яка демонструє чітку інтеграцію суспільних, природничих і технічних знань. Сьогодні недостатньо мати знання лише в одній галузі науки. Неможливо вивчати одне, не торкаючись іншого. Інтеграція наукових знань висуває нові вимоги до фахівців. Значущість знань у суміжних з наукою сферах зростає, як і вміння комплексно використовувати ці знання для вирішення різних завдань.

Реформування системи освіти в Україні нині набуло глобального характеру. Формування компетентностей учнів визначається не лише оновленням змісту освіти, але й впровадженням інноваційних методів та технологій навчання. Якісне навчання забезпечує засвоєння знань та формування умінь, які стануть основою для подальшого життя випускника школи.

У світлі сучасних завдань всебічно розвиненої особистості школяра проблема міжпредметних зв'язків набуває особливої важливості. Актуальність цієї проблеми обумовлена розвитком науки, техніки та суспільства. Міжпредметні зв'язки є важливим принципом навчання в сучасній школі, забезпечуючи взаємозв'язок наук природничо-математичного та суспільно-гуманітарного циклів. Проблема полягає не лише в оволодінні знаннями, а й в умінні застосовувати їх на практиці в будь-якій життєвій ситуації та професійній сфері.

Міжпредметні зв'язки виконують у навчанні математики ряд функцій [9].

Методологічна функція виражена в тому, що тільки на її основі можливе формування в учнів діалектико-матеріалістичних поглядів на природу, сучасних уявлень про її цілісність і розвиток, оскільки міжпредметні зв'язки сприяють відображенню в навчанні методології сучасного природознавства, яке розвивається по лінії інтеграції ідей і методів, із позицій системного підходу до пізнання природи.

Освітня функція міжпредметних зв'язків полягає в тому, що за її допомогою вчитель математики формує такі якості знань учнів, як системність, глибина, усвідомленість, гнучкість. У цьому випадку міжпредметні зв'язки виступають як засіб розвитку математичних понять, сприяють засвоєнню зв'язків між ними та загальними поняттями.

Розвиваюча функція міжпредметних зв'язків визначається їх роллю в розвитку системного і творчого мислення учнів, у формуванні їх пізнавальної активності, самостійності та інтересу до пізнання математики. Міжпредметні зв'язки допомагають подолати предметну інертність мислення і розширюють кругозір учнів.

Виховна функція міжпредметних зв'язків виражена в їх сприянні всім напрямкам виховання школярів у навчанні математики. Учитель математики реалізує комплексний підхід до виховання спираючись на зв'язки з іншими предметами.

Конструктивна функція міжпредметних зв'язків полягає в тому, що з її допомогою вчитель удосконалює зміст навчального матеріалу, методи і форми організації навчання. Реалізація міжпредметних зв'язків вимагає спільного планування вчителями предметів природничого циклу комплексних форм навчальної та позакласної роботи, які передбачають знання ними підручників і програм суміжних предметів.

Урок міжпредметного характеру має відповідати певним дидактичним вимогам. Він повинен включати чітко сформульоване навчально-пізнавальне завдання, для виконання якого необхідно залучити знання з інших предметів. Такий урок має забезпечувати високу активність учнів у застосуванні знань з різних дисциплін, а також містити узагальнені знання світоглядного характеру, що базуються на зв'язках і синтезі знань з різних галузей, причинно-наслідкових зв'язках, які різнобічно розкривають суть явищ, що вивчаються. Крім того, урок має викликати позитивне ставлення учнів та збуджувати в них інтерес до пізнання.

Приклади міжпредметних зв'язків:

- Фізика: Математика є невід'ємною частиною фізики, зокрема при вивченні тем, пов'язаних із рівняннями руху, енергією, роботою, інтегралами та похідними. Наприклад, задачі на обчислення площ і об'ємів за допомогою визначеного інтегралу часто мають фізичний контекст.
- Економіка: Математичні методи застосовуються для моделювання економічних процесів, зокрема для аналізу попиту і пропозиції, оптимізації прибутку, розрахунку відсоткових ставок та інших фінансових показників. Тема математичного моделювання попиту є прикладом використання міжпредметних зв'язків між математикою та економікою.
- Інформатика: Використання алгоритмів і числових методів в інформатиці є одним із класичних прикладів інтеграції математики. Застосування технологій для розв'язання математичних задач, таких як використання програмного забезпечення для інтеграції або побудови графіків, демонструє зв'язок цих двох предметів.

- Хімія та біологія: Математичні моделі використовуються для аналізу хімічних реакцій, розрахунків кількості речовин, вивчення статистичних закономірностей у біологічних дослідженнях.

- Географія: Застосування математичних методів, таких як геометрія та тригонометрія, допомагає вивчати географічні явища. Наприклад, обчислення відстаней на карті або площі територій.

Для здійснення міжпредметних зв'язків на уроці використовують загальні та специфічні прийоми подані в табл. 2.1 [19, с. 25].

Таблиця 2.1.

Методичні прийоми здійснення міжпредметних зв'язків на уроці

Загальні прийоми, орієнтовані на встановлення міжпредметних зв'язків	Специфічні прийоми, орієнтовані на встановлення міжпредметних зв'язків
Домашні завдання з інших предметів. Включення у виклад вчителя міжпредметного матеріалу одного або кількох інших предметів. Бесіда і відтворення знань іншого предмета. Застосування наочної допомоги, приладів, фрагментів відеофільмів тощо. Постановка проблемних питань. Повідомлення учнів за матеріалами іншого предмета та їх обговорення. Розв'язування кількісних і якісних задач, кросвордів міжпредметного характеру тощо.	Робота з підручниками з кількох предметів на уроці. Виготовлення й використання комплексної наочної допомоги, що узагальнює навчальний матеріал кількох предметів. Виконання письмових самостійних робіт, які розробляються й оцінюються вчителями різних предметів. Комплексні завдання, міжпредметні тести, диференційовані по предметах групові завдання. Ведення міжпредметних зошитів (виконання завдань із різних предметів, спрямованих на розв'язання загальної навчальної проблеми). Групова робота вчителів з організації вивчення міжпредметних проблем. Проведення міжпредметних гуртків, конференцій, олімпіад учнів

Міжпредметні зв'язки забезпечують:

- Цілісність знань: учні мають змогу побачити, як математичні поняття і методи застосовуються в інших дисциплінах, що допомагає їм краще зрозуміти, як математика працює в реальному світі.

- Мотивацію: використання знань інших предметів на уроках математики дозволяє учням краще зрозуміти практичну цінність математичних знань.
- Розвиток креативності і критичного мислення: завдяки поєднанню знань з різних сфер учні починають мислити більш широко та креативно.

Наведені нижче задачі дозволяють простежити міжпредметні зв'язки, поєднуючи математичні методи з іншими галузями знань, що забезпечує глибше розуміння матеріалу та сприяє розвитку аналітичного мислення учнів.

Задача 22 (фізика). Обчислити роботу, яка виконується під час тиску гвинтової пружини на 4 см, якщо для її стиснення на 1 см треба прикласти силу в 9,8 Н.

Розв'язання. Для обчислення роботи, виконаної при стисненні гвинтової пружини, використаємо закон Гука, який говорить, що сила, необхідна для стиснення пружини, пропорційна величині стиснення: $F(x) = kx$, де $F(x)$ – сила, необхідна для стиснення пружини на x см, k – коефіцієнт жорсткості пружини. Відомо, що для стиснення пружини на 1 см потрібно прикласти силу 9,8 Н. Отже, жорсткість пружини можна обчислити за формулою:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{9,8\text{Н}}{1\text{ см}} = 9,8 \frac{\text{Н}}{\text{см}}.$$

Робота, виконана під час стиснення пружини, обчислюється за формулою:

$$A = \int_0^x F(x)dx = \int_0^x kx dx.$$

Знаємо, що пружину стиснули на 4 см, тобто $x = 4$ см. Тоді підставимо

$$\text{значення: } A = \int_0^4 9,8x dx = 9,8 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 9,8 \cdot \frac{16}{2} = 9,8 \cdot 8 = 78,4 \text{ (Дж)}$$

Отже, робота, яка виконується під час стиснення пружини на 4 см, становить 78,4 Дж.

Відповідь: 78,4 Дж.

Задача 23 (фізика). Є неоднорідний стержень довжиною l . Яка маса шматка стержня, якщо лінійна густина ρ стержня виражається законом

$\rho = 3x - \sin(2x)$, де $x \in [0, l]$? (Розв'язати, якщо $l = 40$ см, а густина вимірюється в кг/м).

Розв'язання. Маса шматка стержня може бути знайдена як інтеграл від лінійної густини $\rho(x)$ за довжиною стержня: $m = \int_0^l \rho(x) dx$.

Підставимо задану функцію $\rho(x) = 3x - \sin(2x)$ у інтеграл:

$$m = \int_0^l (3x - \sin(2x)) dx.$$

Інтегруємо кожен доданок окремо: $m = \int_0^l 3x dx - \int_0^l \sin(2x) dx$.

Перший інтеграл:

$$\int_0^l 3x dx = \left[\frac{3x^2}{2} \right]_0^l = \frac{3l^2}{2}.$$

Другий інтеграл:

$$\int_0^l \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^l = -\frac{1}{2} (\cos(2l) - \cos(0)) = -\frac{1}{2} (\cos(2l) - 1).$$

Оскільки $\cos(2l) = 1 - 2 \sin^2(l)$, то: $\int_0^l \sin(2x) dx = \sin^2(l)$.

Об'єднуємо результати. Отже, маса стержня дорівнює: $m = \frac{3l^2}{2} - \sin^2(l)$.

Підставимо $l = 40$ см = 0,4 м:

$$\begin{aligned} m &= 3 \cdot \frac{(0,4)^2}{2} - \sin^2(0,4) = 3 \cdot \frac{0,16}{2} - \sin^2(0,4) = \\ &= \frac{0,48}{2} - \sin^2(0,4) \approx 0,24 - \sin^2(0,4). \end{aligned}$$

Обчислимо значення $\sin(0,4)$ і знайдемо масу: $\sin(0,4) \approx 0,3894$,

$$\sin^2(0,4) \approx 0,1516,$$

$$m \approx 0,24 - 0,1516 = 0,0884 \text{ (кг)}.$$

Отже, маса стержня довжиною 40 см складає приблизно 0,0884 кг.

Відповідь: 0,0884 кг.

Задача 24 (біологія). На початку спостереження живильний розчин містив 4000 бактерій. Дослідження показали, що в наступний проміжок часу швидкість, з якою розмножуються бактерії, була $v = 500 \cdot e^{0,12t}$. Визначте відповідну

функцію зростання, коли живильний розчин містив 25000 бактерій? Визначте приріст бактерій за проміжок часу від початку спостереження до 18 годин.

Розв'язання. Кількість бактерій $N(t)$ можна знайти шляхом інтегрування функції швидкості розмноження: $N(t) = \int v(t)dt = \int 500 e^{0,12t} dt$.

Інтеграл від функції швидкості розмноження дорівнює:

$$N(t) = \frac{500}{0,12} \cdot e^{0,12t} + C = 4166,67 \cdot e^{0,12t} + C.$$

Знайдемо константу C . На початку спостереження (при $t = 0$) було 4000 бактерій, тому: $4000 = 4166,67 \cdot e^0 + C$, звідси

$$C = 4000 - 4166,67 = -166,67.$$

Отже, функція зростання: $N(t) = 4166,67 \cdot e^{0,12t} - 166,67$.

Знайдемо час, коли кількість бактерій досягне 25000. Для цього підставимо

$$N(t) = 25000 \text{ у рівняння: } 25000 = 4166,67 \cdot e^{0,12t} - 166,67,$$

$$25166,67 = 4166,67 \cdot e^{0,12t},$$

$$e^{0,12t} = \frac{25166,67}{4166,67} \approx 6,04,$$

$$0,12t = \ln(6,04) \approx 1,80,$$

$$t \approx 15 \text{ годин.}$$

Визначимо приріст бактерій від початку спостереження до 18 годин. Знайдемо приріст бактерій за цей проміжок:

$$N(18) = 4166,67 \cdot e^{0,12 \cdot 18} - 166,67,$$

$$N(18) \approx 4166,67 \cdot e^{2,16} - 166,67,$$

$$N(18) \approx 4166,67 \cdot 8,67 - 166,67 = 36147,5 - 166,67 = 35980,83.$$

Приріст бактерій за цей час:

$$\Delta N = N(18) - N(0) = 35980,83 - 4000 \approx 31980,83.$$

Відповідь: приріст бактерій за 18 годин становить приблизно 31980 бактерій.

Задача 25 (хімія). Швидкість зміни концентрації речовини, що вступила в реакцію, виражається функцією $v(t) = 3t + 1$, де t – час (с), $v(t)$ – швидкість (моль/с·м³). Як зміниться концентрація речовини за час 5 с?

Розв'язання. Задача розв'язується методом безпосереднього інтегрування. Оскільки $v(t) = C'(t)$, де $C(t)$ — концентрація речовини і первісна для $v(t)$, тому $C(5) - C(0) = \int_0^5 (3t + 1)dt = \left(\frac{3t^2}{2} + t\right)\Big|_0^5 = 42,5 \left(\frac{\text{моль}}{\text{м}^3}\right)$.

Відповідь. 42,5 моль/м³.

Задача 26 (економіка). Відомо, що попит на деякий товар описує функція $q = \frac{6400}{p^3}$ а пропозиція даного товару характеризується функцією $q = 400p$. Знайдіть величину надлишку споживача при придбанні даного товару.

Розв'язання. Для розрахунку надлишку споживача спочатку з'ясуємо параметри ринкової рівноваги $(p; q)$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} q = \frac{6400}{p^3}, \\ q = 400p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6400}{p^3} = 400p, \\ q = 400p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^4 = 16, \\ q = 400p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2, \\ q = 800. \end{cases}$$

Таким чином, $p = 2$, $q = 800$.

Запишемо формулу для обчислення надлишку споживача, де $f(q)$ - функція, обернена до функції $q = \frac{6400}{p^3}$, тобто $f(q) = \sqrt[3]{\frac{6400}{q}} = 4\sqrt[3]{100q}^{-\frac{1}{3}}$.

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{800} 4\sqrt[3]{100q}^{-\frac{1}{3}} dq - 2 \cdot 800 = \frac{3 \cdot 4\sqrt[3]{100q}^{\frac{2}{3}}}{2} \Big|_0^{800} - 1600 = \\ &= \frac{3 \cdot 4\sqrt[3]{100 \cdot 800^{\frac{2}{3}}}}{2} - 1600 = 800 \text{ (грн.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 800 грн.

Запропоновані задачі демонструють міжпредметні зв'язки, оскільки вони інтегрують знання з різних предметних областей, що сприяє формуванню

цілісного уявлення учнів про застосування інтегралів у природничих і соціально-економічних процесах.

Висновки до розділу 2

Другий розділ дипломної роботи був присвячений методичним аспектам вивчення теми «Інтеграл та його застосування» у старшій школі. Розглянуто компетентнісний підхід, що спрямований на формування в учнів не лише теоретичних знань, а й практичних навичок використання інтегралу в різних ситуаціях. Запропоновані компетентнісні задачі сприяють формуванню в учнів навичок, необхідних для ефективного застосування знань у реальних умовах. Цей підхід допомагає виховати активних, критично мислячих учнів, здатних до самостійного прийняття рішень та вирішення проблем, що є важливим для їхнього подальшого успіху у навчанні та професійній діяльності.

Аналіз міжпредметних зв'язків на уроках математики продемонстрував, що інтегральне числення є ефективним засобом для поєднання математики з іншими дисциплінами, такими як фізика, економіка, хімія, біологія. У рамках цього розділу також було наведено низку задач, які сприяють кращому засвоєнню матеріалу та розвитку аналітичного мислення учнів.

Завдяки навчальному процесу, побудованому на цілеспрямованій реалізації міжпредметних зв'язків, учні здатні цілісно сприймати навколишній світ та самостійно встановлювати важливі причинно-наслідкові зв'язки між предметами і явищами. На основі міжпредметних зв'язків може будуватися узгоджена діяльність учительського колективу та координоване управління всім навчально-виховним процесом.

Отже, результати даного розділу підкреслюють важливість інтеграції теоретичного та прикладного навчання для підвищення якості математичної освіти у старшій школі.

