

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему «ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА
ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ»

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)з-2

Спеціальності

014.04 Середня освіта (Математика)

Ленів Мар'яна Валеріївна

Керівник Кульчицька Н.В.

Рецензент _____

(науковий ступінь, вчене звання, посада прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ	7
1.1.Визначення похідної та її геометричний зміст	7
1.2. Правила знаходження похідних	14
1.3.Використання похідної для дослідження монотонності функції та екстремумів.....	20
1.4. Використання першої та другої похідної для дослідження характеру зростання та спадання функції, а також для визначення точок перегину та інтервалів випуклості/увігнутості.....	23
Висновки до розділу 1	25
РОЗДІЛ 2. ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ В ШКОЛІ: АНАЛІЗ ПРОГРАМ І ПІДРУЧНИКІВ	28
2.1. Аналіз навчальних програм: вивчення теми похідної у шкільному курсі математики.....	28
2.2. Огляд підручників: методи та підходи до викладання теми похідних ..	36
2.3. Рекомендації щодо покращення процесу вивчення похідних у школах	45
Висновки до розділу 2	51
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ	53
3.1. Етапи побудови графіка функції з використанням похідних	53
3.2. Приклади побудови графіків типових функцій	62
3.3. Застосування комп'ютерних технологій для дослідження та побудови графіків функцій	65
Висновки до розділу 3	71
ВИСНОВКИ.....	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	77

ВСТУП

Математика, будучи основою наукових знань, відіграє ключову роль у дослідженні властивостей функцій та побудові їх графіків, зокрема через такі інструменти як похідна. Використання похідної для аналізу функцій є фундаментальним компонентом математичної освіти, дозволяючи студентам не тільки глибше зрозуміти динаміку змін функцій, але й візуалізувати ці зміни на графіках.

У сучасному академічному світі похідна застосовується в різноманітних областях — від економіки до інженерії, де аналіз швидкостей змін є критичним для розуміння процесів. Практичне освоєння методів вивчення похідних у математичних курсах відкриває нові можливості для застосування теоретичних знань у реальних задачах.

Актуальність дослідження впливає з того, що збільшення ролі технологій та інновацій вимагає від науковців та інженерів розуміння та застосування математичних методів на практиці. Відтак, навчання студентів роботі з похідними дозволяє їм краще адаптуватися до сучасних викликів у їх майбутніх професійних сферах.

Оновлення методик викладання та використання похідної у дослідженні функцій має важливе значення. По-перше, це дозволяє студентам отримувати більш точні та значущі аналітичні дані, що сприяє глибшому розумінню математичних концепцій. По-друге, воно спрощує процес навчання та дослідження, роблячи його більш ефективним і доступним.

Таким чином, викладання і застосування похідної у дослідженні функцій є не тільки важливою академічною вимогою, а й ключовим інструментом у розвитку наукових і технологічних навичок студентів, що готує їх до роботи в сучасному науковому і технологічному середовищі.

Сучасні освітні підходи акцентують на необхідності інтеграції комп'ютерних технологій у процес вивчення похідних, що дозволяє використовувати програмне забезпечення для моделювання графіків функцій.

Це не тільки збільшує залученість студентів через візуальне представлення матеріалу, але й допомагає їм краще зрозуміти абстрактні концепції за допомогою конкретних прикладів.

Застосування програмного забезпечення, такого як Mathematica, MATLAB чи Python з бібліотеками для чисельних обчислень, у навчальному процесі дозволяє студентам виконувати складні обчислення та аналізувати поведінку функцій на новому рівні. Ці інструменти надають можливість швидко міняти параметри функцій та відразу бачити результати цих змін на графіках, що значно підсилює інтуїтивне розуміння математичних закономірностей.

Крім технічних аспектів, важливо також зосередитись на методологічній стороні навчання похідних. Студентам необхідно вчитися формувати задачі, встановлювати зв'язки між різними частинами матеріалу, та розвивати здатність до критичного аналізу та синтезу інформації. Такий підхід допомагає не тільки в освоєнні специфічних навичок, але й у формуванні широких аналітичних здібностей, які застосовуються у багатьох сферах життя.

Дослідження значимості застосування похідної для аналізу та побудови графіків функцій опирається на аналізи низки авторських позицій у сфері інтеграції математичних інструментів у зміст освіти, серед яких виступають такі науковці як Конопельник О.І, Миргородський Б.Ю, Пастернак Н.В, Радковська О.В., Шабаль В.К. та інші. У цих дослідженнях розглядаються процеси формування різних видів професійних компетенцій та професійної компетентності учителів з огляду на основні види діяльності, що включають використання похідної для аналізу поведінки функцій.

Мета цього дослідження полягає у вивченні застосування похідної для аналізу та візуалізації поведінки функцій, з метою забезпечення більш глибокого розуміння математичних концептів та підвищення ефективності навчального процесу.

Предметом дослідження є методи використання похідної у дослідженні та побудові графіків функцій, що включають аналіз змін у поведінці функцій, розробку методичних підходів та використання програмного забезпечення для візуалізації результатів.

Об'єктом дослідження є процес використання похідної в математичній освіті, зокрема розробка навчальних матеріалів, організація практичних занять та аналіз впливу цих методів на ефективність вивчення математики.

Відповідно до поставленої мети визначено такі **завдання дослідження**:

1. вивчити теоретичний матеріал про застосування похідної в математичних дисциплінах;
2. проаналізувати методи і прийоми використання похідної для дослідження поведінки функцій та побудови їх графіків у академічних курсах;
3. виконати порівняльний аналіз навчальних підходів до використання похідної у традиційних і інноваційних навчальних програмах;
4. дослідити методику викладання математики з акцентом на використанні похідної в освітньому процесі;
5. оцінити ефективність застосування похідної у викладанні математики.

Методи дослідження. У рамках роботи використані наступні методи: теоретичні — вивчення літератури, аналіз та синтез матеріалів, порівняння навчальних програм з математики, а також узагальнення отриманих даних.

Наукова новизна та теоретична значущість дослідження полягає у розробці і обґрунтуванні використання нових методичних підходів до вивчення та застосування похідної у дослідженні функцій і побудові графіків. Наукова новизна дослідження виявляється в розробці та впровадженні інноваційних методів і прийомів, які сприяють підвищенню якості навчання математики та здатності студентів глибше розуміти математичні концепти та теорії. Дослідження також спрямоване на аналіз і вдосконалення існуючих

методик з урахуванням сучасних досягнень у сфері математичної освіти і технологій.

Теоретична значущість полягає у поглибленні теоретичних знань про застосування похідної для дослідження та візуалізації поведінки функцій. Дослідження розширює наше розуміння математичних принципів, пов'язаних із похідною, її впливу на характеристики функцій та методики її використання для побудови графіків. Впровадження оновленої методики сприятиме покращенню якості навчання студентів і підготовці їх до ефективного використання математичних інструментів у наукових та технічних застосуваннях.

Практична значущість дослідження: отримані результати та розроблені рекомендації можуть слугувати орієнтиром для подальших наукових пошуків у специфіці розробки та впровадження покращених методик і прийомів, що сприятимуть поліпшенню процесу навчання математики, зокрема у застосуванні похідної.

Оновлена методика використання похідної дозволить студентам отримати більш глибоке розуміння математичних принципів та застосувати їх у різних наукових та інженерних завданнях, що підвищить якість їхнього навчання та підготовку до майбутньої професійної діяльності.

Структура дослідження обумовлена логікою та послідовністю розв'язання завдань дослідження. Робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаної літератури.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОХІДНОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ДОСЛІДЖЕННІ ФУНКЦІЙ

1.1. Визначення похідної та її геометричний зміст

Похідна є фундаментальним поняттям у математиці, що дозволяє аналізувати зміни функцій. Вона відіграє ключову роль у дослідженні динаміки змін, швидкості рухів, росту чи спадання процесів у природничих науках, техніці, економіці та багатьох інших галузях. Особливе значення похідна знайшла у фізиці, де вона застосовується для опису швидкостей та прискорень.

Історично поняття похідної формувалося протягом багатьох століть, проте основоположні ідеї були сформульовані в XVII столітті, коли Ісаак Ньютон та Готфрід Вільгельм Лейбніц незалежно один від одного розробили концепції, що лягли в основу сучасного диференціального числення. Їх роботи забезпечили математикам інструменти для точного опису змінних процесів і стали революційними у науковому світі.

Ньютон використовував похідні для розрахунку швидкостей та прискорень у своїх роботах з механіки, тим самим заклавши основи класичної фізики. Лейбніц же розглядав це поняття більш абстрактно як миттєву швидкість зміни, і його підхід сприяв розвитку математичного аналізу. Обидва підходи виявилися надзвичайно продуктивними і сформували основу для подальших досліджень у цій галузі [1].

Розвиток концепції похідної сприяв значному прогресу в аплікаційних дисциплінах, зокрема в інженерії та економіці, де аналіз змінних величин є критично важливим. Вивчення похідних продовжує бути одним з центральних елементів у математичній освіті, забезпечуючи інструментарій для розуміння та моделювання складних систем у різних сферах наукових досліджень.

Означення похідної починається з концепції границі, яка є однією з базових ідей математичного аналізу. Похідна вимірює, як швидко змінюється

значення однієї змінної у відповідь на зміну іншої змінної. Це фундаментальне поняття, що знаходить застосування в різних областях науки та інженерії, дозволяючи розраховувати швидкості, прискорення, нахили та інші подібні характеристики.

Формальне визначення похідної включає границю різниці значень функції відповідно до зміни її аргументу, коли ця зміна прямує до нуля. З математичної точки зору, якщо маємо функцію ($f(x)$), то її похідна в точці (x) визначається як границя відношення приросту функції до приросту її аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля. Це записується як:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Цей вираз, що називається різницеvim коефіцієнтом, є фундаментом для визначення похідної і відіграє ключову роль у вивченні функцій. Через нього можна аналізувати поведінку функцій у дуже малих масштабах, що дозволяє точно оцінити характер змін [2].

Розуміння границі є необхідним для засвоєння концепції похідної, оскільки саме граничний перехід дозволяє перейти від дискретного приросту до неперервного. Застосування границі дозволяє не тільки знаходити похідні, але й інтегрувати функції, що є оберненою операцією до диференціювання.

У практичному аспекті похідна дозволяє визначати нахили кривих, оптимальні значення у економічних моделях, рівноважні стани у фізичних системах, та багато іншого. Таким чином, здатність обчислювати похідні є важливою як для теоретичних, так і для прикладних аспектів наукових дисциплін. Вона є ключем до розуміння та застосування фундаментальних законів природи, таких як закони Ньютона в механіці, а також і закони Максвелла в електродинаміці. Вивчення похідних також є невід'ємною частиною аналізу економічних тенденцій, де вони допомагають прогнозувати зміни на ринках, розраховувати маржі прибутку та оптимізувати виробничі процеси.

Точність у вимірюванні змін, яку забезпечує похідна, відкриває широкі можливості для наукових досліджень та розробки технологій. Наприклад, в аерокосмічній індустрії похідні використовуються для розрахунку траєкторій польотів, швидкостей руху космічних апаратів та оптимальних параметрів запуску ракет. У медицині похідні застосовуються для аналізу змін у рівнях лікарських препаратів в організмі, що дозволяє точно дозувати лікування та забезпечувати максимальну ефективність терапії.