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ ТЕМИ «ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ»

3.1. STEM-освіта

Концепція оновлення освіти, яка ґрунтується на Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [28], зосереджується на впровадженні компетентнісного підходу. Вона передбачає формування ключових компетентностей, тобто готовності учнів використовувати набуті знання та навички для вирішення практичних і теоретичних завдань у реальному житті. Включення наскрізних ліній ключових компетентностей у навчальні програми сприяє розвитку в учнів умінь застосовувати знання в повсякденних ситуаціях. Швидкий розвиток інформаційних технологій та нанотехнологій створює попит на кваліфікованих спеціалістів, що вимагає якісного навчання учнів технічним предметам, таким як математика, фізика, інженерія та програмування. Система освіти повинна випереджати час.

Одним з основних напрямків інноваційного розвитку природничо-математичної освіти є система навчання STEM, яка допомагає дітям розвивати логічне мислення і технічну грамотність, вчитися вирішувати завдання та ставати новаторами й винахідниками. STEM-освіта сприятиме вирішенню найважливіших проблем майбутнього. Головна мета впровадження STEM-освіти полягає у реалізації державної політики з урахуванням нових вимог Закону України «Про освіту», що підкреслює важливість розвитку науково-технічного напрямку на всіх рівнях навчально-методичної діяльності.

Ключові компетентності концепції «Нової української школи» органічно вписуються в систему STEM-освіти, створюючи основу для успішної самореалізації особистості як професіонала та громадянина. Запровадження системи STEM-освіти відповідає вимогам «нової економіки». У майбутньому з'являться професії, що будуть поєднувати технології та високотехнологічне виробництво з природничими науками. Опанування сучасних професій потребує

комплексної підготовки та знань у галузях природничих наук, інженерії, технологій та програмування, що є основою STEM-освіти.

STEM-освіта – доволі нова, але перспективна освітня методика. Назва STEM є аббревіатурою, що розшифровується так: Science – наука, Technology – технології, Engineering – інженерія, Math – математика.

У підсумку, ми отримуємо комплексний міждисциплінарний підхід із проектним навчанням, який інтегрує природничі науки з технологіями, інженерією та математикою. Так само як і в житті, всі предмети взаємопов'язані та утворюють єдине ціле. Це гармонійне поєднання є основною перевагою STEM-освіти.

На сучасному етапі важливо навчати дітей креативному, аналітичному та інноваційному мисленню; вмінню ефективно вирішувати проблеми, приймати рішення; комунікаційним навичкам, співпраці та роботі в команді й над проєктами.

Основною метою STEM-освіти є також розвиток розумово-пізнавальних і творчих здібностей молоді, рівень яких визначає конкурентоспроможність на ринку праці, а також удосконалення науково-дослідної та інженерної освіти в навчальних закладах.

Основним завданням STEM-освіти є формування найбільш затребуваних на ринку праці XXI ст. компетенцій і навичок [15], серед яких такі: готовність до розв'язання складних (комплексних) практичних проблем; критичне мислення; креативність; організаційні здібності; уміння працювати в команді; емоційний інтелект; оцінювання проблеми і прийняття рішення; здатність до ефективної взаємодії, яка виявляється у емпатії до споживача продукту діяльності команди, уміння спілкуватися з різними людьми, створювати позитивний настрій, виявляти терпіння; уміння домовлятися; когнітивна гнучкість; різнобічний розвиток індивідуальності дитини на основі виявлення її задатків і здібностей у природничо-математичній сфері, формування ціннісних орієнтацій, задоволення інтересів і потреб; становлення у підростаючого покоління цілісного наукового

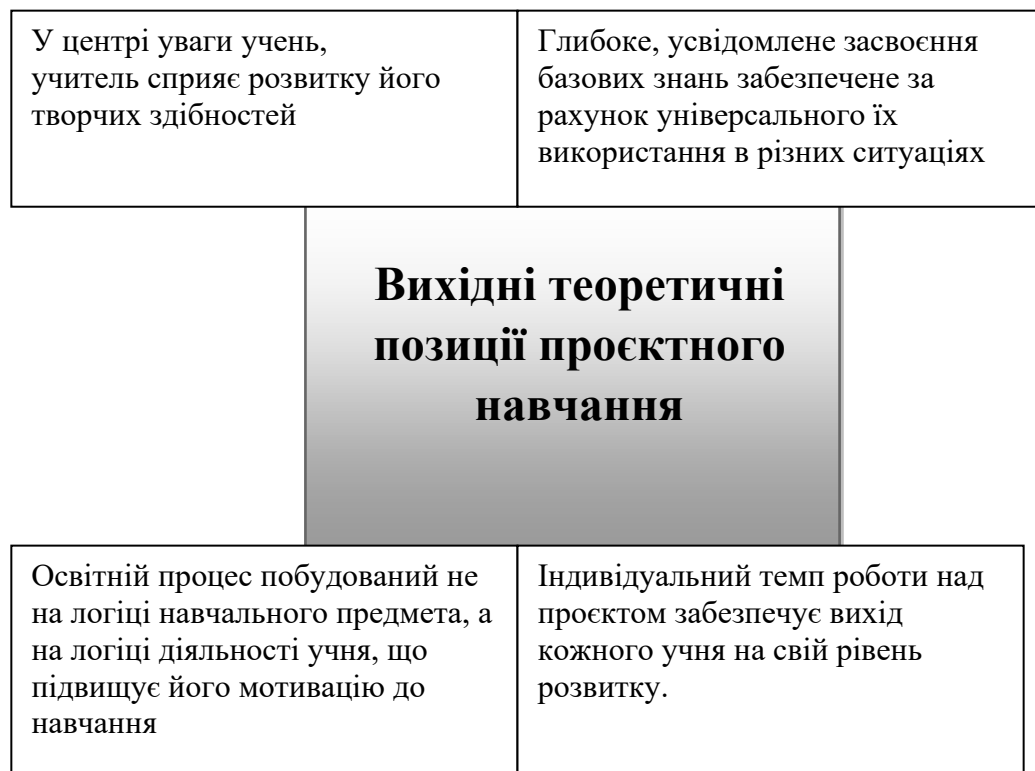
світогляду, загальнонаукової, загальнокультурної, технологічної, комунікативної і соціальної компетентностей на основі засвоєння системи знань про природу, людину, суспільство, виробництво, оволодіння засобами пізнавальної і практичної діяльності; формування соціально-компетентної особистості, здатної здійснювати самостійний вибір і приймати відповідальні рішення у різноманітних життєвих ситуаціях; виховання потреби і здатності до навчання упродовж усього життя, вироблення умінь практичного і творчого застосування здобутих знань; виховання в особистості любові до праці, забезпечення умов для її життєвого і професійного самовизначення, формування готовності до свідомого вибору і оволодіння майбутньою професією.

3.2. Проєкт «Інтеграл та його застосування» як засіб реалізації STEM-освіти

Одним з дієвих засобів розвитку компетентностей є дослідно-проєктна діяльність. Проєктна діяльність є однією з найперспективніших складових освітнього процесу, що створює умови для творчого саморозвитку та самореалізації учнів, а також формує необхідні життєві компетенції: мовні, інформаційні, політичні та соціальні.

Метод проєктів передбачає самостійний пошук знань, їх систематизацію, здатність орієнтуватися в інформаційному просторі, виявляти проблеми та приймати рішення. Основою цього методу є розвиток пізнавальних навичок, уміння самостійно створювати свої знання та орієнтуватися в інформаційному середовищі, а також вдосконалення критичного мислення.

Проєкти як засіб впровадження STEM-освіти у школах дозволяють органічно інтегрувати знання учнів з різних дисциплін при вирішенні реальних проблем, сприяють їх практичному застосуванню, генерують нові ідеї та формують усі необхідні життєві компетенції. Впровадження методу проєктів змінює роль вчителя, перетворюючи його з носія готових знань на організатора пізнавальної діяльності учнів (схема 1).

Схема 1

Під час реалізації навчальних проєктів вирішується широкий спектр дидактичних, виховних і розвивальних завдань: учні здобувають нові знання, уміння і навички, необхідні в повсякденному житті; розвиваються їх мотивація та пізнавальні здібності; формується здатність самостійно орієнтуватися в інформаційному просторі, висловлювати власні думки та демонструвати компетентність.

Під час проходження практики під моїм керівництвом було розроблено проєкт «Інтеграл та його застосування» учнями 11 класу (Додаток Б).

Відзначимо етапи реалізації. Підготовчий етап був пов'язаний з визначенням теми і мети проєкту, постановкою завдання. Клас поділено на три групи: історики, теоретики та практики. Разом з учнями обговорено план проєкту, уточнено завдання для кожної з груп. Було повідомлено критерії оцінювання різних форм звітності. Школярам пропонувалось опрацювати окремі джерела відомостей як друковані, так і електронні через мережу Internet.

В ході реалізації проєкту школярі мали відповісти на ключове питання: як жила б людина без інтегралу? І взагалі, чи допомагає математика в житті? Не на

кожне з цих питань учень зможе дати однозначну відповідь. Однак питання спонукатимуть його до здійснення рефлексії, переосмислення власної діяльності, переоцінки власних здобутків.

Другий етап включав в себе пошук та аналіз відомостей. Наприклад, учні дізналися, що являє собою інтеграл, який він буває, навіщо він потрібен.

Третій етап. В роботі ставили за мету максимально наблизити проєктну технологію до класно-урочної системи навчання. А тому передбачили можливість на уроці у формі проміжного звіту заслуховувати теоретиків проєкту, уточнювати завдання, вимоги.

Четвертий. За планом на одному з наступних уроків звітували «математики-історики». Вони ознайомлювали решту учнів з історією виникнення та правилами обчислення інтегралів, розповідали, як це робили в давнину.

П'ятий етап. На наступному занятті виводились формули для обчислення інтегралів, площі, об'єму, маси тіл. При виведенні цих формул використовувалась групова форма організації праці. Учні виконували різні розрахунки інтегралів.

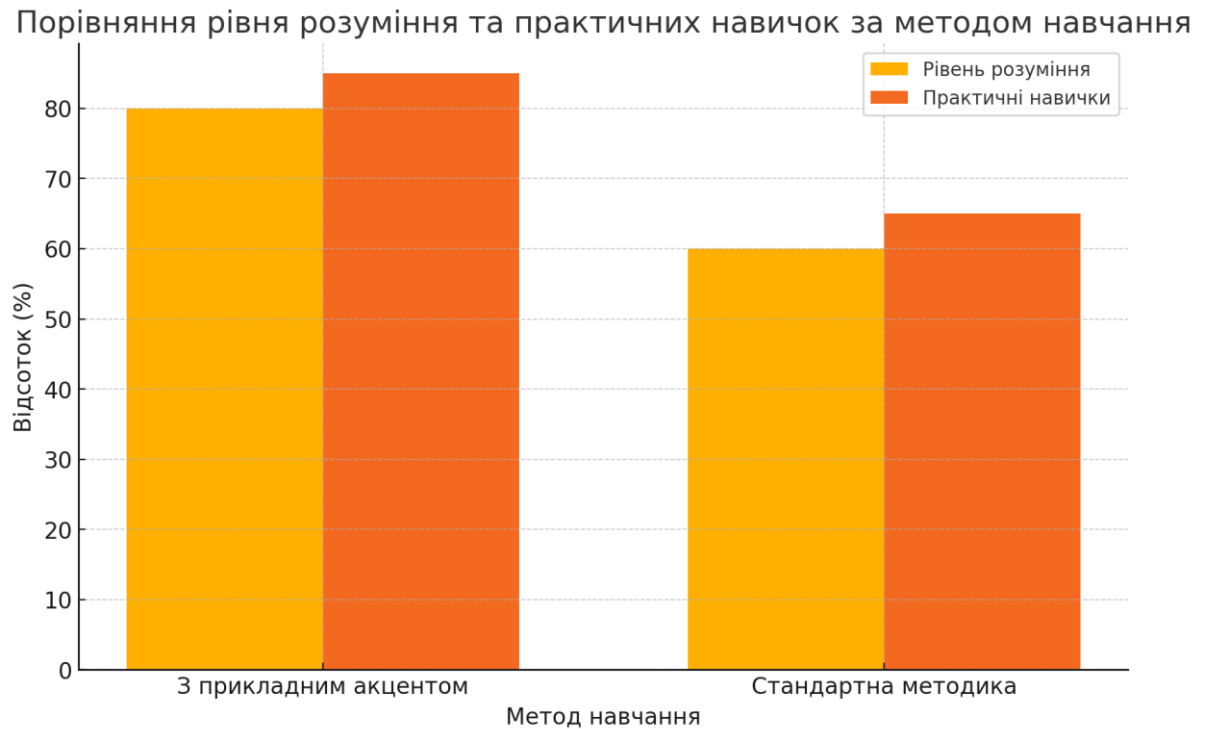
Шостий етап. Підбір і пошук задач прикладного спрямування. Тобто здобувачі освіти з'ясовували практичне призначення інтегралу в нашому житті, а саме в економіці, фізиці, екології, хімії та біології.

Заключний етап. Оформлення результатів, презентація розробок, підведення підсумків. Створюючи презентацію за допомогою Canva, учні виступали перед аудиторією, структурували свою доповідь. Вони удосконалювали уміння добирати найяскравіші переконливі факти для демонстрації думок, ідей. Виконання цього завдання потребувало також знань з інформатики.

Виконання проєкту значно підвищило рівень розуміння теоретичних аспектів інтегралів серед учнів. Залучення до практичних задач та реальних прикладів допомогло учням краще засвоїти поняття інтегралів та їх властивості. Школярі успішно опанували техніки обчислення інтегралів та їх застосування у

різних сферах, таких як фізика, економіка, екологія, хімія та біологія. Вирішення практичних задач дозволило їм зрозуміти значення інтегралів у реальному житті.

Нижче на діаграмі можемо спостерігати результати після реалізації проєкту «Інтеграл та його застосування». Бачимо, що метод із прикладним акцентом демонструє вищі показники у формуванні як теоретичного розуміння, так і практичних умінь у порівнянні зі стандартною методикою.



Проєкт сприяв розвитку дослідницьких навичок у здобувачів освіти. Вони вчилися проводити дослідження, аналізувати дані та робити висновки на основі отриманих результатів. Виконання проєкту сприяло підвищенню інтересу до математики та науки загалом. Учні стали більш зацікавлені у вивченні складних математичних концепцій, бачачи їх практичне застосування.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на більш глибоке вивчення різних методів інтегрування, включаючи чисельні методи та їх застосування у складних задачах. Можна дослідити нові галузі, де інтеграли мають важливе значення, наприклад, біомедичні науки, екологія, фінанси та інші. Створення міждисциплінарних проєктів, які поєднують математику з іншими науками, такими як фізика, хімія, економіка та інші, сприяє глибшому розумінню їх взаємозв'язків.

Вдосконалення методики навчання інтегралів:

1. Інтерактивні навчальні матеріали: розробка та впровадження інтерактивних мультимедійних матеріалів, що включають відеоуроки, симуляції та анімації, які допоможуть учням краще зрозуміти теоретичні концепції.

2. Використання технологій: інтеграція сучасних технологій у навчальний процес, таких як онлайн-платформи для самостійного навчання, інтерактивні вправи та тестування, які дозволять учням навчатися в зручному для них темпі.

3. Практичні заняття: збільшення кількості практичних занять, де учні зможуть застосовувати свої знання на практиці, вирішуючи реальні задачі та виконуючи експерименти.

4. Проєктна діяльність: заохочення учнів до участі у проєктній діяльності, яка сприяє розвитку дослідницьких навичок та глибшому розумінню матеріалу. Проєкти можуть бути як індивідуальними, так і груповими, що також розвиває навички співпраці.

Загалом, проєкт "Інтеграл та його застосування" продемонстрував ефективність експериментального підходу до навчання інтегралів, підвищив інтерес та мотивацію учнів, а також покращив їхні теоретичні та практичні знання. Подальший розвиток та вдосконалення методик навчання інтегралів, а також проведення нових досліджень сприятимуть ще більш глибшому засвоєнню цього важливого математичного поняття.

3.3. Проєкт "Математичне моделювання фізичних процесів"

Проєкт "Математичне моделювання фізичних процесів" (Додаток В) було представлено учням під час проходження практики, створеним у програмі Prezi, під час вивчення теми: Інтеграл та його застосування. Даний проєкт розроблений для того, щоб показати учням практичне застосування інтегралів у різних розділах фізики. Він містить великий набір задач, що охоплюють теми механіки, термодинаміки, електродинаміки та інших розділів фізики. Під час уроку учні могли самостійно обирати задачі для розв'язання, що дозволило

врахувати індивідуальні інтереси та рівень підготовки кожного учня. Інші задачі були рекомендовані для самостійного розгляду вдома, щоб поглибити знання та навички в позаурочний час. Такий підхід дав змогу не лише активно вивчати тему інтегралів, але й розвивати вміння самостійного аналізу фізичних процесів через математичні моделі.

Для розв'язування фізичних задач було рекомендовано таблицю з основними формулами обчислення фізичних величин через інтеграл (Додаток Г).

Задачі про обчислення шляху (переміщення)

Задача 27. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $v(t) = (3t^2 + 4t + 1) \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Знайти шлях, який пройшло тіло за перші 3 с.

Розв'язання. За формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ отримаємо

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)dt = (t^3 + 2t^2 + t)|_0^3 = (3^3 + 2 \cdot 3^2 + 3) - (0) = \\ = 48 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 48 м.

Задача 28. Лисиця перетинає відкриту галявину зі швидкістю $v(t) = 3t^3 - 2t^2$ (час вимірюється в секундах, а швидкість в метрах за секунду). Яка довжина пройденого шляху по галявині, якщо лисиця перетнула її за 4 секунди, починаючи рух з $t = 0$?

Розв'язання. Пройдений шлях можна знайти, інтегруючи функцію швидкості:

$$s(t) = \int v(t)dt.$$

Підставимо функцію швидкості $v(t) = 3t^3 - 2t^2$ у інтеграл:

$$s(t) = \int (3t^3 - 2t^2)dt = \left[\frac{3t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} \right] + C.$$

Враховуючи, що на початку $t = 0$, $s(0) = 0$, тобто константа $C = 0$. Тепер

обчислимо шлях за 4 секунди: $s(4) = 3 \cdot \frac{4^4}{4} - 2 \cdot \frac{4^3}{3} =$

$$= 3 \cdot \frac{256}{4} - 2 \cdot \frac{64}{3} = 192 - \frac{128}{3} \approx 192 - 42,67 = 149,33 \text{ (м)}.$$

Відповідь: пройдений лисицею шлях за 4 секунди дорівнює приблизно 149,33 м.

Задача 29. Сокіл, виглядаючи свою здобич, піднімається високо над землею. Визначте, на якій висоті знаходиться сокіл, якщо від землі він піднімається за 6 секунд зі швидкістю, яка визначається за формулою $v(t) = t + 3t^2$.

Розв'язання. Висота підйому може бути знайдена шляхом інтегрування функції швидкості: $h(t) = \int v(t)dt$.

Підставимо функцію швидкості $v(t) = t^3 + 3t^2$ у інтеграл:

$$h(t) = \int (t + 3t^2)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{3t^3}{3} \right] + C$$

Враховуючи, що на початку $t = 0, h(0) = 0$, тобто константа $C = 0$. Тепер обчислимо висоту за 6 секунд:

$$h(6) = \frac{6^2}{2} + 3 \cdot \frac{6^3}{3} = \frac{36}{2} + 3 \cdot \frac{216}{3} = 18 + 216 = 234 \text{ (м)}$$

Відповідь: сокіл знаходиться на висоті приблизно 234 м після 6 секунд підйому.

Задача 30. Представники поліції звернулися до експертів з таким проханням: «Відбулася ДТП. За свідченням водія, він почав гальмувати, коли швидкість автомобіля дорівнювала 36 км/год. Знайдіть переміщення автомобіля за час від другої до шостої секунди». Знаючи марку автомобіля з його технічних характеристик дізналися, що при ввімкнених гальмах він рухається з прискоренням $-0,5 \text{ м/с}^2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $v = v_0 + at$, де $v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$$(36 \frac{\text{км}}{\text{год}} = \frac{36 \cdot 1000\text{м}}{3600\text{с}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}), a = -0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

запишемо закон зміни швидкості $v(t) = 10 - 0,5t$, тоді

$$S = \int_2^6 (10 - 0,5t)dt = \left(10t - \frac{t^2}{4} \right) \Big|_2^6 = 32 \text{ (м)}$$

Відповідь: 32 м.

Задача про силу тиску рідини

Задача 31. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої $0,4 \text{ м}$ та $0,7 \text{ м}$.

Розв'язання. Візьмемо систему координат так, щоб осі Oy і Ox відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стінки акваріума. Щоб знайти силу тиску, скористаємося формулою: $P = g \int_a^b \rho x f(x) dx$.

Стінка має форму прямокутника, тому $f(x) = 0,7$, $x \in [0; 0,4]$. Оскільки межі інтегрування $a = 0$ і $b = 0,4$, то отримаємо

$$P = g \int_0^{0,4} 1000 \cdot 0,7 \cdot x dx = 700g \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,4} = 56g.$$

Враховуючи, що $g = 9,8 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$, маємо $P \approx 548,8 \text{ Н}$.

Відповідь: $548,8 \text{ Н}$.

Задача 32. При якій висоті h рідини в циліндричній посудині радіусом $r = 5 \text{ см}$ сила тиску на дно посудини та на бічну стінку будуть однаковими?

Розв'язання. Тиск рідини на дно посудини: $P = \rho gh$, де ρ — густина рідини, g — прискорення вільного падіння, h — висота стовпа рідини. Сила тиску на дно посудини: $F_1 = PS = \rho ghS$, де $S = \pi r^2$ — площа дна посудини. Отже, $F_1 = \rho gh\pi r^2$.

Тиск на бічну стінку залежить від глибини y : $P(y) = \rho gy$. Розіб'ємо умовно бічну стінку на кільцеві смужки висотою dy на глибині y . Тоді сила тиску на смужку: $dF(y) = P(y) \cdot dA = \rho gy \cdot 2\pi r dy$, де $dA = 2\pi r dy$ — площа кільцевої смужки. Інтегруючи по всій висоті h , отримаємо повну силу тиску на бічну стінку:

$$F_2 = \int_0^h dF(y) = \int_0^h \rho gy \cdot 2\pi r dy = \rho g \cdot 2\pi r \cdot \int_0^h y \cdot dy.$$

Обчислимо інтеграл: $\int_0^h y \cdot dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2}$. Отже:

$$F_2 = \rho g \cdot 2\pi r \cdot \left(\frac{h^2}{2} \right) = \pi \rho g r h^2.$$

Для рівності сил тиску на дно та на бічну стінку: $F_1 = F_2$. Підставляємо знайдені вирази: $\rho g h \pi r^2 = \pi r g r h^2$. Звідси $r = h$. Отже, висота рідини, при якій сила тиску на дно і бічну стінку однакові, дорівнює радіусу посудини: $h = r = 5$ см.

Відповідь: 5 см.

Робота змінної сили

Задача 33. Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05 м, дорівнює 3 Н. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05 м?

Розв'язання. За законом Гука сила F , яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягуванню або стиску, тобто $F = kx$, де x — величина розтягу або стиску, k — коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що $3 = k \cdot 0,05$, тобто $k = 60$, отже, $F = 60x$.

Використовуючи формулу $A = \int_a^b f(x)dx$,

отримаємо

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,075 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь. 0,075 Дж.

Задача 34. Обчислити роботу, необхідну для викачування рідини з вертикальної циліндричної посудини висотою 5 м та радіусом основи 2 м, якщо питома вага рідини 900 кг/м^3 .

Розв'язання. Для обчислення роботи, необхідної для викачування рідини з циліндричної посудини, використаємо інтегральний підхід.

Об'єм малого елемента рідини: $dV = \pi r^2 dh$, де $r = 2$ м — радіус основи, dh — товщина елемента на висоті h .

Маса малого елемента рідини: $dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dh$, де $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$ — густина рідини. Сила, що діє на малий елемент рідини: $dF = g dm = g \rho \pi r^2 dh$, де $g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Робота, необхідна для переміщення цього малого елемента на

висоту h : $dA = dFh = g\rho\pi r^2 h dh$. Загальна робота для викачування всієї рідини: $A = \int_0^5 g\rho\pi r^2 h dh = g\rho\pi r^2 \int_0^5 h dh$.

Обчислення інтегралу: $\int_0^5 h dh = \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^5 = \left(\frac{5^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \left(\frac{25}{2}\right) - \left(\frac{0}{2}\right) = 12,5$.

Підставляючи значення:

$$\begin{aligned} A &= 9,8 \cdot 900 \cdot \pi \cdot (2)^2 \cdot 12,5 = 9,8 \cdot 900 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 12,5 = \\ &= 441000 \cdot \pi \cdot 12,5 = 5512500 \cdot \pi \approx 17321490 \text{ Дж} \approx 17,3 \text{ (МДж)} \end{aligned}$$

Отже, робота, необхідна для викачування рідини, становить приблизно 17,3 МДж.

Відповідь: 17,3 МДж.

Задача 35. Обчислити роботу, яку потрібно виконати для відкачування води із резервуара, який має квадратне дно зі стороною 2 м та глибиною 5 м.

Густина води дорівнює $\rho = \frac{10^3 \text{ кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язання. Значення сили F , що діє на квадратний переріз площею 4 м^2 , визначається вагою шару води, що знаходиться вище цього перерізу. Отже,

$$F(x) = S_{\text{осн.}} \cdot H \cdot \rho g = 4H\rho g = 4\rho g(5 - x), x \notin [0; 5], g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 4\rho g(5 - x) dx = 4\rho g \left(5x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^5 = 4\rho g \left(25 - \frac{25}{2}\right) \approx 50 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \approx \\ &\approx 4,9 \cdot 10^5 \text{ (Дж)} \end{aligned}$$

Відповідь: $A \approx 4,9 \cdot 10^5 \text{ Дж}$.

Задача 36. Сила F , з якою електричний заряд q_1 відштовхує заряд q_2 (заряди одного знаку), що знаходиться від нього на відстані r , виражається формулою $F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$, де k - стала. Визначити роботу сили F при переміщенні заряду q_2 з точки A_1 , яка знаходиться від q_1 , на відстані r_1 , в точку A_2 , яка знаходиться від q_1 , на відстані r_2 , покладаючи, що заряд q_1 , вміщено у точку A_0 , прийняту за початок відліку.

Розв'язання. $A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{q_1 q_2}{r^2} dr = -k q_1 q_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$. Якщо $r_2 \rightarrow \infty$, то $A = k \frac{q_1 q_2}{r_1}$. Якщо $q_2 = 1$, то $A = k \frac{q_1}{r_1}$. Цю величину називають потенціалом поля, що створюється зарядом q_1 .

Задача 37. Температура маси m ідеального газу з молярною масою M змінюється за законом $T = \alpha V^2$, де α — відома стала. Яку роботу виконує газ при збільшенні його об'єму від V_1 до V_2 ? Чому дорівнює зміна внутрішньої енергії газу в цьому процесі? Отримує чи віддає газ тепло в цьому процесі?

Розв'язання. Скористаємося рівнянням стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{M} RT. \text{ Підставимо } T = \alpha V^2 \text{ у рівняння: } P = \frac{m}{MV} RT = \frac{mR\alpha}{M} V.$$

Роботу можна знайти методом інтегрування:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mR\alpha}{M} V dV = \frac{mR\alpha}{2M} (V_2^2 - V_1^2)$$

Для визначення внутрішньої енергії використаємо формулу:

$$U = \frac{3}{2} PV = \frac{3mR\alpha}{2M} V^2.$$

$$\text{Отже, зміна внутрішньої енергії: } \Delta U = \frac{3mR\alpha}{2M} (V_2^2 - V_1^2) = 3A.$$

Згідно з першим законом термодинаміки, теплота, надана тілу в цьому процесі,

$$\text{дорівнює: } Q = \Delta U + A = \frac{2mR\alpha}{M} (V_2^2 - V_1^2) > 0.$$

Отже, газ отримує теплоту.

Обчислення маси неоднорідного стержня

Задача 38. Знайти масу стержня завдовжки 35 см, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(l) = (4l + 3)$ (кг/м).

Розв'язання. Використовуючи формулу $m = \int_{l_1}^{l_2} \rho(l) dl$, отримаємо

$$m = \int_0^{0,35} (4l + 3) dl = (2l^2 + 3l) \Big|_0^{0,35} = 1,295 \approx 1,3 \text{ (кг)}.$$

Відповідь: 1,3 кг.

Обчислення кількості електрики

Задача 39. Протягом 10с величина струму в провіднику змінювалась за законом $I(t)=3t^2 + 2t$ (А). Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Розв'язання. За формулою: $q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ маємо:

$$q = \int_0^{10} (3t^2 + 2t)dt = (t^3 + t^2) \Big|_0^{10} = (10^3 + 10^2) - (0^3 + 0^2) = 1100 \text{ (Кл)}.$$

Відповідь: 1100 Кл.

Задача 40. При зміні температури опір металевих провідників змінюється за законом $R = R_0(1 + 0.002Q)$, де R_0 – опір при 0°C , Q – температура за Цельсієм. Провідник, опір якого при 0°C дорівнює $R_0 = 8$ Ом, рівномірно нагрівається від $Q_1 = 20^\circ$ до $Q_2 = 140^\circ$ протягом 10 хвилин і по ньому протікає струм під напругою $U = 110$ В. Скільки кулонів електрики протече за цей час через провідник?

Розв'язання. За умовою задачі швидкість зміни температури:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{140^\circ - 20^\circ}{600} = 0,2 \left(\frac{\text{град}}{\text{с}} \right).$$

Отже, температура провідника змінюється за законом:

$$Q = Q_1 + 0,2t = 20 + 0,2t.$$

При цьому опір провідника:

$$R = R_0(1 + 0,002Q) = 8 \cdot (1 + 0,002(20 + 0,2t)) = 8,32 + 0,0032t.$$

Струм $I = \frac{U}{R} = \frac{110}{8,32+0,0032t}$. Тоді

$$\begin{aligned} q &= \int_0^{600} I(t)dt = \int_0^{600} \frac{110dt}{8,32 + 0,0032t} = \frac{110}{0,0032} \ln(8,32 + 0,0032t) \Big|_0^{600} \approx \\ &\approx 34375 \cdot \left(\ln 10,24 - \frac{\ln 8}{32} \right) \approx 34375 \ln 1,23 \approx 7116 \text{ (Кл)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $q = 7116$ Кл.

Сила пружності

Задача 41. До стелі ліфта, що вільно падає, прикріплено пружину з важком. Важок не коливається. Знайти максимальне значення сили пружності при миттєвій зупинці ліфта, якщо безпосередньо перед зупинкою ліфта сума

потенціальної енергії важка дорівнювала 40 Дж. Коефіцієнт жорсткості пружини 500 Н/м. Тертям та масою пружини знехтувати. Потенціальну енергію сили пружності і сили тяги відраховувати від положення максимального розтягування пружини.

Розв'язання. Згідно з формулою для роботи рівнодійної сили:

$$E_k - E_{k_0} = A_{mg} - A_{\text{пружн}}.$$

Так, як $A_{\text{пружн}} = mgx_{\text{max}} = E_{\text{п}_0}$ тобто, початковій потенціальній енергії важка,

$$\text{а } A_{\text{пружн}} = \int_0^{x_{\text{max}}} kx \, dx = \frac{kx_{\text{max}}^2}{2} = \frac{F_{\text{пружн}}^2}{2k}.$$

Тоді маємо: $-E_{k_0} = E_{\text{п}_0} = \frac{F_{\text{пружн}}^2}{2k}$, тобто повна енергія:

$$E_{\text{повн}} = E_{k_0} + E_{\text{п}_0} = \frac{F_{\text{пружн}}^2}{2k}.$$

$$\text{Звідси: } F_{\text{пружн}} = \sqrt{2kE_{\text{повн}}} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 500} = 200 \text{ Н.}$$

Відповідь: $F_{\text{пружн}} = 200 \text{ Н.}$

Обчислення тепла, поглинутого газом у термодинамічному циклі

Задача 42. Над $\nu = 2$ молями ідеального газу здійснюється цикл 1234 (див. рис. 3.1), який складається із двох ізобар (1-2 при тиску $P_1 = 100$ кПа, та 3-4 при тиску $P_3 = 272$ кПа) та двох ізотерм (2-3 при температурі $T_2 = 700$ К, та 4-1 при температурі $T_1 = 300$ К). Знайти теплоту, яку газ поглинає за цикл.