Означення похідної, яке запропонував Готфрід Вільгельм Лейбніц, є одним з основних підходів у математичному аналізі. Лейбніц ввів поняття диференціалу та похідної як основу для вивчення змін у функціях. Його підхід базується на використанні нотації та символів, які стали стандартом у математичному аналізі [3].

За Лейбніцем, похідна функції ($f(x)$) в точці (x) представляється як границя відношення приросту функції до нескінченно малого приросту її аргументу. Це відношення позначається як $\frac{dy}{dx}$, де (dy) є приростом функції, а (dx) — нескінченно малим приростом аргументу. Формула для обчислення похідної за Лейбніцем виглядає так:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ця формула дозволяє аналізувати поведінку функції у точці та визначати нахил дотичної до графіка функції в цій точці.

Ісаак Ньютон розробив свою теорію похідних незалежно від Лейбніца, фокусуючись більше на фізичній інтерпретації та застосуваннях у механіці. Ньютон вводить поняття потоку та флюксій, що представляють собою швидкості змін змінних. У його підході похідна функції, або «флексія», визначається як швидкість зміни функції.

Ньютон використовував нотацію з крапками над змінними для позначення похідних. Наприклад, якщо ($y = f(x)$), то його перша похідна позначається як $\dot{y}$. Похідна функції (y) за Ньютоном визначається як

$$\dot{y} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

границя відношення приросту функції до приросту часу (t), що наближається до нуля:

Цей метод був особливо корисний для вивчення руху об'єктів та аналізу динамічних систем у фізиці.

Обидва підходи, Лейбніца та Ньютона, хоча й розроблені незалежно, виявилися еквівалентними у математичному аналізі та призвели до формування сучасної концепції диференціального та інтегрального числення. Важливим аспектом обох підходів є визначення швидкості зміни величин, що дозволяє математикам та науковцям точно описувати рух та зміни в природних явищах.

Поняття похідної за Ньютоном, яке було призначене для опису фізичних процесів, широко застосовується в класичній механіці. Наприклад, друга похідна відстані по часу дає прискорення, яке є ключовою величиною в законах руху Ньютона.

З іншого боку, нотація Лейбніца виявилася дуже зручною для використання в математиці та технічних дисциплінах, де нескінченно малі величини використовуються для точного аналізу функціональних залежностей. Його підхід став основою для багатьох математичних технік, включаючи диференціювання функцій декількох змінних.

У сучасному математичному аналізі обидві системи похідних використовуються в залежності від контексту та потреб дослідження. Інтеграція підходів Лейбніца та Ньютона дала змогу розробити більш універсальні методи для рішення наукових та інженерних задач, а також сприяла розвитку суміжних галузей, таких як динаміка флюїдів, оптимізація та статистичний аналіз [4].

Значення похідної не обмежується лише академічними дослідженнями; вона є важливим інструментом в багатьох прикладних областях. Знання та розуміння похідних дозволяють фахівцям в різних сферах — від економіки до біології — моделювати, аналізувати та прогнозувати поведінку складних систем з високою точністю.

Геометричний зміст похідної тісно пов'язаний з поняттям дотичної до графіка функції. Похідна в точці функції дозволяє зрозуміти, яким чином функція змінюється в цій точці, і відіграє роль кутового коефіцієнта дотичної лінії до графіка функції. Ця дотична є прямою, яка найкраще апроксимує функцію в околі точки та має нахил, рівний значенню похідної в цій точці.

Для будь-якої диференційованої функції ($f(x)$) і точки (a) на її графіку, дотичну можна знайти за рівнянням:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

де ($f'(a)$) — значення похідної функції в точці (a), що показує швидкість зміни функції. Рівняння дотичної демонструє, що при малому прирості (x) від (a), відповідний приріст (y) на графіку буде приблизно пропорційним приросту (x), множеному на похідну.

Це поняття має важливі наслідки не лише у математиці, але й у прикладних дисциплінах, таких як фізика, інженерія та економіка, де знання нахилу дотичної дозволяє розраховувати та прогнозувати поведінку систем. Наприклад, у фізиці нахил дотичної до графіка швидкості від часу в точці дає прискорення, яке є похідною швидкості по часу в цій точці.

Таким чином, похідна функції в конкретній точці надає інформацію про те, як функція поводить себе в цьому місці, а геометричне тлумачення цього поняття в формі дотичної лінії дає візуальне уявлення про цю поведінку. Вивчення цих взаємозв'язків є ключем до розуміння глибших математичних і фізичних концепцій.

Геометричний зміст похідної, як швидкості зміни функції, дозволяє наочно уявити, як швидко змінюється значення функції відносно зміни її аргументу. Ця концепція є основною при аналізі різних математичних моделей і використовується для вивчення динамічних процесів у багатьох областях.

Швидкість зміни функції можна представити як нахил дотичної до графіка функції в даній точці. Це визначення корисне, наприклад, у фізиці, де похідні використовуються для розрахунку швидкостей або прискорень. Коли ми дивимося на графік функції, нахил дотичної в конкретній точці показує, наскільки стрімко змінюється функція: чим крутіший нахил, тим більша швидкість зміни.

Прикладом може служити функція відстані від часу для рухомого об'єкта. Якщо взяти похідну цієї функції по часу, ми отримаємо швидкість об'єкта в кожен момент часу. Графічно це відображається як нахил дотичної до кривої відстані, який змінюється в залежності від форми графіка.

Також важливою є здатність розуміти, як швидкість зміни може впливати на рішення практичних задач. Наприклад, в економіці похідна доходу від часу може показати темпи зростання або зниження доходів компанії. Це дозволяє аналітикам оцінювати ефективність стратегій та робити прогнози на майбутнє.