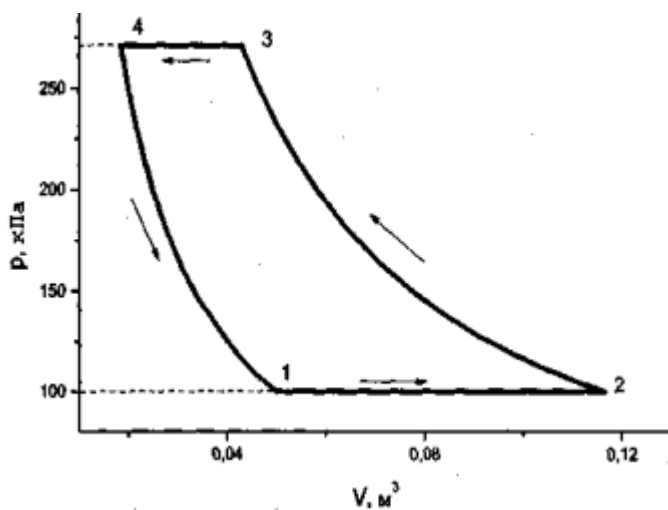


Рис. 3.1

Розв'язання. Згідно з першим законом термодинаміки: $Q = \Delta U + A$.

В коловому процесі зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю, отже $Q = A$. На

ізобарах 12 і 34 робота дорівнює: $A_{12} = P_1(V_2 - V_1)$, $A_{34} = P_3(V_4 - V_3)$, або, враховуючи рівняння стану в точках 1234:

$$P_1 V_1 = P_3 V_4 = \nu RT_1,$$

$$P_1 V_2 = P_3 V_3 = \nu RT_2.$$

Отримуємо: $A_{12} + A_{34} = 0$.

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} P dV = \nu RT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = \nu RT_2 \ln \frac{P_1}{P_3},$$

Аналогічно, $A_{41} = \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = \nu RT_1 \ln \frac{P_3}{P_1}$.

Загальна робота за цикл: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$.

Отже, $Q = \nu R(T_2 - T_1) \ln \frac{P_1}{P_3} < 0$.

Підстановка даних із умови задачі дає $Q = -6,64$ кДж, теплота віддається, а не поглинається, тобто, в цьому циклі теплова машина працює як холодильник.

Відповідь: $Q = -6,64$ кДж.

Аналіз електромагнітних коливань в колі з конденсатором і котушкою індуктивності

Задача 43. Заряджений конденсатор ємності C замкнений на котушку індуктивності L . Знайти таку залежність від часу ємності конденсатора, при якій струм у колі збільшується прямо пропорційно часу. Електричним опором кола знехтувати.

Розв'язання. За законом Фарадея: $|E| = LI = \frac{LI}{t} = \text{const}$, так як за умовою задачі струм у колі збільшується прямо пропорційно часу: $I \approx t$. Отже, і напруга на конденсаторі, що дорівнює напрузі на котушці в будь-який момент часу, теж залишається сталою:

$$U_c = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - q}{C},$$

де q_0 — початковий заряд на конденсаторі, q — заряд, який стік із обкладок конденсатора за час t , а C — ємність конденсатора в момент t . З рівності $\frac{LI}{t} = \frac{q_0}{C_0}$ знаходимо струм: $I = \frac{q_0 t}{LC_0}$.

Тоді повний заряд, що стікає з конденсатора за час дорівнює

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt = \frac{q_0 t^2}{2LC_0}.$$

Підставивши цей вираз для заряду у формулу, отримаємо

$$C = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2LC_0} \right).$$

Зазначимо, що ця відповідність буде правильною за умови, що $q < q_0$.

Обчислення магнітного потоку

Задача 44. Магнітне поле створюється провідником зі струмом, сила якого 50 А. У полі розміщена рамка. Так що дві великі сторони довжиною 65 см паралельні провіднику, а відстань від провідника до найближчої сторони рівна її ширині. Який магнітний потік пронизує рамку?

Розв'язання. Магнітна індукція поля провідника визначається за законом Біо-Савара-Лапласа: $B(r) = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}$, де r — найкоротша відстань від провідника до точки поля. Магнітний потік, що пронизує рамку, визначається як: $\Phi = \int B(r) dA$, де dA — елементарна площа рамки, через яку проходить магнітне поле. У даному випадку, враховуючи, що магнітне поле змінюється з відстанню від провідника, пронизуючу площу рамки можна розбити на вертикальні смужки, перпендикулярні провіднику.

Елементарна площа $dA = l dr$, де dr — ширина смужки на відстані r від провідника. Таким чином, потік через рамку:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_a^{2a} B(r) \cdot l dr = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r} \cdot l dr = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \ln \frac{2a}{a}, \\ \Phi &= \frac{\mu_0 \mu I l}{2\pi} \ln 2. \end{aligned}$$

Підставивши відповідні дані з умови задачі, отримаємо значення магнітного потоку 4,5 мкВб.

Відповідь: $\Phi = 4,5$ мкВб.

3.4. Проєкт "Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики"

Інтегральне числення є одним із ключових математичних інструментів, який широко використовується в економіці для моделювання та аналізу різних процесів. Проєкт "Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики", створений у програмі Prezi (Додаток Д), присвячений дослідженню застосування визначеного інтегралу для розв'язання основних економічних задач. У рамках проєкту розглядаються такі поняття, як попит, пропозиція, ринкова рівновага, споживацький надлишок, дисконтований дохід та коефіцієнт Джині, що характеризує нерівномірність розподілу доходів. На конкретних прикладах демонструється, як інтеграли допомагають оцінити обсяг продукції, витрати, прибуток та інші показники, необхідні для прийняття економічних рішень. Такий підхід дозволяє зрозуміти не лише теоретичні основи економічного аналізу, але й застосувати їх у практичних задачах для кращого розуміння реальних економічних процесів.

Учні можуть працювати з проєктом "Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики" як з інтерактивним навчальним матеріалом, що поєднує теоретичний та практичний аспекти економіки з використанням інтегралів.

На початковому етапі учні ознайомляться з базовими економічними поняттями (попит, пропозиція, споживацький надлишок, коефіцієнт Джині тощо) та основами інтегрального числення. Вони будуть мати змогу переглядати пояснення та приклади, де кожне поняття пояснюється з позиції інтегрального підходу.

Враховуючи інтереси та рівень підготовки, здобувачі освіти можуть обирати різні задачі з економічного змісту, представлені у проєкті, наприклад, розрахунок надлишку споживача, обсягу продукції, або коефіцієнта Джині.

Також можна розв'язувати задачі самостійно або в групах, використовуючи інтеграли для обчислення конкретних економічних показників. Це допоможе краще зрозуміти, як математика працює в реальних економічних умовах.

У проєкті представлені основні економічні задачі, які використовують визначений інтеграл: визначення загального обсягу випущеної продукції, визначення коефіцієнта Джині, дисконтованого значення грошових доходів, розрахунок надлишку виробника та надлишку споживача.

Задача 45. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою $f(t) = (1 + t)e^{3t}$.

Розв'язання. Якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t , то

$U = \int_0^T f(t)dt$ — обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$;

$U = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ — обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1; t_2]$.

Отже, обсяг виробленої продукції дорівнює

$$U = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + t \\ dv = e^{3t} dt, \quad v = \int e^{3t} dt = \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t} \end{array} \right| = \\ &= (t + 1)\frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} dt = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{5}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}(e^{12} - 1) = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2,53 \cdot 10^5. \end{aligned}$$

Відповідь: $2,53 \cdot 10^5$ ум. одиниць.

Задача 46. За даними досліджень у розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = x^3$, де x — частка населення, y — частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині.

Розв'язання. Обчислимо відношення площі сегмента OAf до площі трикутника OAB , тобто коефіцієнт Джині (див. рис. 3.2):

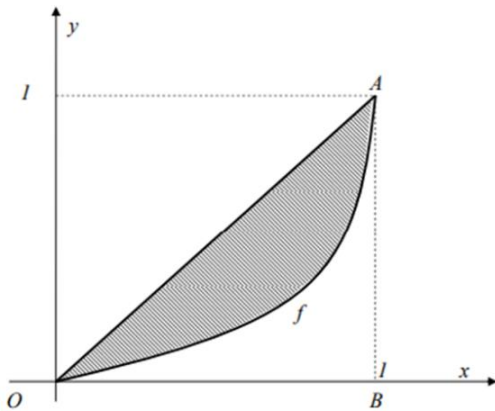


Рис. 3.2 Графічна інтерпретація розподілу доходів

$$K = \frac{S_{Oaf}}{S_{OAB}} = \frac{S_{OAB} - S_{OfAB}}{S_{OAB}} = \frac{S_{OAB}}{S_{OAB}} - \frac{S_{OfAB}}{S_{OAB}} = 1 - 2S_{OfAB}.$$

Згідно з геометричним змістом визначеного інтеграла отримаємо:

$$S_{OfAB} = \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$\text{Тоді } K = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5.$$

Відповідь: $K = 0,5$, тобто розподіл доходів вважають нерівномірним.

Задача 47 [76]. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t) = -t^2 + 5t + 6$. Знайти: а) обсяг продукції, що випускається за час $[0, 3]$; б) середнє значення продуктивності за час $[0, 3]$ і моменти часу t_0 та t_1 , у які досягаються середнє і максимальне значення продуктивності; в) результат пояснити графічно.

Розв'язання: а) обсяг продукції, що випускається за час $[0, T]$, обчислюється за формулою: $U = \int_0^T f(t)dt$. Тому

$$U = \int_0^3 (-t^2 + 5t + 6)dt = \left(\frac{-t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 6t \right) \Big|_0^3 = \frac{-27}{3} + \frac{5 \cdot 9}{2} + 6 \cdot 3 - 0 = \frac{63}{2} = 31,5;$$

б) середнє значення продуктивності за час $[0, T]$ обчислюється за формулою:

$$F(c) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt.$$

$$\text{Тому } f_{\text{сер}} = \frac{1}{3} \int_0^3 (-t^2 + 5t + 6)dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{2} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Щоб знайти момент часу t_0 , у який досягається середнє значення продуктивності, розв'яжемо рівняння:

$$f(t) = \frac{21}{2} \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = \frac{63}{6}.$$

Звідки $t_{0_1} = \frac{10-\sqrt{28}}{4} \approx 1,1$; $t_{0_2} = \frac{10+\sqrt{28}}{4} \approx 3,8 \notin [0, 3]$.

Щоб знайти момент часу t_1 , у який досягається максимальне значення продуктивності, знайдемо вершину параболи: $f(t) = -t^2 + 5t + 6$. Максимальне значення досягатиметься саме у вершині, тому що вітки параболи спрямовані вниз: $t_1 = t_b = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = 2,5$.

в) для побудови параболи знайдемо координати вершини:

$$f(t_b) = f(2,5) = -(2,5)^2 + 5 \cdot 2,5 + 6 = 12,25.$$

Отже, вершина параболи знаходиться в точці $(2,5; 12,25)$. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ot : $-t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_{0_1} = -1, t_{0_2} = 6$.

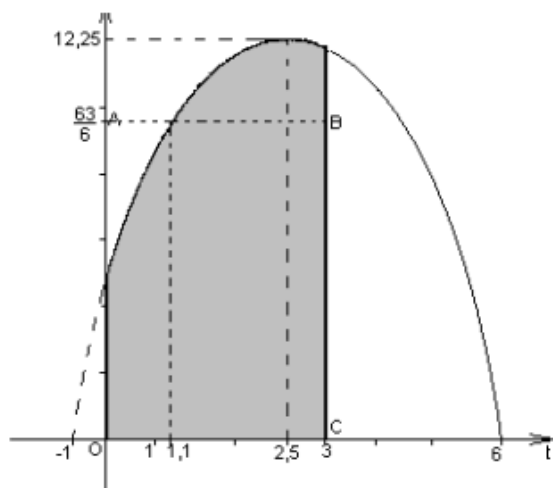


Рис. 3.3

Графічно видно (рис. 3.3), що площа заштрихованої фігури, яка виражає обсяг продукції, що випускається за 3 години, дорівнює площі прямокутника, висотою якого є відрізок прямої, що дорівнює середньому значенню продуктивності праці за перші 3 години роботи.

Відповідь: а) обсяг продукції $U = 31,5$; б) середнє значення продуктивності $f_{\text{сер}} = 10,5$ в момент часу $t_0 \approx 1,1$, максимальне значення в момент часу $t_1 = 2,5$.

Задача 48 [76]. Знайти середнє значення витрат $K = 3x^2 + 5x + 2$, якщо обсяг продукції x змінюється від 1 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

Розв'язання. Середнє значення витрат, якщо обсяг продукції x змінюється від m до n одиниць, обчислюється за формулою:

$$l = \frac{1}{n - m} \int_m^n K(x) dx,$$

$$l = \frac{1}{3 - 1} \int_1^3 (3x^2 + 5x + 2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(3 \cdot 27)}{3} + \frac{(5 \cdot 9)}{2} + 2 \cdot 3 - \left(\frac{3}{3} + \frac{5}{2} + 2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [27 + 22,5 + 6 - (1 + 2,5 + 2)] = 25.$$

Щоб знайти обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення, розв'яжемо рівняння: $K(x) = l \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 25$.

Звідки отримаємо:

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{301}}{6} \approx -3,72 \notin [1; 3],$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{301}}{6} \approx 2,06.$$

Відповідь: середнє значення $l = 25$ при обсязі $x \approx 2,06$.

Задача 49. Визначити дисконтований дохід K за 5 роки при процентній ставці $P = 7\%$, коли початкові капіталовкладення становили 14 тис. грн, і щорічно намагаються збільшувати капіталовкладення на 1 тис. грн.
Розв'язання. Введемо функцію $f(t) = N + mt$, де N — початкові капіталовкладення, m — сума, на яку намагаються щорічно збільшувати капіталовкладення. Тобто $f(t) = 14 + t$. Дисконтований дохід за час T визначається за формулою:

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt, \text{ де } i = \frac{P}{100} = \frac{7}{100} = 0,07. \text{ Тоді}$$

$$K = \int_0^5 (14 + t) e^{-0,07t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = 14 + t, & dv = e^{-0,07t} dt \\ du = dt, & v = -\frac{1}{0,07} e^{-0,07t} \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= (14 + t) \left(\frac{1}{-0,07} \right) e^{-0,07t} \Big|_0^5 - \int_0^5 \frac{1}{-0,07} e^{-0,07t} dt = \\
&= (14 + t) \left(\frac{1}{-0,07} \right) e^{-0,07t} \Big|_0^5 - \frac{1}{(-0,07)^2} e^{-0,07t} \Big|_0^5 = \\
&= \left((14 + 5) \left(\frac{1}{-0,07} \right) e^{-0,35} - (14 + 0) \left(\frac{1}{-0,07} \right) e^0 \right) + \frac{1}{0,07^2} (1 - e^{-0,35}) \approx \\
&\approx 69,8 \text{ тис. грн.}
\end{aligned}$$

Відповідь: $K \approx 69,8$ тис. грн.

Задача 50. Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = 4 - q^2$, де q - кількість товару (у шт.), p - ціна одиниці товару, а рівновага на ринку даного товару досягається при $p = q = 1$. Визначити споживчий надлишок (CS).

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
CS &= \int_0^q f(q) dq - pq = \int_0^1 (4 - q^2) dq - 1 \cdot 1 = \\
&= \left(4q - \frac{q^3}{3} \right) \Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3} \text{ (грн.)}.
\end{aligned}$$

Відповідь: споживчий надлишок дорівнює $2\frac{2}{3}$ грн.

Очікувані результати роботи з проєктом:

1. Розуміння економічних процесів: Учні зрозуміють, як математичні методи допомагають аналізувати економічні процеси на практиці. Це допоможе їм не лише засвоїти новий матеріал, а й побачити, як знання математики може застосовуватися для вирішення реальних проблем.

2. Навички роботи з інтегралами: Учні вдосконалять свої вміння розв'язувати задачі з використанням визначених інтегралів, що є корисним не лише для економіки, а й для інших галузей науки.