Геометричний зміст похідної як швидкості зміни надає потужний інструмент для аналізу і інтерпретації динамічних змін у різних сферах, від науки до фінансів. Розуміння того, як чутливі величини змінюються в часі, допомагає у прийнятті обґрунтованих рішень і плануванні майбутніх дій [5].

Геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнту дотичної є одним з найважливіших у вивченні математичного аналізу. Похідна функції в точці представляє собою кутовий коефіцієнт дотичної лінії до графіка цієї функції в цій точці. Це означає, що похідна показує, яким буде нахил дотичної до кривої графіка функції, і відображає швидкість зміни значення функції відносно зміни її аргументу.

Нахил дотичної є мірою того, наскільки круто функція змінює свої значення в даній точці. Якщо похідна додатна, дотична спрямована вгору, що вказує на зростання функції. Якщо похідна від'ємна — дотична нахилена вниз, відображаючи спадання функції. Похідна рівна нулю в точці, де функція

має локальний максимум або мінімум, що відповідає горизонтальній дотичній.

Для більш точного розуміння, розглянемо функцію ($f(x)$) і точку (a) на її графіку. Рівняння дотичної, що має кутовий коефіцієнт рівний похідній ($f'(a)$), виглядає так:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Таке розуміння похідної важливе не тільки для математики, але й для багатьох прикладних дисциплін. Воно дає змогу інженерам і науковцям моделювати фізичні явища та передбачати поведінку систем за допомогою математичних моделей. Визначення кутового коефіцієнту дотичної є фундаментальним у дослідженні кривих та поверхонь, оптимізації процесів та аналізі змін у різних областях.

Похідна відіграє ключову роль у різних областях науки та інженерії, ставши фундаментальним інструментом для аналізу динамічних систем, оптимізації процесів та моделювання складних явищ. Вона застосовується для розрахунку швидкостей змін, шукання максимальних і мінімальних значень функцій, а також у вирішенні диференціальних рівнянь, які є основою для багатьох природничих наук та інженерних дисциплін.

У математиці похідні продовжують відігравати центральну роль у дослідженнях та освіті. Вони становлять основу для розвитку нових теорій у таких галузях, як аналітична геометрія, диференціальна геометрія та чисельні методи. Можливості подальшого вивчення включають розвиток методів оптимізації, теорії хаосу та комплексного аналізу, які розширюють розуміння класичних та сучасних математичних проблем.

Вивчення похідних дозволяє математикам виходити на нові рівні розуміння змінних процесів та їх взаємозв'язків у наукових дослідженнях та інженерній практиці. Це створює можливості для інновацій у різноманітних галузях і підтримує науковий прогрес в епоху стрімких технологічних змін.

1.2. Правила знаходження похідних

Знайдемо, користуючись означенням, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ у точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$1) \Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0 + \Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$$

$$2) \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$$

3) якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то значення виразу $2x_0 + \Delta x + 1$ прямують до числа $2x_0 + 1$. Отже, при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2 + x$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = 2x + 1$, тобто

$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

З попереднього пункту вам відомо, що $(x^2)' = 2x$ і $(x)' = 1$. Таким чином, отримуємо:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Отже, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ можна було знайти як суму похідних функцій $y = x^2$ і $y = x$.

Справедливою є така теорема¹.

Теорема 1 (похідна суми). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: похідна суми дорівнює сумі похідних.

¹ Умовами теорем 37.1-37.4 передбачено таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)$

$g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ та $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0 .

Використовують і такий спрощений запис:

$$(f + g)' = f' + g'$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0 .

Маємо:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = \\ &= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.\end{aligned}$$

Запишемо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними у точці x_0 , то існують границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$.

Теорему 1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'.$$

Дві теореми, наведені нижче, також спрощують знаходження похідної.

Теорема 2 (похідна добутку). У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + g'(x) f(x).$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) g(x)$ у точці x_0 .

Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) g(x_0) = \\
&= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0) g(x_0) = \\
&= f(x_0) g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0) g(x_0) = \\
&= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.
\end{aligned}$$

Запишемо:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).
\end{aligned}$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0 , то існують

границі $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\
&= f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = \\
&= f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0).
\end{aligned}$$

Таким чином, функція $y = f(x) g(x)$ є диференційовною в точці x_0 , причому її похідна в цій точці дорівнює

$$f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0).$$

Наслідок 1. У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: постійний множник можна виносити за знак похідної.

Використовують і такий спрощений запис:

$$(kf)' = kf'$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Наслідок 2. У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$\begin{aligned} (f(x) - g(x))' &= (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1)g(x))' = \\ &= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \end{aligned}$$

Теорема 3 (похідна частки). У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю,

функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції:

$$1) \ y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2; \quad 2) \ y = x^3 \cos x; \quad 3) \ y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}.$$

Розв'язання. 1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідками з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2 \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = \\ &= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Маємо: } y' &= (x^3 \cos x)' = (x^3) \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = \\ &= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x. \end{aligned}$$

3) За теоремою про похідну добутку отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2 + 1}{3x - 2} \right)' = \frac{(2x^2 + 1)' (3x - 2) - (3x - 2)' (2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} =$$

$$= \frac{4x (3x - 2) - 3 (2x^2 + 1)}{(3x - 2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x - 2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x - 2)^2}.$$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Справді,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ доведіть самостійно.

Розглянемо функції $f(t) = 2t - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу другої функції. Наприклад, $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо для будь-якого $x \in M$ усі значення функції $t = g(x)$ є значеннями аргументу функції $y = f(t)$, то говорять, що задано складену функцію $y = f(g(x))$ з областю визначення M .

Розглянемо ще кілька прикладів.

Якщо $f(u) = \sin u$, $g(x) = 1 - 3x$, то складена функція $y = f(g(x))$ задається формулою $y = \sin(1 - 3x)$. Функцію $y = \cos^2 x$ можна розглядати як складену функцію $y = f(g(x))$, де $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема 37.4 (похідна складеної функції) Якщо функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0 , а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0 , де $t_0 =$

$g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 , причому [6]

$$h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення похідної функції в точці x_0 :

$$1) y = (3x - 7)^6, x_0 = 2; \quad 2) y = \sqrt{4x^2 + 1}, x_0 = 0; \quad 3) y = \sin \frac{x}{2}, x_0 = \pi;$$

$$4) y = \operatorname{tg}^3 5x, x_0 = \frac{\pi}{15}.$$

Розв'язання. 1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ є складеною функцією $y = f(g(x))$, де $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Оскільки $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

тобто

$$y'(x) = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5; \quad y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити й так:

$$y' = ((3x - 7)^6)' = 6(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18(3x - 7)^5;$$

$$y'(2) = -18.$$

$$2) y' = (\sqrt{4x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \cdot (4x^2 + 1)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}};$$

$$y'(0) = 0.$$

$$3) y' = \left(\sin \frac{x}{2}\right)' = \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}; \quad y'(\pi) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$4) y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3 \operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3 \operatorname{tg}^2 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{15 \operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{15}}{\cos^2 \frac{\pi}{15}} = 15 \cdot (\sqrt{3})^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Знання правил знаходження похідних є ключовим елементом математичної освіти та науки, оскільки похідні лежать в основі багатьох галузей, включаючи інженерію, фізику, економіку та біологію. Це математичний інструмент, який дозволяє аналізувати змінні, що змінюються,

і передбачати тенденції розвитку різних процесів. Особливо це стосується швидкості змін, яку можна описати через похідні.

Знаходження похідних дозволяє вченим та інженерам розробляти більш ефективні технології, планувати експерименти та вирішувати складні рівняння, що виникають у природничих науках. Вони також відіграють важливу роль у комп'ютерному моделюванні та аналізі даних, допомагаючи в адаптації моделей до реальних умов. В економіці похідні використовуються для обчислення маржинальних витрат і прибутків, що має вирішальне значення для прийняття фінансових рішень [7].

Окрім своєї прикладної цінності, знаходження похідних має теоретичне значення. Воно дає можливість глибше зрозуміти концепції неперервності та зміни, які є фундаментальними в багатьох областях математики. Навчання правилам знаходження похідних сприяє розвитку аналітичного мислення та здатності формувати та розв'язувати задачі, що є важливими навичками у сучасному освітньому і професійному світі.

1.3. Використання похідної для дослідження монотонності функції та екстремумів

Монотонність функції – це її властивість зберігати певний напрямок зростання або спадання на певному інтервалі. Зростаючою називається функція, якщо для будь-яких двох точок цього інтервалу x_1 та x_2 , де $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) \leq f(x_2)$. Якщо нерівність строга $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є строго зростаючою. Відповідно, спадною функцією називається та, для якої при тих самих умовах виконується $f(x_1) \geq f(x_2)$, а при строгому нерівності $f(x_1) > f(x_2)$ — строго спадною.

Для дослідження монотонності функції на практиці використовується похідна. Знак похідної функції на певному інтервалі дозволяє визначити характер її монотонності. Якщо похідна функції $f'(x)$ більша за нуль на інтервалі, то функція є зростаючою на цьому інтервалі. Якщо ж похідна

менша за нуль, функція є спадною. Якщо похідна дорівнює нулю, функція може бути стаціонарною, тобто зберігати стале значення [8].

Давайте розглянемо приклад. Візьмемо функцію $f(x)=x^3-3x^2+4$. Її похідна буде $f'(x)=3x^2-6x$. Розв'язавши рівняння $f'(x)=0$, знаходимо точки $x=0$ та $x=2$. Ці точки є критичними і можуть вказувати на зміну монотонності функції. Для детальнішого аналізу розділимо числову вісь на інтервали і дослідимо знак похідної на кожному з них: $(-\infty,0)$, $(0,2)$ і $(2,+\infty)$. Обраховуючи значення похідної в точках із цих інтервалів, наприклад, $x=-1$, $x=1$ та $x=3$, отримуємо, що на першому та третьому інтервалі похідна додатна (функція зростає), а на другому — від'ємна (функція спадає).

Такий аналіз монотонності за допомогою похідної є дуже корисним при вирішенні практичних задач. Наприклад, в економіці дослідження монотонності доходу компанії може допомогти зрозуміти періоди зростання та спаду продажів, що в свою чергу сприяє прийняттю обґрунтованих управлінських рішень. Також, аналіз монотонності функцій корисний у біологічних дослідженнях для оцінки змін популяції видів або реакції організмів на зовнішні впливи.

Математичне моделювання з використанням диференціального рахунку дозволяє не тільки з'ясувати загальні тенденції у даних, але й виявити точки, в яких спостерігаються кардинальні зміни поведінки функцій, наприклад, з точок зростання до точок спаду. Це може бути критично важливо для багатьох технічних та наукових застосувань, де такі точки можуть вказувати на фазові переходи, межі стійкості систем, або оптимальні точки для втручань.

Вивчення монотонності також істотно для академічних досліджень у математиці, де теорії оптимізації та аналізу поведінки складних систем часто базуються на розумінні властивостей похідних. У цьому контексті, знання про монотонність функцій може допомогти визначати важливі атрибути систем, такі як реакції на зміни умов чи параметрів.

У резюме, похідна функції та аналіз монотонності є невід'ємними інструментами в математиці та її застосуваннях. Вони не тільки дозволяють математично описати зміни у функціях, але й надають можливість для глибшого розуміння структурних змін у досліджуваних об'єктах або процесах, що є ключовим для ефективного аналізу та вирішення реальних задач.