3. Розвиток аналітичного мислення: Розв'язуючи практичні задачі, учні навчаться робити математичний аналіз та формувати економічні висновки, що розвиватиме їхнє критичне мислення.

4. Підвищення інтересу до предметів: Робота з реальними прикладами на основі інтегралів зробить уроки більш цікавими та мотиваційними, що може зацікавити учнів вивченням математики та економіки.

Цей проєкт може стати корисним інструментом як для учнів, так і для вчителів, допомагаючи ефективно вивчати взаємозв'язок між математикою та економікою.

Висновки до розділу 3.

У третьому розділі дипломної роботи було досліджено прикладну спрямованість теми «Інтеграл» через призму STEM-освіти. Було розглянуто проєкт «Інтеграл та його застосування», створений учнями, який показав, що інтеграли можуть використовуватися як інструмент для вирішення реальних задач у навчальному процесі. Цей проєкт демонструє практичне застосування теоретичних знань учнями та сприяє розвитку їхньої компетентності у STEM-дисциплінах.

У межах цього розділу було запропоновано ще два проєкти: перший зосереджений на математичному моделюванні фізичних процесів за допомогою інтегралів, а другий – на використанні інтегрального аналізу в економіці. Результати розділу демонструють практичний потенціал інтегралів у вирішенні різноманітних завдань і підкреслюють важливість проєктної діяльності для формування в учнів навичок застосування теорії на практиці.

Наведені прикладні задачі у цьому розділі відображають взаємодію між математикою та іншими науками. Включення міждисциплінарних задач підкреслює роль математики як універсальної мови для опису та аналізу природничих і соціально-економічних явищ, показуючи її важливість у сучасному світі.

Отже, третій розділ підкреслює необхідність інтеграції теорії та практики через STEM-підходи, а також показує ефективність проєктної діяльності в процесі навчання математики.

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження підтверджено, що прикладна спрямованість навчання теми «Інтеграл та його застосування» відіграє ключову роль у підвищенні якості математичної освіти у старшій школі. Визначено, що інтеграл, як один із фундаментальних інструментів математичного аналізу, має широкий спектр застосувань у природничих і технічних науках, що робить його важливим елементом навчальної програми.

У ході дослідження була виконана робота, спрямована на розробку методичних підходів до вивчення інтегралів і їх застосування в освітньому процесі старшої школи, з особливим акцентом на їхнє прикладне застосування та міждисциплінарні зв'язки. У межах дипломної роботи наведено розв'язки 50 задач, що ілюструють застосування інтегралів у різних галузях та доповнюють теоретичний матеріал практичними прикладами.

Проведений аналіз літератури, розробка й апробація навчальних матеріалів, дозволили сформулювати такі ключові висновки:

1. Теоретичні аспекти навчання інтегралів є важливим компонентом у процесі математичної підготовки учнів. Ознайомлення із концептуальною основою інтегралів, їх історичним розвитком та різноманітністю методів обчислення дозволяє учням розуміти зв'язок теоретичних знань із практичними завданнями та побудувати цілісне уявлення про роль інтегралів у математичному аналізі.

2. Актуальність прикладної спрямованості у вивченні інтегралів підтверджується широким застосуванням інтегралів у різних сферах. Використання інтегралів у фізиці, економіці, інженерії та інших галузях показало, що інтеграл не є суто теоретичним поняттям, а слугує важливим інструментом для вирішення практичних завдань, таких як обчислення фізичних величин, аналіз економічних показників тощо.

3. Інноваційні підходи до навчання інтегралів з використанням прикладної спрямованості виявилися ефективними для підвищення мотивації

учнів. Розроблені методичні рекомендації та навчальні матеріали, що включали завдання з реальними прикладами, сприяли зацікавленості учнів у вивченні інтегралів і покращили їхню здатність розуміти та застосовувати математичні методи.

4. Впровадження експериментального навчання на базі розроблених матеріалів показало позитивні результати, а також підтвердили свою дієвість у підвищенні ефективності навчального процесу. Використання проєктного підходу, інтерактивних завдань та інноваційних матеріалів у процесі експериментального навчання сприяло кращому засвоєнню знань. Спостереження за процесом навчання та аналіз результатів експерименту підтвердили, що учні, які вивчали інтеграли з акцентом на прикладне застосування, демонстрували вищий рівень розуміння і кращі практичні навички у розв'язуванні прикладних задач порівняно з учнями, які навчалися за стандартною методикою.

5. Інтеграція математичної освіти з іншими предметами сприяла більш комплексному підходу до вивчення математики. Завдяки міжпредметним зв'язкам учні краще розуміли взаємозв'язок між математичними знаннями та їх застосуванням у фізиці, економіці, технічних науках, що підвищувало практичну значущість отриманих знань.

Основні результати дослідження:

1. Аналіз теоретичних основ теми інтегралів дозволив окреслити основні поняття, історичний розвиток, властивості та методи обчислення інтегралів, що є необхідним підґрунтям для їх подальшого вивчення. У проєкті «Інтеграл та його застосування» учні досліджували історію розвитку інтегралів, розглядали базові концепти та методи обчислення, що дало їм змогу глибше зрозуміти значення цього поняття для сучасної математики.

2. Прикладна спрямованість у навчанні інтегралів підтвердила свою ефективність завдяки залученню учнів до розв'язання практичних задач з різних сфер. Включення прикладних задач із фізики, хімії, екології та економіки у першому проєкті дозволило учням побачити інтеграли як інструмент для

вирішення реальних проблем. Це не тільки підвищило мотивацію до вивчення математики, але й розширило їхній світогляд щодо практичної значущості отриманих знань.

3. STEM-орієнтований підхід сприяв кращій інтеграції математичних знань із природничими науками. Проєкт «Інтеграл та його застосування» також став засобом реалізації STEM-освіти, оскільки поєднував інтеграли з конкретними задачами з фізики, хімії, екології та економіки. Таким чином, учні змогли побачити зв'язок між математикою та іншими науками, що сприяло формуванню міждисциплінарних компетентностей і розумінню ролі математики у вирішенні комплексних задач. Впровадження STEM-освіти в навчання інтегралів продемонструвало свою ефективність у поєднанні теоретичних знань з практичними застосуваннями, сприяючи розвитку в учнів аналітичного мислення, креативності та вміння працювати над реальними проєктами. Проєктна діяльність учнів довела свою корисність у формуванні навичок самостійної роботи, критичного мислення та здатності до інтеграції знань з різних галузей.

4. Поглиблене застосування інтегралів у фізиці та економіці показало, що математика є універсальним засобом для опису процесів у різних галузях. У проєкті «Математичне моделювання фізичних процесів» були розглянуті фізичні задачі, які потребують застосування інтегралів для моделювання реальних фізичних явищ. Завдяки цьому учні отримали уявлення про те, як інтеграли використовуються для опису руху, роботи сил, і розрахунків енергії, що є важливими аспектами у фізиці.

5. Економічне застосування інтегралів було висвітлено у проєкті «Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики». Розроблений проєкт демонструє, як за допомогою інтегралів можна аналізувати економічні показники, такі як прибуток, витрати та інші фінансові індикатори. Даний матеріал можна використовувати на уроках чи відкритих заняттях з метою ознайомлення учнів з фінансовими розрахунками та економічним прогнозуванням.

6. Розроблені методичні рекомендації та навчальні матеріали сприяли ефективнішому засвоєнню теми. Експериментальне навчання продемонструвало підвищення мотивації та кращі результати учнів у розумінні як теоретичних, так і практичних аспектів інтегралів.

Результати дослідження були впроваджені в освітній процес Солотвинського ліцею. На основі науково-дослідної роботи на тему «Прикладна спрямованість навчання теми: Інтеграл та його застосування», розроблено математичний проєкт, який отримав схвалення та був рекомендований до використання. Акт впровадження результатів роботи (Додаток А) підтверджує можливість застосування матеріалів дослідження для проведення комбінованих уроків з алгебри в 11 класі.

Проведене дослідження показало, що використання прикладної спрямованості в навчанні інтегралів є не лише дієвим інструментом для підвищення зацікавленості учнів, але й засобом підготовки їх до реальних викликів, які вони можуть зустріти у професійній діяльності. Розроблені методичні рекомендації та проєкти можуть бути використані для вдосконалення процесу викладання інтегралів у старшій школі, а також для стимулювання розвитку STEM-навичок у здобувачів освіти.

Прикладна спрямованість навчання теми «Інтеграл та його застосування» є не лише актуальною, але й необхідною умовою для вдосконалення математичної підготовки сучасних фахівців. Впровадження інтерактивних методів навчання, STEM-підходів та проєктної діяльності допомагає формувати у здобувачів освіти стійкі знання та навички, які можна застосовувати в різних галузях науки і техніки. Перспективними напрямками подальших досліджень є вдосконалення методик викладання інтегралів, а також інтеграція новітніх технологій та цифрових інструментів у навчальний процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алілуйко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілуйко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. Тернопіль: ТНЕУ, 2017. 148 с.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011. 480 с.
3. Банарик Н. Б. У пошуках моделі інтегрованого уроку // Всесвітня література. 1997. №7. С. 11.
4. Бевз В. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія / В. Бевз. К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. 360 с.
5. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: Навч. посіб. для студентів фіз.-мат. факультетів пед. університетів / В. Г. Бевз. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. 312 с.
6. Бевз В. Міжпредметні зв'язки як необхідний елемент предметної системи навчання.// Математика в школі 2003. №6. С. 11–15.
7. Бевз Г. П. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Видавничий дім «Освіта», 2018. 288 с.
8. Бевз Г. П. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Видавничий дім «Освіта», 2019. 272 с.
9. Беседін Б.Б., Бабенко Н.О. Міжпредметні зв'язки на уроках математики Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ Випуск №9, 2019
10. Бех І. Інтеграція як освітня перспектива // Початкова школа. 2002. №5. С. 5-6.
11. Бицюра Ю. Інтегрована система навчання // Завуч (Перше вересня). 2002. №16. С. 10-11.
12. Бич О.В. Застосування інформаційних технологій при вивченні

математики / О.В. Бич Кривий Ріг, 2003.

13. Бродський Я. Компетентнісний підхід у навчанні математики / Я. Бродський, С. Великодний, О. Павлов // Математика в школі. 2011. №10. С. 2–9.

14. Васильєва Д. В., Вашуленко О. П., Волошена В. В. Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту : методичний посібник. [Електронне видання]. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. 175 с.

15. Використання елементів STEM-освіти на уроках математики. Збірник матеріалів роботи творчої групи викладачів математики. Рівне: НМЦ ПТО, 2019. 95 с.

16. Вища математика: підручник / Домбровський В. А., Крижанівський І. М., Мацьків Р. С., Мигович Ф. М., Неміш В. М., Окрепкий Б. С., Хома Г. П., Шелестовська М. Я.; за редакцією Шинкарика М. І. Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003. 480 с.

17. Вища освіта України // Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». 2011. Дод. 2 до № 3. Т. II (27). 562 с.

18. Вольянська С.Є. STEM-освіта / С.Є. Вольянська // Довідник сучасного педагога.-Х.: Вид.група «Основа», 2016. С.124-125.

19. Глобін О.І. Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики: методичний посібник для вчителів/ Глобін О. І. К.: Педагогічна думка, 2012. 88 с.

20. Глобін О. І. Концепція реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики в основній школі [Електронний ресурс] / О. І. Глобін, М. І. Бурда // Математика в рідній школі. 2015. Режим доступу до ресурсу: <http://www.undip.org.ua/info/3391/>

21. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: У 3ч.: Навч. Посіб./ В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. Ч.1. 578с., 2010. Ч.2. 470с., 2009. Ч.3. 400с.

22. Головань М. С. Математичні компетентності чи математична компетентність? / М.С. Головань // Розвиток інтелектуальних вмінь і творчих

здібностей учнів та студентів у процесі навчання природничоматематичного циклу «ІТМ*плюс – м. Суми) : У 3-х частинах. Частина 1 / Упорядник Чашечникова О.С. Суми: Мрія, 2012. С. 36-38.

23. Грималюк В.П. Вища математика: У 2ч.: Навч.посіб./ В.П. Грималюк, М. М. Кухарчук, В.В. Ясінський. К.: Віпол, 2004. Ч.1. 376с., 2005. Ч.2. 376 с.

24. Горбань М. Систематизація знань учнів на основі міжпредметних зв'язків // Фізика та астрономія в школі. 1999. №2. С. 21-22.

25. Дейніченко Т.І., Водолазька К.С. Елементи інтегрального числення: історичний аспект. Наумовські читання : зб. тез доповідей XVIII наук. конф. студентів та молодих учених : (24-25 листоп. 2020 р., м. Харків) / ХНПУ імені Г.С. Сковороди. Харків : ХНПУ, 2020. С. 77-79.

26. Дейніченко, Т., Липовий, В., Величко, Г., Усиченко, О. Елементи інтегрального числення та його використання в курсі алгебри і початків аналізу / за заг. ред. О. А. Жерновникової. Харків: Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, 2024. 95–99 с.

27. Демченко, Ю. М., Кравченко, В. Історія становлення математики і розвиток її як науки / Юлія Миколаївна Демченко, Валерія Кравченко // Збірник наукових праць «Актуальні проблеми дошкільної та початкової освіти». Харків, 2019. №2. С. 41–54

28. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. 2018. Режим доступу до ресурсу: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п>

29. Дубовик В.П. Вища математика. Начальний посібник. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик / Навч. посіб. К.: Вища шк., 1993. 648 с. 8. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач/ В.П. Дубовик, І.І. Юрик / Навч. посіб. К.: А.С.К., 2005. 648 с.

30. Еврика – XXV. Збірник студентських наукових праць. Електронне видання. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2024. 365 с.

31. Зіненко І. М. Визначення структури математичної компетентності учнів старшого шкільного віку / І. М. Зіненко // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2009. №2. С. 165-174.
32. Істер О. С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. Київ : Генеза, 2018. 384 с.
33. Істер О. С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. Київ : Генеза, 2019. 304 с.
34. Істер О. С., Єргіна О. Алгебра і початки аналізу: (профільний рівень): підручник для 11-го класу закладів загальної середньої освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ: Генеза, 2019. 416 с.
35. Капіруліна С. Міжпредметні зв'язки на уроках географії в модульно-розвивальній системі навчання // Географія та основи екології. 2002. №3. С. 14-17.
36. Карпінська І.Н. Нестандартні уроки з математики / І.Н. Карпінська Тернопіль, 2000. 48 с.
37. Карпова Л.Б. Навчальні та інноваційні навички ХХІ століття / Л.Б. Карпова // Фізика в школах України. 2013. №7. с.22-24.
38. Конфорович А. Г. і Андрієвська Г. М. Історія розвитку математики. Київ, Україна: Вища школа, 1980.
39. Кирдей І.Д. Використання інформаційних технологій на уроках математики / І.Д. Кирдей, 2006. 27–29 с.
40. Кириленко С. Поліфункціональний урок у системі STEM-освіти: теоретико-методологічні та методичні сегменти / С. Кириленко, О. Кіян // Рідна школа. 2016. №4. с.50-54.
41. Кнорр Н. Інтегроване вивчення фізики в класах природничого профілю // Фізика та астрономія в школі. 1999. №1. С. 2-5.
42. Коваленко О. STEM-освіта: досвід упровадження в країнах ЄС та США / О. Коваленко, О. Сапрунова // Рідна школа. 2016. №4. с.46-49.

43. Ковалець Н. М. Застосування інтегрального числення до розв'язування прикладних задач: матеріали LIV Міжнародної інтернет - конференції [«Інновації науки XXI»], м. Київ, 2 листопада 2020 р. 184 с

44. Козловська О. Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. Розвиток життєвої компетентності школярів / О. Козловська Математика, №3. 2008.

45. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О.І.Глобін, М.І. Бурда, Д.В. Васильєва, В.В. Волошена, О.П. Вашуленко, Н.Д. Мацько, Т.М. Хмара. К.: Педагогічна думка, 2015. 245с.

46. Корнієнко О.Р. Про актуальність запровадження STEM-навчання в Україні. [Електронний ресурс] / О.Р. Корнієнко. Режим доступу: <http://elenakornienko.blogspot.com/2016/02/stem.html>.