Локальні екстремуми функції – це значення, при яких функція досягає свого локального максимуму або мінімуму в певній точці. Локальний максимум – це точка, у якій значення функції більше або дорівнює значенням функції в усіх навколишніх точках на достатньо малому інтервалі. Локальний мінімум визначається аналогічно, але значення функції в такій точці менше або дорівнює значенням у сусідніх точках [9].

Необхідною умовою для існування локального екстремуму в точці є рівність нулю першої похідної функції в цій точці, якщо похідна існує. Це означає, що для точки x_0 , якщо $f'(x_0)=0$, то в x_0 може бути локальний екстремум. Ця умова відома як умова першого порядку. Такі точки, де перша похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками.

Достатні умови екстремуму допомагають визначити, чи є дана критична точка точкою максимуму, мінімуму, чи ж вона є точкою перегину. Якщо друга похідна функції в критичній точці додатна $f''(x_0)>0$, то в x_0 локальний мінімум. Якщо друга похідна від'ємна $f''(x_0)<0$, то в x_0 локальний максимум. Якщо друга похідна дорівнює нулю, то для визначення характеру точки потрібно використовувати вищі похідні або інші методи аналізу [10].

На практиці ці умови широко використовуються для аналізу функцій, особливо у математичному моделюванні та оптимізації, де важливо знати, де функція досягає своїх екстремальних значень. Вивчення цих основних принципів є критично важливим для студентів і професіоналів, які займаються прикладними математичними дисциплінами.

Глобальні екстремуми функції — це її найвищі або найнижчі значення на всьому інтервалі її визначення, в той час як локальні екстремуми

відносяться лише до окремих точок, де функція досягає максимальних або мінімальних значень відносно невеликих околиць цих точок. Глобальний максимум або мінімум є також локальним екстремумом, але не кожен локальний екстремум є глобальним.

Для знаходження глобальних екстремумів на замкнених інтервалах необхідно використовувати комплексний підхід. Перш за все, слід знайти всі критичні точки функції в інтервалі, тобто точки, де перша похідна дорівнює нулю або не існує. Потім потрібно обчислити значення функції в цих критичних точках та на кінцях інтервалу. Глобальний максимум буде найбільшим з цих значень, а глобальний мінімум — найменшим [11].

Розглянемо приклад функції $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ на інтервалі $[0,3]$. Спершу знаходимо першу похідну: $f'(x)=3x^2-12x+9$. Розв'язавши рівняння $f'(x)=0$, отримуємо $x=1$ та $x=3$. Обчислюємо значення функції в цих точках та на краях інтервалу:

- $f(0)=1$;
- $f(1)=5$;
- $f(3)=1$.

З цих значень найбільше — 5, отже, глобальний максимум функції на даному інтервалі досягається в точці $x=1$ і становить 5. Глобальних мінімумів у цьому випадку два — в точках $x=0$ та $x=3$, і вони дорівнюють 1 [12].

Такі методи знаходження глобальних екстремумів важливі для різноманітних застосувань, включаючи оптимізацію виробництва, мінімізацію витрат, проектування інженерних систем та багато іншого. Вони дозволяють не тільки ефективно вирішувати практичні задачі, але й глибше розуміти поведінку математичних моделей у широкому діапазоні умов.

1.4. Використання першої та другої похідної для дослідження характеру зростання та спадання функції, а також для визначення точок перегину та інтервалів випуклості/увігнутості

Перша та друга похідні функції відіграють ключову роль у дослідженні характеру зростання та спадання функції, а також у визначенні точок перегину та інтервалів випуклості або увігнутості. Використання цих похідних дозволяє глибше зрозуміти поведінку функцій і забезпечує важливі інструменти для аналізу їх графіків.

Перша похідна функції $f'(x)$ показує швидкість зміни значення функції відносно зміни її аргументу. Якщо перша похідна позитивна на певному інтервалі, то функція зростає на цьому інтервалі. Відповідно, якщо перша похідна негативна, функція спадає. Точки, у яких перша похідна дорівнює нулю, можуть бути потенційними локальними максимумами або мінімумами, залежно від поведінки функції в сусідніх точках [13].

Друга похідна функції $f''(x)$ надає інформацію про випуклість або увігнутість графіка функції. Якщо друга похідна позитивна на діапазоні значень x , то графік функції випуклий вгору на цьому інтервалі. Це означає, що кут між дотичною до графіка і віссю x зростає, коли x збільшується. Якщо друга похідна негативна, графік увігнутий вгору, і кут між дотичною та віссю x зменшується при зростанні x . Точки, де друга похідна змінює знак, називаються точками перегину, що свідчить про зміну випуклості графіка.

Розглянемо приклад функції $f(x)=x^3-3x+1$. Перша похідна цієї функції $f'(x)=3x^2-3$, а друга похідна $f''(x)=6x$. Досліджуючи знак першої похідної, визначаємо, що функція спадає, коли $x<1$ і зростає, коли $x>1$, оскільки $f'(x)=0$ при $x=1$. Друга похідна позитивна при $x>0$ і негативна при $x<0$, отже, графік функції випуклий вгору на інтервалі $(0,\infty)$ і увігнутий вгору на інтервалі $(-\infty,0)$. Точка $x=0$ є точкою перегину.

Ці властивості функцій дозволяють не тільки зрозуміти загальну поведінку функцій, але й точно описати їх геометричні характеристики, що є незамінним при моделюванні фізичних процесів, економічних явищ та інших прикладних задач, де функції використовуються для опису залежностей і змін.

Використання другої похідної є особливо важливим в оптимізаційних задачах, де необхідно знайти максимальне або мінімальне значення функції. Наприклад, у бізнесі та економіці, де потрібно максимізувати прибуток або мінімізувати витрати, аналіз другої похідної може допомогти визначити, чи є точка локальним максимумом або мінімумом, і чи можливо знайти більш оптимальні рішення [14].

Також друга похідна корисна у наукових дослідженнях, де важливо розуміти характеристики зміни явищ. Наприклад, у фізиці, де вивчаються динамічні системи, зміна випуклості графіка може вказувати на критичні зміни в поведінці системи, такі як переходи між стабільними та нестабільними станами.

У геометрії та інженерії аналіз випуклості та точок перегину може бути застосований для планування конструкцій або оптимізації форми об'єктів для досягнення бажаних властивостей міцності та стабільності. Точки перегину можуть вказувати на потенційні слабкі місця або, навпаки, на зони, що можуть витримати підвищене навантаження.

У екологічних науках, дослідження зміни випуклості графіка популяції може допомогти ідентифікувати періоди стрімкого зростання або зниження чисельності видів, що є критичними для збереження біорізноманіття та планування природоохоронних заходів [15].

Таким чином, перша та друга похідні є могутніми інструментами в руках дослідників, інженерів, економістів та інших фахівців, що дозволяють не тільки точно аналізувати і прогнозувати поведінку функцій, але й глибше розуміти природні та технічні процеси, забезпечуючи основу для наукових і практичних відкриттів.

Висновки до розділу 1

У 1 розділі про теоретичні основи похідної розглянуто ключові концепції, що становлять фундаментальне значення для розуміння і застосування похідної в різних наукових і прикладних дисциплінах. Похідна,

будучи інструментом для аналізу швидкості зміни функцій, відкриває широкі можливості для дослідження динамічних процесів у природничих науках, техніці, економіці та інших галузях. Її використання дозволяє здійснювати глибокий аналіз, що відображається як у теоретичних аспектах, так і в практичному застосуванні, особливо у фізиці, де вона є основою для розрахунку швидкостей та прискорень.

Історичний розвиток поняття похідної почався з робіт Ньютона та Лейбніца, які незалежно один від одного заклали основи сучасного диференціального числення. Ньютон зосередився на фізичній інтерпретації, що сприяло застосуванню похідних у механіці, тоді як Лейбніц, розглядаючи похідну як миттєву швидкість зміни, підготував підґрунтя для математичного аналізу. Їх методи стали основою для розвитку математичних і наукових дисциплін.

Геометричний зміст похідної тісно пов'язаний з нахилом дотичної до графіка функції, що дозволяє інтерпретувати її як швидкість зміни. Ця концепція має значення не лише для математики, але й для прикладних наук. У фізиці, наприклад, нахил дотичної до графіка швидкості визначає прискорення. Така можливість вимірювати зміни та нахили забезпечує точність у розрахунках та моделюванні різноманітних процесів.

Значення похідної не обмежується академічними дослідженнями; вона є важливим інструментом у прикладних сферах. Розуміння цього поняття дозволяє аналітикам у різних галузях моделювати, аналізувати і передбачати поведінку складних систем. У геометрії нахил дотичної допомагає візуально зрозуміти поведінку функції в конкретній точці, що є важливим для прийняття обґрунтованих рішень у техніці та науці.

Оволодіння правилами знаходження похідних є ключовим для ефективного розв'язання багатьох задач, які постають у реальному житті. Зокрема, такі правила застосовуються в інженерії, економіці та фізиці для прогнозування і оптимізації систем. У фізиці похідні використовуються для

розрахунку траєкторій руху об'єктів, в економіці — для аналізу зростання та спадання показників.

Перша і друга похідні забезпечують інструменти для аналізу монотонності, екстремумів, випуклості функцій, що сприяє розв'язанню оптимізаційних задач. Перша похідна дозволяє виявити інтервали зростання чи спадання функції, що важливо для планування. Друга похідна, в свою чергу, допомагає зрозуміти випуклість графіка функції, знаходити точки перегину, що є корисним у моделюванні фізичних, економічних та інженерних процесів.

Таким чином, розділ охоплює базові теоретичні аспекти похідної та її значення у застосуванні.

РОЗДІЛ 2. ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ В ШКОЛІ: АНАЛІЗ ПРОГРАМ І ПІДРУЧНИКІВ

2.1. Аналіз навчальних програм: вивчення теми похідної у шкільному курсі математики

Аналіз навчальних програм з математики, зокрема вивчення теми «Похідна», є важливим аспектом оцінки якості математичної освіти в школах. Ця тема відіграє ключову роль у формуванні аналітичного мислення та розвитку навичок розв'язання задач, що є фундаментальними для подальшого навчання та професійної діяльності. Вивчення похідної дозволяє учням оволодіти інструментами математичного аналізу, необхідними для дослідження функцій та моделювання реальних процесів. Важливо також розглянути методичні підходи до викладання цієї теми, які включають використання практичних завдань, задач, графічного, аналітичного та числового підходів, а також інтерактивних методів і технологій навчання.

Мета навчальної програми з математики на рівні стандарту полягає в розвитку особистості учня, здатного застосовувати набуті знання у реальних життєвих ситуаціях. Важливою складовою є формування компетентностей, які сприятимуть здатності учня застосовувати знання в реальному житті, брати відповідальність за свої дії та брати повноцінну участь у суспільному житті.

Основними завданнями програми є формування в учнів навичок математичного моделювання реальних об'єктів, процесів і явищ, розвиток умінь оволодівати необхідною інформацією для розв'язання математичних задач, переформулювання задач, встановлення зв'язків між складовими задач, вибір оптимальних засобів для розв'язання задач, аналіз та інтерпретація результатів. Програма також передбачає розвиток техніки обчислень, вміння працювати з формулами, будувати і досліджувати графіки функцій, класифікувати та конструювати геометричні фігури, вимірювати геометричні величини, оцінювати шанси настання подій [16].