47. Крамаренко Т. Г. Прикладні задачі у навчанні математики: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко, М. В. Михайловська. КДПУ, 2018. 156 с. Режим доступу : <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/>

48. Кулик Г.М., Кушлик-Дивульська О.І., Степаненко Н.В., Ярема Н.П. Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння: навч. посібник для студентів технічних спеціальностей / К.: НТУУ «КПІ». 2016. 278 с.

49. Лісова С.В. Компетентнісний підхід у вищій освіті: зарубіжний досвід / С.В. Лісова // Професійна педагогічна освіта: компетентнісний підхід: монографія / за ред. О.А. Дубасенюк. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2011. С. 34–53.

50. Мальований Ю. До питання про наукові підвалини міжпредметних занять // Всесвітня література в середніх навчальних закладах України. 1997. №7. С. 4.

51. Мерзляк А. Г. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г.

Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х. Гімназія, 2019. 208с.

52. Мерзляк А.Г. Алгебра 11 клас: підручник для загальних навчальних закладів: проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Х. : Гімназія, 2019. 352 с.

53. Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти навчальних України у 2018-2019 навчальному році. (Лист ІЗМО № 22. 1/10-2573 від 19.07.2018 року).

54. Навчальна програма з математики для учнів 10 — 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. [Електронний ресурс]. Режим доступу <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalnaserednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

55. Навчальний посібник «Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» для студентів технічних спеціальностей / Укл. Г.М. Кулик, О.І. Кушлик-Дивульська, Н.В. Степаненко, Н.П. Ярема. К.: НТУУ «КПІ». 2016. 278 с.

56. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 304 с.

57. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків : Вид-во «Ранок», 2019. 240 с.

58. Програма з математики для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (для класів з поглибленим вивченням математики), 2018. 28 с.
URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

59. Проект Концепції STEM-освіти в Україні [Електронний ресурс].mk-kor.at.ua/STEM/ STEM_2017.pdf.

60. Раков С.А. Три виміри логіко-математичної компетентності / С.А. Раков, О.П. Вакушенко, В.Г. Горох // Вісник тестування і моніторинг в освіті. 2009. №12. С. 6–15.

61. Раков С.А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням інформаційних технологій / С.А. Раков. К., 2005. 343 с.

62. Роміцина Л. В. Математична освіта - освіта для життя / Л. В. Роміцина // Житомирщина педагогічна. Електронний науково-методичний журнал.-16.08.2017, № 3(7).

63. Сморжевський Л.О. Задачі з алгебри і початків аналізу: 1001 задача прикладного змісту: 10–11 кл. / Л.О. Сморжевський, П.С. Атаманчук, А.М. Кух. К.: А.С.К., 1999. 135 с.

64. Сморжевський Л.О. Про використання фізичних задач в шкільному курсі математики / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський // Зб. наук. праць Кам.-Под. педуніверситету: Серія педагогічна: Дидактика природознавчо-математичних дисциплін та освітніх технологій, 1999. Вип. 5. С. 193–197

65. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.- метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. Київ: "Тираж", 1997. 127 с.

66. Соколенко Л. О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л. О. Соколенко, Л. Г. Філон, В. О. Швець. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.

67. Соколенко Л.О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: Навч. посібник. Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.

68. Соколенко Л.О. Прикладні аспекти математики: інтеграл та його застосування в класах природничого профілю / Л.О. Соколенко // Вісник ЧНУ ім. Богдана Хмельницького. Сер.: Педагогічні науки. 2010. Вип. 191., Ч.1. С. 111–121.

69. Соколенко Л.О. Прикладні аспекти математики: інтеграл та його застосування в класах природничого профілю // Вісник ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки, 2006, Вип. 42, С. 74-77.

70. Соколенко Л.О. Про підготовку вчителів до навчання математики в старшій профільній школі // Вісник ЧНУ імені Богдана Хмельницького. Серія:

Педагогічні науки, 2010, Вип. 191, Ч.1, С.111-121.

71. Сукач Т.М., Чуйков А.С., Бірюкова Т.В. Застосування визначеного інтеграла у формуванні професійних компетентностей здобувачів вищої та передвищої освіти // Вісник Університету імені Альфреда Нобеля. Серія «Педагогіка і психологія». Педагогічні науки. 2020. № 1 (19).

72. Тевлін Б. Математика на уроках фізики // Фізика та астрономія в школі. 1999. №4. С. 18-23.

73. Ткач Ю.М. Математика. Задачі економічного змісту в математиці: Навчально-методичний посібник / Ю.М. Ткач. Х.: Вид-во "Ранок", 2011. 176с.

74. Третьякова А.І Прикладна спрямованість математики/ А. І. Третьякова Харків: 2006 р. 40 с.

75. Трішкіна Н.І. Сучасні підходи до формування професійних компетенцій фахівців торговельно-економічного профілю / Н.І. Трішкіна // Вісник Університету імені Альфреда Нобеля. Сер. «Педагогіка і психологія». Педагогічні науки. 2015. № 1 (9). С. 144.

76. Шевцов С.О., Грудкіна Н.С. Розв'язання задач з економіки методами математичного аналізу: посібник до практичних занять і самостійної роботи / С.О. Шевцов, Н.С. Грудкіна. Краматорськ: ДДМА, 2019. 55 с.

77. Шкіль М. І., Слєпкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. 2-ге вид. Зодіак-ЕКО, 2001. 656 с.

ДОДАТКИ

Додаток А


УКРАЇНА
СОЛОТВИНСЬКА СЕЛИЩНА РАДА
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКОГО РАЙОНУ ІВАНО-ФРАНКІВСЬКОЇ ОБЛАСТІ
СОЛОТВИНСЬКИЙ ЛІЦЕЙ
 вул. Грушевського, 17, смт. Солотвин, Івано-Франківський район, Івано-Франківська обл., 77753, тел./факс (03471) 41147,
 E-mail: solotvyn@if.ua, код згідно з ЄДРПОУ 23805812

Директор Солотвинського ліцею
 Солотвинської селищної ради
 Івано-Франківського району
 Івано-Франківської області
 Гуменяк М.М.
 15 березня 2024 р.



АКТ
впровадження(використання) результатів
виконаної науково-дослідної роботи
Ковальчук Наталії Богданівни

За матеріалами науково-дослідної роботи Ковальчук Наталії Богданівни на тему «Прикладна спрямованість викладання теми: Інтеграл та його застосування», виконаної у період 12.02.2024 до 06.03.2024 в рамках виконання науково-дослідної теми кафедри математики та інформатики і методики навчання розроблено математичний проєкт «Інтеграл та його застосування». Матеріали науково-дослідної роботи можна використовувати для проведення індивідуального, змішаного та дистанційного навчання учнів старшої школи.

Комісія в складі:

голова комісії : М. М. Гуменяк, директор Солотвинського ліцею

члени комісії :

Н.Г. Максимів , заступник директора з навчально-виховної роботи

Г.М. Гуменяк , вчитель математики

встановили використання в процесі освітньої діяльності Солотвинського ліцею матеріалів науково-дослідної роботи при проведенні комбінованих уроків з алгебри в 11 класі з метою популяризації використання LMS в освітньому процесі.

15 березня 2024 р.

Голова комісії :

М.М. Гуменяк

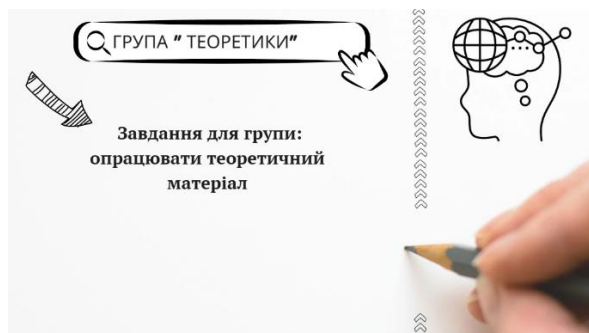
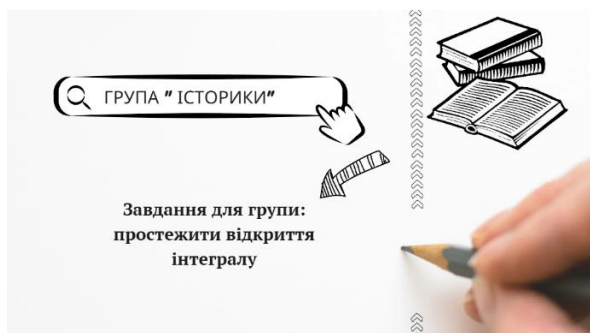
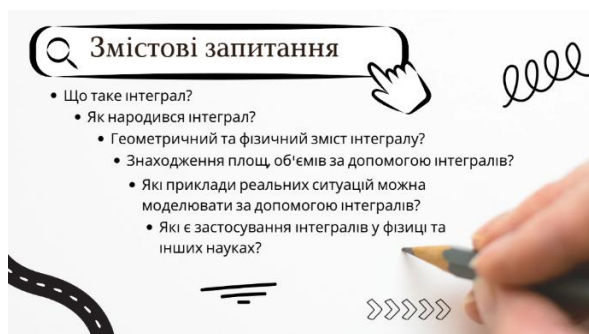
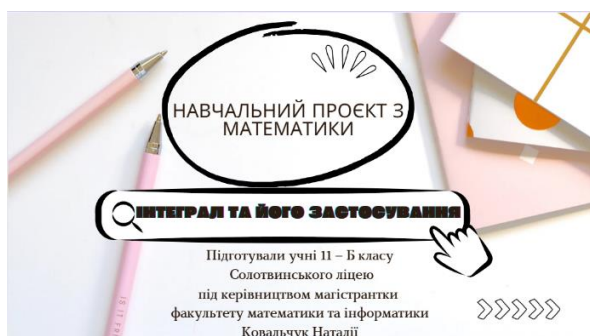
Члени комісії :

Н.Г. Максимів

Г.М. Гуменяк

Додаток Б

Навчальний проєкт з математики «Інтеграл та його застосування»



Продовження додатку Б

ДАВНЬОГРЕЦЬКИХ ВЧЕНИХ ЕВДОКСА КНІДСЬКОГО (БЛ.ЧО8-355 ДО Н.Е.) АРХІМЕДА (БЛ.287-212 ДО Н.Е.)

Історія розвитку понять інтеграла й інтегрального числення пов'язана з потребою в знаходженні площ фігур, а також поверхонь і об'ємів довільних тіл. Передісторія інтегрального числення сягає глибокої давнини: ідеї інтегрального числення можна знайти в роботах



Більш раннє поняття «примітивна функція», введене Ж.Лагранжем, пізніше було замінено на поняття «первісна для функції», що його застосовують і зараз. Позначення визначеного інтеграла увів К.Фур'є.

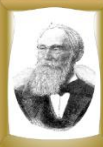
К.Фур'є

Ж.Лагранж




М. Остроградський П. Чебишев В. Буняковський

У XIX ст. методи інтегрального числення активно розвивав Л.Ейлер, також значний внесок зробили російські математики М.В.Остроградський, В.Я.Буняковський та П.Л.Чебишев


ГРУПА "ТЕОРЕТИКИ"

«Світ, що нас оточує – це світ інтегрального і диференціального числення. Тож давайте його пізнавати» Голландський вчений Х. Гюйгенс

Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від а до b еф від ікс де ікс»).

Ща час обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна брати будь-яку з первісних для функції $f(x)$, які в загальному вигляді записують $F(x) + C$. Але $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Тому прийнято застосовувати ту первісну, для якої $C = 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ї називають «формулою Ньютона-Лейбніца».

Математики XVII ст. вчилися на працях Архімеда. Німецький астроном Й.Кеплер застосував подібні методи. Італійський математик Б.Кавальєрі, уявивши кожну фігуру утвореною з відрізка, а тіло із плоских фігур, сформулював принципи, які вважав очевидними й приймав без доведення. Символ $\int$ змінено латинську букву s (summa) – запровадив Г.Лейбніц, слово «інтеграл» – швейцарець Я.Бернуллі.

Я. Бернуллі Й.Кеплер Г. Лейбніц





І. НЬЮТОН

Слід зазначити, що в XVII ст. інтегрального обчислення як такого ще практично не було. Зв'язок між операціями диференціювання й інтегрування, узагальнення ідей, на яких ґрунтуються розв'язання багатьох задач, було знайдено І.Ньютоном і Г.Лейбніцем: незалежно один від одного учені відкрили вираз, відомий зараз як формула Ньютона – Лейбніца



В XX ст. теорія інтегралів була строго викладена в роботах О.Коші, Б.Рімана, Г.Дарбу. Відповіді на низку питань, пов'язаних з обчисленням площ і об'ємів фігур, були отримані разом зі створенням К.Жорданом (1858-1922) теорії міри.

О. Коші

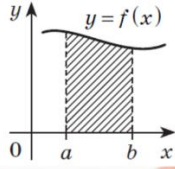


Криволінійна трапеція

Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком безперервної функції $y = f(x)$, що не змінює знак на проміжку $[a; b]$, прямими $x = a$ і $x = b$ і проміжком $[a; b]$ (рис. 2).

Справедливою є така теорема: площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком безперервної й невід'ємної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$, дорівнює $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Значення виразу $F(b) - F(a)$ записують і так: $F(x)|_a^b$.



ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

Задача 2. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Тоді шукана площа

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$


Продовження додатку Б

УЧЕБЬ 3: А ще, значайно, нас, як і вас, турбує подорожання електроенергії. Цікаво, скільки витрачається електроенергії протягом доби на одній теплоелектростанції?

Задача. З інтернету ми дізналися, що навантаження на теплоелектростанцію задається функцією

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2. \text{ Визначити витрати електроенергії протягом доби.}$$

Розв'язання:

$$\int_0^{24} (3x^2 + 4x - 2) dx = [x^3 + 2x^2 - 2x]_0^{24} = 13824 + 576 - 48 = 14343 \text{ (кВт·год)}$$

Відповідь: 14343 кВт·год.

І це тільки на одній станції, уявіть яка кількість електроенергії по всій Україні!

«ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛУ В ФІЗИЦІ»

УЧЕБЬ 4: Раз мова зайшла про електроенергію, то хотілося б сказати, що сила струму в провіднику з часом змінюється за законом $I(t) = t^2 - t + 1$. Яка кількість електрики пройде через поперечний переріз провідника за час від третьої до шостої секунди?

$$q(t) = \int I(t) dt$$

$$q(t) = \int_3^6 (t^2 - t + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_3^6 = (72 - 18 + 6) - (9 - 4.5 + 3) = 52.5 \text{ (Кл)}$$

УЧЕБЬ 5: Фізичний зміст інтегралу полягає в тому, щоб знайти шлях, який долає фізичне матеріальне тіло за певний проміжок часу. Розглянемо одну з задач ЗНО.

Задача. Нехай швидкість тіла v з часом t змінюється за наступним законом: $v = 20 - 3t$. Знайти шлях, що пройшло тіло за четверту секунду свого руху.

Розв'язання:

$$v(t) = s'(t), \text{ тоді}$$

$$s(t) = \int v(t) dt$$

$$s(t) = \int (20 - 3t) dt = 20t - \frac{3}{2}t^2 + C$$

За четверту секунду

$$s(4) = \int_0^4 (20 - 3t) dt = (20t - 1.5t^2) \Big|_0^4 = (80 - 24) - (60 - 13.5) = 56 - 46.5 = 9.5 \text{ (м)}$$

Задача. Спробуємо: 1. Визначити розміри сміттового острова.

2. Знайти площу сміттового острова.

Розв'язання. Оскільки острів не має певної геометричної форми, то можна використати формулу Ньютона - Лейбніца до обчислення площі криволінійної трапеції. Якщо проаналізувати форму острова та течії, які його створили, можна прийти до висновку, що за формою він нагадує трапецію утворену двома параболою, або двома синусоїдами.

УЧЕБЬ 7: Задача №1.

Обчислити площу сміттового острова, якщо він обмежений лініями:

$$y = x^2; y = 2x - x^2; y = 0.$$

(Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ і знайдемо абсциси точок перетину цих графіків із рівняння: $x^2 = 2x - x^2$. Корені цього рівняння: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Дана фігура зображена на рис.



Відповідь: 1 кв. од.

Із рисунка видно, що ця фігура складається з двох криволінійних трапецій: OAB_1 і B_1AC . Отже, шукаємо площу доданою сумі площ цих трапецій:

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (2x - x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1$$

УЧЕБЬ 8: Задача №2.

Обчислити площу (а саме товщину) сміттового острова, якщо він обмежений лініями $y = \sin x$; $y = 2 \sin x$.

$$S = \int_0^{\pi} (2 \sin x - \sin x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1 - 1) = 2 \text{ кв. од.}$$

Бачимо, що проблеми дійсно існують. А чи можливо використати якісь хімічні процеси, щоб змінити дану ситуацію? Це питання до хіміків-біологів...

«ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛУ В ХІМІЇ ТА БІОЛОГІЇ»

УЧЕБЬ 9: Задача. Швидкість зміни концентрації речовини, що вступає в реакцію, виражається функцією $v = 3t - 1$, де t – час (с), v – швидкість (моль/с·м³). Як зміниться концентрація речовини за час $t_1=0$ до $t_2=5$ с?

Розв'язання

Задача розв'язується методом безпосереднього інтегрування. Оскільки

$v(t) = C'(t)$, то $C(t) = \int v(t) dt$ – концентрація речовини і первісна для $v(t)$, тому

$$C(5) - C(0) = \int_0^5 (3t - 1) dt = \left(\frac{3t^2}{2} - t \right) \Big|_0^5 = 42.5 \text{ (моль/м³)}.$$

Тобто, якщо використати таку концентровану речовину, яка б змогла знешкодити цей острів, то це можна було б здійснити за декілька років.

Висновки

Ми переконалися в тому, наскільки багатограним є застосування визначеного інтеграла, а математичні теорії є надійним знаряддям в розкритті таємниць природи, законів економічних, фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів.

*** Сила і загальність методу диференціального й інтегрального числення такі, що не ознайомившись з ними, не можна як слід зрозуміти все значення математики для природознавства і техніки і навіть оцінити всю красу і принадність самої математичної науки.**

А.М.Колмогоров

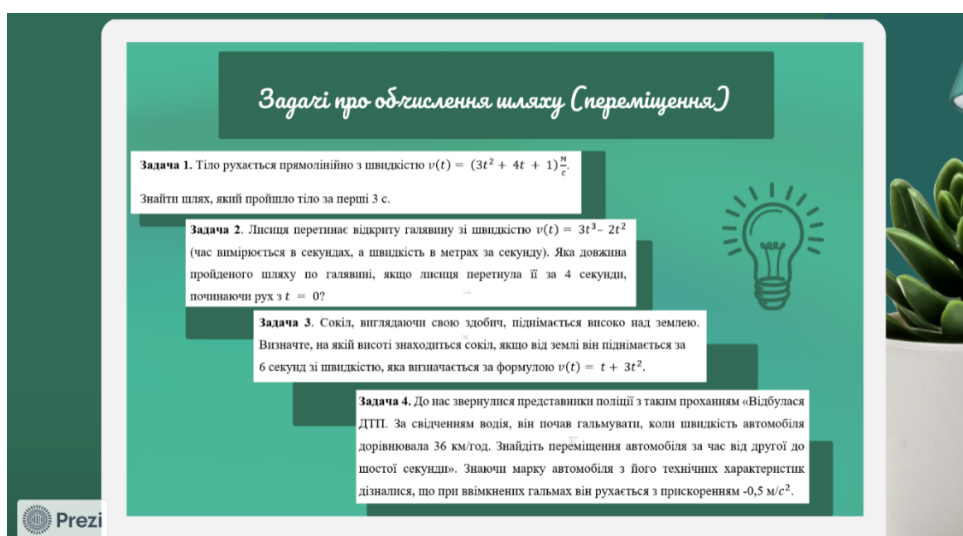
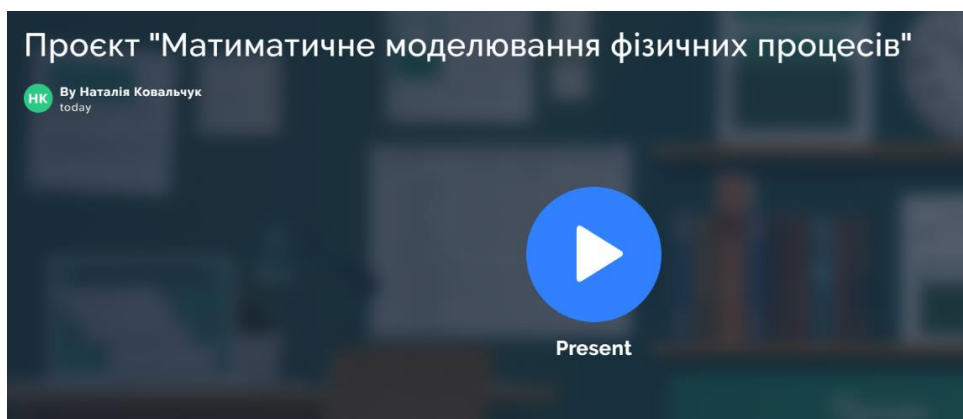
ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ:

• Істер О.С. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Істер О.С., Бртіна О.В. - Київ: Генеза, 2019
• Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, Б.Б. Поліщук та ін. - Харків: Генеза, 2019
• Мелік Е.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти. Е.П. Мелік, О.К. Долгова - Харків: Видво «Ранок», 2019

<https://uk.wikipedia.org/wiki/>

Додаток В

Проект «Математичне моделювання фізичних процесів»



Продовження додатку В

Задачі про силу тиску рідини

Задача 5. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої $0,4 \text{ м}$ та $0,7 \text{ м}$.

Задача 6. При якій висоті h рідини в циліндричній посудині радіусом $r = 5 \text{ см}$ сила тиску на дно посудини та на бічну стінку будуть однаковими?

Задача 5
Висота рідини $h = 0,7 \text{ м}$. Сила тиску $F = 1000 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 196 \text{ Н}$.
Відповідь: 196 Н .

Задача 6
Висота рідини $h = 0,7 \text{ м}$. Сила тиску $F = 1000 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 196 \text{ Н}$.
Відповідь: 196 Н .

Робота змінної сили

Задача 7. Сила пружності пружини, розтягнутій на $0,01 \text{ м}$, дорівнює 3 Н . Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на $0,01 \text{ м}$?

Задача 8. Обчислити роботу, необхідну для витягнення рідини з вертикальної циліндричної посудини висотою 1 м та радіусом дна 1 м , якщо густота рідини 1000 кг/м^3 .

Задача 9. Обчислити роботу, яку потрібно виконати для підняття води із резервуару, який має висоту 2 м та ширину 3 м . Густота води дорівнює $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Задача 10. Сила F , з якою координатний заряд q відхиляється від положення рівноваги, пропорційна відстані x від положення рівноваги. Знайти роботу сили F при переміщенні заряду q з точки A_1 , яка знаходиться від q_0 на відстані x_1 , в точку A_2 , яка знаходиться від q_0 на відстані x_2 , піднявшись, що заряд q , виконавши у точці A_2 , пробіжить на певну відстань.

Задача 11. Температура маси m цинкового металу з теплоємністю M змінюється за законом $T = at^2$, де a — стала. Яку роботу виконує газ при обігріванні його об'ємом V_0 до 10^3 м^3 при постійній тиску p та постійній швидкості v в ширину l ? Обчислити, чи можна газ тільки в ширину притиснути?

Обчислення маси неоднорідного стержня

Задача 12. Знайти масу стержня довжиною 35 см , якщо його лінійна густина змінюється за законом $\rho(l) = (4l + 3) \text{ (кг/м)}$.

Розв'язок. Використовуючи формулу $m = \int_0^L \rho(l) dl$, отримаємо:
 $m = \int_0^{0,35} (4l + 3) dl = (2l^2 + 3l) \Big|_0^{0,35} = 1,295 \approx 1,3 \text{ (кг)}$.
 Відповідь: $1,3 \text{ кг}$.
 Обчислення кількості електрики



Продовження додатку В

Обчислення кількості електрики

Задача 13. Протягом 10с величина струму в провіднику змінювалася за законом $i(t) = 2t^2 + 2t$ (А). Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Розв'язання. За формулою $q = \int_0^t i(t) dt$ маємо:

$$q = \int_0^{10} (2t^2 + 2t) dt = (t^3 + t^2) \Big|_0^{10} = (10^3 + 10^2) - (0^3 + 0^2) = 1100 \text{ (Кл)}.$$

Відповідь: 1100 Кл.

Задача 14. При якій температурі опір металевих провідників залежить за законом $R = R_0(1 + \alpha_0 \Delta T)$, де R_0 – опір при 0°C , α_0 – температурний коефіцієнт. Прямий опір міді при 0°C дорівнює $R_0 = 0,1 \text{ Ом}$, різниця температур між $\theta_1 = 20^\circ\text{C}$ та $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ становить 10 одиниць і що в цьому провіднику струм має напруження $U = 110 \text{ В}$. Складати рівняння енергії протягом за цей час, через провідник?

Розв'язання. За умовою задачі опір міді за певної температури:

$$\frac{dR}{dT} = \frac{100^\circ - 20^\circ}{100 - 20} = 0,2 \left(\frac{\text{Ом}}{^\circ\text{C}} \right).$$

Отже, температура провідника змінюється за законом:

$$R = R_0(1 + \alpha_0 \Delta T) = 0,1(1 + 0,2(100 - 20)) = 0,32 + 0,0812 \Delta T.$$

Скориставшись формулою для роботи електричного струму:

$$A = \int_0^t i^2 R dt = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt = \int_0^t \frac{110^2}{0,32 + 0,0812 \Delta T} dt = \frac{110^2}{0,0812} \ln(0,32 + 0,0812 \Delta T) \Big|_0^{100} = 14275 \left(\ln(0,32 + 8,12) - \ln(0,32) \right) = 14275 \ln(2,52) = 14275 \cdot 0,923 = 13185 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A = 13185 \text{ Дж}$.

Сила пружності

Задача 15. До стелі ліфта, що вільно падає, прикріплено пружину з важком. Важок не коливається. Знайти максимальне значення сили пружності при миттєвій зупинці ліфта, якщо безпосередньо перед зупинкою ліфта сума потенціальної енергії важка дорівнювала 40 Дж. Коефіцієнт жорсткості пружини 500 Н/м. Тертя та масою пружини нехтувати. Потенціальну енергію сили пружності і сили тяги відрахувати від положення максимального розтягнення пружини.

Розв'язання. Згідно з формулою для роботи рівнодійної сили:

$$E_k - E_{k0} = A_{\text{спр}} - A_{\text{тяг}}.$$

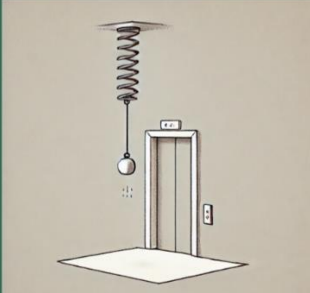
Так, як $A_{\text{спр}} = mgx_{\text{max}} = E_{k0}$, тобто, початковий потенціальний енергії важка, а $A_{\text{тяг}} = \int_0^{x_{\text{max}}} kx dx = \frac{kx_{\text{max}}^2}{2} = \frac{F_{\text{спр}}^2}{2k}$.

Тоді маємо: $-E_{k0} = E_{k0} - \frac{F_{\text{спр}}^2}{2k}$, тобто повна енергія:

$$E_{\text{павн}} = E_{k0} + E_{k0} = \frac{F_{\text{спр}}^2}{2k}.$$

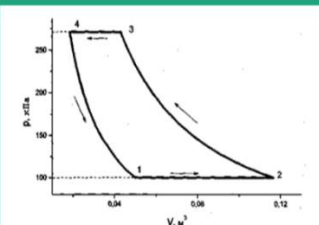
Звідси: $F_{\text{спр}} = \sqrt{2kE_{\text{павн}}} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 500} = 200 \text{ Н}.$

Відповідь: $F_{\text{спр}} = 200 \text{ Н}.$



Обчислення тепла, поглинутого газом у термодинамічному циклі

Задача 16. Над $\nu = 2$ молями ідеального газу здійснюється цикл 1234 (див. рис.1), який складається із двох ізобар (1-2 при тиску $P_1 = 100 \text{ кПа}$, та 3-4 при тиску $P_3 = 272 \text{ кПа}$) та двох ізотерм (2-3 при температурі $T_2 = 700 \text{ К}$, та 4-1 при температурі $T_1 = 300 \text{ К}$). Знайти теплоту, яку газ поглинає за цикл.



Розв'язання. Згідно з першим законом термодинаміки: $Q = \Delta U + A$. В кожному процесі зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю, отже $Q = A$. На ізобарах 1-2 і 3-4 робота дорівнює: $A_{12} = P_1(V_2 - V_1)$, $A_{34} = P_3(V_4 - V_3)$, або, враховуючи рівняння стану в точках 1234:

$$P_1 V_1 = P_3 V_4 = \nu RT_1, \quad P_1 V_2 = P_3 V_3 = \nu RT_2.$$

Отримуємо: $A_{12} + A_{34} = 0$.

$$A_{23} = \int_{V_2}^{V_3} P dV = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = \nu RT_2 \ln \frac{P_1}{P_3}.$$

Аналогічно, $A_{41} = \nu RT_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = \nu RT_1 \ln \frac{P_3}{P_1}$.

Загальна робота за цикл: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$.

Отже, $Q = \nu R(T_2 - T_1) \ln \frac{P_3}{P_1} < 0$.

Підстановка даних із умови задачі дає $Q = -6,64 \text{ кДж}$, теплота віддається, а не поглинається, тобто, в цьому циклі теплова машина працює як холодильник.

Відповідь: $Q = -6,64 \text{ кДж}.$

Аналіз електромагнітних коливань в колі з конденсатором і котушкою індуктивності

Задача 17. Заряджений конденсатор ємності C замкнений на котушку індуктивності L . Знайти таку залежність від часу ємності конденсатора, при якій струм у колі збільшується прямо пропорційно часу. Електричним опором кола знехтувати.



Розв'язання. За законом Фарадея: $|E| = LI = \frac{U}{t} = \text{const}$, так як за умовою задачі струм у колі збільшується прямо пропорційно часу: $I \approx t$. Отже, і напруга на конденсаторі, що дорівнює напрузі на котушці в будь-який момент часу, теж залишається сталою:

$$U_c = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q_0 - q}{C},$$

де q_0 — початковий заряд на конденсаторі, q — заряд, який стік із обкладок конденсатора за час t , а C — ємність конденсатора в момент t . З рівності $\frac{U}{t} = \frac{q_0}{C_0}$

знаходимо струм: $I = \frac{q_0 t}{LC_0}$.

Тоді повний заряд, що стікає з конденсатора за час дорівнює

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt = \frac{q_0 t^2}{2LC_0}.$$

Підставивши цей вираз для заряду у формулу, отримаємо

$$C = C_0 \left(1 - \frac{t^2}{2LC_0} \right).$$

Зазначимо, що ця відповідність буде правильною за умови, що $q < q_0$.

Обчислення магнітного потоку

Задача 18. Магнітне поле створюється провідником зі струмом, сила якого 50 А. У полі розміщена рамка. Так що дві великі сторони довжиною 65 см паралельні провіднику, а відстань від провідника до найближчої сторони рівна її ширині. Який магнітний потік пронизує рамку?

Розв'язання. Магнітна індукція поля провідника визначається за законом Біо-Савара-Лапласа: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, де r — найкоротша відстань від провідника до точки поля. Магнітний потік, що пронизує рамку, визначається як: $\Phi = \int B(r) dA$, де dA — елементарна площа рамки, через яку проходить магнітне поле. У даному випадку, враховуючи, що магнітне поле змінюється з відстанню від провідника, пронизуючу площу рамки можна розбити на вертикальні смужки, перпендикулярні провіднику.

Елементарна площа $dA = l dr$, де dr — ширина смужки на відстані r від провідника. Таким чином, потік через рамку:

$$\Phi = \int_a^{2a} B(r) \cdot l dr = \int_a^{2a} \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{2a}{a},$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2.$$

Підставивши відповідні дані з умови задачі, отримаємо значення магнітного потоку 4,5 мкВб.

Відповідь: $\Phi = 4,5$ мкВб.



Список використаних джерел:

1. Істер О. С., Єрміна О. Алгебра і початки аналізу: (профільний рівень): підручник для 11-го класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Генеза, 2019. 416 с.
2. Крамаренко Т. Г. Прикладні задачі у навчанні математики: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс] / Т. Г. Крамаренко, М. В. Михайловська. КДПУ, 2018. 156 с. Режим доступу: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/0564/>
3. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу: (профільний рівень): підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Харків: Вид-во "Ранок", 2019. 240 с.
4. Сморжевський Л.О. Задачі з алгебри і початків аналізу: 1001 задача прикладного змісту: 10–11 кл. / Л.О. Сморжевський, П.С. Атаманчук, А.М. Кух. К.: А.С.К., 1999. 135 с.
5. Сморжевський Л.О. Про використання фізичних задач в шкільному курсі математики / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський // 36. наук. праць Кам.-Под. педуніверситету. Серія педагогічна: Дидактика природознавчо-математичних дисциплін та освітніх технологій, 1999. Вип. 5. С. 193–197
6. Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри та початків аналізу: практикум. Навчальний посібник / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швеш. К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.
7. Шкіль М.І. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. К.: Зодіак-ЕКО, 2002. 384 с.



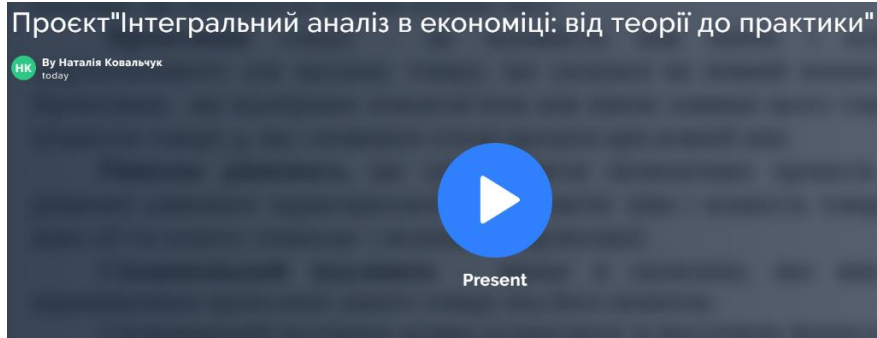
Додаток Г

Таблиця основних формул обчислення фізичних величин через інтеграл

Застосування визначених інтегралів до обчислення фізичних величин				
№ п/п	Величини	Співвідношення	Знаходження похідної	Знаходження інтеграла
1	S — переміщення v — швидкість	$\Delta s = v(t) \cdot \Delta t$	$v(t) = s'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2	A — робота F — сила	$\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$	$F(x) = A'(x)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
3	A — робота N — потужність	$\Delta A = N(t) \cdot \Delta t$	$N(t) = A'(t)$	$A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
4	m — маса тонкого стержня ρ — лінійна густина	$\Delta m = \rho(x) \cdot \Delta x$	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
5	q — електричний заряд I — сила струму	$\Delta q = I(t) \cdot \Delta t$	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
6	Q — кількість теплоти c — теплоємність	$\Delta Q = c(t) \cdot \Delta t$	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$
7	v — швидкість a — прискорення	$\Delta v = a(t) \cdot \Delta t$	$a(t) = v'(t)$	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$

Додаток Д

Проект "Інтегральний аналіз в економіці: від теорії до практики"



Попит на даний товар – залежність між ціною товару і об'ємом його покупки, що склалася на певний момент часу.

Пропозиція товару – це залежність між ціною і кількістю запропонованого для продажу товару, що склалася на певний момент часу. Пропозиція, що відображає взаємозв'язок між ціною одиниці цього товару p і кількістю товару g , яку споживачі готові продати при кожній ціні.

Ринкова рівновага, ще одне поняття економічних процесів. Стан ринкової рівноваги характеризують такі поняття: ціна і кількість товару, при яких об'єм попиту співпадає з величиною пропозиції.

Споживацький надлишок – явище в економіці, яке викликане перевищенням пропозиції даного товару над його попитом.

Споживацький надлишок можна розрахувати за наступною формулою:

$$CS = \int_0^g f(g) dg - pg$$

Знаходження капіталу за відомими інвестиціями



Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими частими інвестиціями. Чисті інвестиції (капіталовкладення) — це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції, відповідно, як $f(t)$, то викладене вище можна записати у вигляді:

$$f(t) = \frac{d}{dt} K(t).$$

Часто вимагається знайти приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2 , тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$. Враховуючи, що $K(t)$ — первісна для функції $f(t)$, маємо

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Відповідь. $\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$

Продовження додатку Д

Коефіцієнт Джині

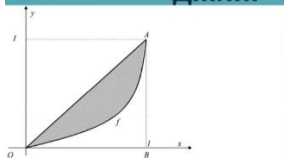


Рис.1 – Графічна інтерпретація розподілу доходів

Розглянемо залежність відсотка доходів населення від відсотка населення, що має ці доходи. Ми будемо розглядати функцію $y = f(x)$. Розглянемо рисунок 1.

За допомогою функції $y = f(x)$ (крива Лоренца) можна оцінити ступінь нерівномірності розподілу доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива вироджується в бісектрису ОА.

Відрізок площі сегмента ОАВ до площі трикутника ОАВ називається коефіцієнтом Джині. Цей коефіцієнт характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення таким чином:

- 1) коли коефіцієнт Джині не перевищує 0,33, тоді розподіл доходів можна вважати близьким до рівномірного;
- 2) коли коефіцієнт Джині знаходиться в межах від 0,33 до 0,67, тоді розподіл доходів вважається помірно нерівномірним;
- 3) коли коефіцієнт Джині понад 0,67, тоді розподіл доходів можна вважати істотно нерівномірним.

Обсяг продукції, що випускається

Відомо, що продуктивність праці протягом робочого дня змінюється. Нехай зміна продуктивності праці визначається функцією $f(t)$, де t – час, відлічуваний від початку робочого дня, а $f(t)$ – продуктивність праці в даний момент. Тоді величина

$$U = \int_0^T f(t) dt$$

– це обсяг продукції, що випускається за час $[0, T]$.

Часто при вирішенні практичних завдань доводиться знаходити середні значення функцій, наприклад: середню продуктивність праці, середні витрати виробництва, середню потужність двигуна і т. д. У цих випадках використовується теорема про середнє значення (інтеграл). Тоді відносно розглянутої функції продуктивності праці буде мати місце формула (середнє значення продуктивності праці за проміжок часу від t_1 до t_2):

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Дисконтований дохід

При вивченні економічної ефективності капітальних вкладень зустрічаються завдання, пов'язані з визначенням початкової суми за її кінцевою величиною, отриманою через t років при річному відсотку P (відсоткова ставка). Таке завдання називається дисконтуванням. Нехай дохід, що надходить щорічно, змінюється в часі і описується функцією $f(t)$ при пінтій нормі відсотка $i = \frac{P}{100}$. Відсоток нараховується безперервно. Тоді дисконтований дохід K за час T визначається за формулою:

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt$$

Коли базове капіталовкладення становить N ум.од. і намічається щорічно збільшуючи капіталовкладення на m ум.од., тоді:

$$f(t) = N + m t.$$

Задача 1.

Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = 4 - q^2$, де q – кількість товару (у шт.), p – ціна одиниці товару, а рівновага на ринку даного товару досягається при $p = q = 1$. Визначити споживчий надлишок (CS).



Продовження додатку Д

Розв'язання:

$$CS = \int_0^q f(q) dq - pq = \int_0^1 (4 - q^2) dq - 1 \cdot 1 =$$

$$= \left(4q - \frac{q^3}{3}\right) \Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3} \text{ (грн)}.$$

Відповідь: споживчий надлишок дорівнює $2\frac{2}{3}$ грн.

Задача 2. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою $f(t) = (1 + t)e^{3t}$.

Розв'язання. Якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент часу t , то
 $U = \int_0^T f(t) dt$ — обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0; T]$;
 $U = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ — обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1; t_2]$.
 Отже, обсяг виробленої продукції дорівнює:

$$U = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами:
 $U = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt = \left| \begin{matrix} u = 1 + t \\ dv = e^{3t} dt, & v = \int e^{3t} dt = \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t} \end{matrix} \right| =$
 $= (t + 1)\frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} dt = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 =$
 $= \frac{5}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}(e^{12} - 1) = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2,53 \cdot 10^5.$

Відповідь: $2,53 \cdot 10^5$ ум. одиниць.

Задача 3. За даними досліджень у розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = x^3$, де x — частка населення, y — частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язання. Обчислимо Арістотелівський коефіцієнт Джіні (AJ) за даними функцією Лоренца, якщо коефіцієнт Джіні дорівнює G :
 $G = \frac{A_{Lor}}{A_{Dij}} = \frac{\int_0^1 y dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
 Якщо з інтегрування вирахуємо математичний інтеграл, отримаємо:
 $A_{Lor} = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,25.$
 Тоді
 $G = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5.$
 Відповідь: $G = 0,5$, тобто розподіл доходів вважається нерівномірним.

Задача 3. За даними досліджень у розподілі доходів в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = x^3$, де x — частка населення, y — частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Розв'язання. Обчислимо Арістотелівський коефіцієнт Джіні (AJ) за даними функцією Лоренца, якщо коефіцієнт Джіні дорівнює G :
 $G = \frac{A_{Lor}}{A_{Dij}} = \frac{\int_0^1 y dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x dx} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
 Якщо з інтегрування вирахуємо математичний інтеграл, отримаємо:
 $A_{Lor} = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,25.$
 Тоді
 $G = 1 - 2 \cdot 0,25 = 0,5.$
 Відповідь: $G = 0,5$, тобто розподіл доходів вважається нерівномірним.

Продовження додатку Д

Задача 4. Протягом робочого дня зміна продуктивності праці характеризується функцією $f(t) = -t^2 + 5t + 6$. Знайти:

- обсяг продукції, що випускається за час $[0, 3]$;
- середнє значення продуктивності за час $[0, 3]$ і моменти часу t_0 та t_1 , у які досягаються середнє і максимальнє значення продуктивності;

у результат пояснити графічно.

Розв'язання:

а) обсяг продукції, що випускається за час $[0, T]$, обчислюється за формулою:

$$U = \int_0^T f(t) dt.$$

Тому

$$U = \int_0^3 (-t^2 + 5t + 6) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 6t \right) \Big|_0^3 =$$

$$= -\frac{27}{3} + \frac{5 \cdot 9}{2} + 6 \cdot 3 = 0 + \frac{63}{2} = 31,5;$$

б) середнє значення продуктивності за час $[0, T]$ обчислюється за формулою:

$$F(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Тому

$$f_{\text{ср}} = \frac{1}{3} \int_0^3 (-t^2 + 5t + 6) dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{2} = \frac{21}{2} = 10,5.$$

Графічно видно (рис. 2), що площа заштрихованої фігури, яка виражає обсяг продукції, що випускається за 3 години, дорівнює площі прямокутника, висотою якого є відновок прямої, що дорівнює середньому значенню продуктивності праці за перші 3 години роботи.

Відповідь: а) обсяг продукції $U = 31,5$; б) середнє значення продуктивності $f_{\text{ср}} = 10,5$ в момент часу $t_0 \approx 1,1$, максимальнє значення в момент часу $t_1 = 2,5$.

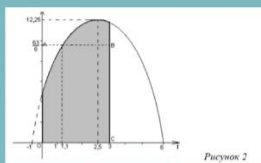


Рисунок 2

Щоб знайти момент часу t_0 , у який досягається середнє значення продуктивності, розв'яжемо рівняння:

$$f(t) = \frac{21}{2} \Rightarrow -t^2 + 5t + 6 = \frac{63}{6}.$$

Звідси

$$t_{01} = \frac{10 + \sqrt{28}}{4} \approx 1,1; t_{02} = \frac{10 - \sqrt{28}}{4} \approx 3,8 \notin [0, 3].$$

Щоб знайти момент часу t_1 , у який досягається максимальнє значення продуктивності, знайдемо вершину параболі:

$$f(t) = -t^2 + 5t + 6.$$

Максимальнє значення досягається саме у вершині, тому для вітки параболі спрямовані вниз:

$$t_1 = t_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{-2} = 2,5.$$

а) для побудови параболі знайдемо координати вершини:

$$f(t_2) = f(2,5) = -(2,5)^2 + 5 \cdot 2,5 + 6 = 12,25.$$

Отже, вершина параболі знаходиться у точці $(2,5; 12,25)$. Знайдемо точки перетину параболі з віссю Ox :

$$-t^2 + 5t + 6 = 0 \Rightarrow t_{01} = -1, t_{02} = 6.$$

Задача 5. Знайти середнє значення витрат $K = 3x^2 + 5x + 2$, якщо обсяг продукції x змінюється від 1 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

Розв'язання:

Середнє значення витрат, якщо обсяг продукції x змінюється від m до n одиниць, обчислюється за формулою:

$$l = \frac{1}{n-m} \int_m^n K(x) dx,$$

$$l = \frac{1}{3-1} \int_1^3 (3x^2 + 5x + 2) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(3 \cdot 27)}{3} + \frac{(5 \cdot 9)}{2} + 2 \cdot 3 - \left(\frac{3}{3} + \frac{5}{2} + 2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [27 + 22,5 + 6 - (1 + 2,5 + 2)] = 25$$

Щоб знайти обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення, розв'яжемо рівняння:

$$K(x) = l \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 25$$

Звідки отримаємо:

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{301}}{6} \approx -3,72 \notin [1; 3],$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{301}}{6} \approx 2,06.$$

Відповідь: середнє значення $l = 25$ при обсязі $x \approx 2,06$.

Продовження додатку Д

Задача 6. Визначити дисконтований дохід K за 5 роки при процентній ставці $P = 7\%$, коли початкові капіталовкладення становили 14 тис. грн, і щорічно намагаються збільшувати капіталовкладення на 1 тис. грн.

Розв'язання:

Введемо функцію $f(t) = N + mt$, де N — початкові капіталовкладення, m — сума, на яку намагаються щорічно збільшувати капіталовкладення.

Тобто $f(t) = 14 + t$. Дисконтований дохід за час T визначається за формулою:

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^T f(t)e^{-it} dt, \text{ де } i = \frac{P}{100} = \frac{7}{100} = 0,07. \text{ Тоді} \\
 K &= \int_0^5 (14 + t)e^{-0,07t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 14 + t, \quad dv = e^{-0,07t} dt \\ du = dt, \quad v = -\frac{1}{0,07} e^{-0,07t} \end{array} \right| = \\
 &= (14 + t) \left(-\frac{1}{0,07} \right) e^{-0,07t} \Big|_0^5 - \int_0^5 \frac{1}{-0,07} e^{-0,07t} dt = \\
 &= (14 + t) \left(-\frac{1}{0,07} \right) e^{-0,07t} \Big|_0^5 - \frac{1}{(-0,07)^2} e^{-0,07t} \Big|_0^5 = \\
 &= \left((14 + 5) \left(-\frac{1}{0,07} \right) e^{-0,35} - (14 + 0) \left(-\frac{1}{0,07} \right) e^0 \right) + \frac{1}{0,07^2} (1 - e^{-0,35}) \approx \\
 &\approx 69,8 \text{ тис. грн.}
 \end{aligned}$$

Відповідь: $K \approx 69,8$ тис. грн.

Література:

Кулик Г.М., Кушлик-Дивальська О.І., Степаненко Н.В., Ярема Н.П. Вища математика. Інтегральне числення. Функції однієї змінної. Диференціальні рівняння. навч. посібник для студентів технічних спеціальностей / К.: НТУУ «КПІ». – 2016. – 278 с.

Алілушко А.М. Вища математика у прикладах і задачах для економістів: навч. посіб. / Алілушко А.М., Дзюбановська Н.В., Лесик О.Ф., Неміш В.М., Новосад І.Я., Шинкарик М.І. – Тернопіль: ТНЕУ, 2017. – 148 с.

Ткан Ю.М. Математика. Задані економічного змісту в математичній: навчально-методичний посібник / Ю.М. Ткан. – Х.: Вид-во "Ранок", 2011. – 176 с.

Шевцов С.О., Грудкіна Н.С. Розв'язання задач з економіки методами математичного аналізу: посібник до практичних занять і самостійної роботи / С.О. Шевцов, Н.С. Грудкіна. – Криваторськ: ДДМА, 2019. – 55 с.