Вимоги до учнів включають вміння застосовувати математичні знання до розв'язання практичних задач, здатність використовувати математичні методи у повсякденному житті, здатність до самонавчання та саморозвитку. Очікувані результати навчання передбачають розвиток математичної компетентності, здатність оперувати числовою інформацією, будувати і досліджувати математичні моделі, використовувати математичні методи для розв'язання життєвих задач, прогнозувати в контексті навчальних і практичних задач.

Особливості викладання математики на рівні стандарту включають використання компетентнісного підходу, що передбачає систематичне застосування методу математичного моделювання, впровадження інформаційно-комунікаційних засобів у навчання, встановлення міжпредметних зв'язків з іншими предметами, зокрема з інформатикою та природничими науками. Навчальний процес організовано таким чином, щоб забезпечити практичну спрямованість навчання, сприяти розвитку критичного мислення та вміння вирішувати проблеми, використовувати різні форми і методи навчання, такі як лекції, семінари, практичні заняття, інтегровані уроки [17].

Основними характеристиками та цілями профільної навчальної програми з математики є забезпечення глибокого та систематичного оволодіння математичними знаннями, навичками та вміннями, необхідними для повсякденного життя та майбутньої професійної діяльності. Програма розроблена для учнів, які обрали профільний рівень вивчення математики, що передбачає підвищені вимоги до рівня підготовки та більшу кількість навчальних годин. Мета навчання полягає в розвитку наукового світогляду, логічного мислення, просторової уяви, алгоритмічної та графічної культури, а також у формуванні стійкої позитивної мотивації до навчання.

Програма орієнтована на учнів, які мають схильність до поглибленого вивчення математики та планують продовжити навчання у вищих навчальних закладах за спеціальностями, що вимагають значної математичної підготовки.

Вона передбачає не лише засвоєння теоретичних знань, але й розвиток умінь застосовувати їх у різних навчальних та життєвих ситуаціях. Особлива увага приділяється формуванню здатності до математичного моделювання, використанню інформаційно-комунікаційних технологій у навчанні, а також міжпредметним зв'язкам з іншими науками, зокрема фізикою, інформатикою, економікою та іншими [18].

Вимоги до навчання включають систематичне виконання навчальних завдань, активну участь у навчальному процесі, самостійне опрацювання додаткової літератури та виконання дослідницьких проєктів. Очікувані компетенції учнів охоплюють широкий спектр навичок, таких як здатність до логічного мислення, аналітичних здібностей, уміння працювати з математичними моделями, графіками та таблицями, а також розв'язування складних прикладних задач. Учні повинні навчитися будувати та досліджувати математичні моделі, застосовувати математичні методи для аналізу та розв'язання реальних задач, а також демонструвати здатність до критичного мислення та самостійного навчання.

Таким чином, навчальна програма на профільному рівні забезпечує високий рівень математичної підготовки, необхідний для успішного продовження навчання та професійної діяльності у сферах, де математика відіграє ключову роль. Вона спрямована на формування всебічно розвиненої особистості, здатної застосовувати математичні знання у різних сферах життя та наукової діяльності.

Аналіз структури і змісту теми «Похідна» у навчальних програмах рівня стандарту і профільного рівня свідчить про різницю у підходах до викладання цієї теми.

У навчальних програмах рівня стандарту тема «Похідна» є важливою складовою курсу алгебри та початків аналізу. Вивчення теми починається з ознайомлення учнів з поняттям похідної, її геометричним і фізичним змістом. Далі учні вивчають правила диференціювання, що дозволяє їм знаходити похідні різних функцій. Особлива увага приділяється застосуванню похідної

для знаходження проміжків монотонності, екстремумів функцій та побудови їх графіків. Наприкінці учні опановують методи розв'язання прикладних задач, що включають знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Структура викладання теми «Похідна» у програмі рівня стандарту включає наступні етапи:

1. Введення поняття похідної та її геометричний і фізичний зміст.
2. Вивчення правил диференціювання.
3. Застосування похідної для дослідження функцій: знаходження проміжків монотонності, екстремумів.
4. Використання похідної для побудови графіків функцій.
5. Розв'язання прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень функцій [19].

Зв'язок з іншими темами полягає в тому, що похідна є інструментом для дослідження властивостей функцій, які вивчаються в темах про тригонометричні, показникові та логарифмічні функції. Вона також використовується у темах інтегрального числення, що дозволяє учням бачити міжпредметні зв'язки та цілісну картину курсу математики [20].

У навчальних програмах профільного рівня тема «Похідна» має більш глибоке та розширене викладення. Програма орієнтована на учнів з поглибленим вивченням математики, тому зміст теми включає більш складні та різноманітні задачі. Учні вивчають похідні не лише основних функцій, але й складених, неявних функцій, функцій від кількох змінних. Викладаються різні методи диференціювання, включаючи правила ланцюгового диференціювання, похідні вищих порядків. Більше уваги приділяється прикладним задачам, що потребують складніших розрахунків та аналізу.

Структура викладання теми «Похідна» у програмі профільного рівня включає наступні етапи:

1. Введення поняття похідної та її геометричний і фізичний зміст.

2. Вивчення правил диференціювання, включаючи ланцюгове диференціювання та похідні вищих порядків.

3. Диференціювання складених, неявних функцій, функцій від кількох змінних.

4. Застосування похідної для дослідження функцій: знаходження проміжків монотонності, екстремумів.

5. Використання похідної для побудови графіків функцій.

6. Розв'язання складних прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень функцій, оптимізаційних задач [21].

Зв'язок з іншими темами на профільному рівні є ще більш тісним, оскільки похідна використовується не лише для дослідження функцій, але й у задачах фізики, економіки, біології, що підвищує рівень міжпредметних зв'язків. Похідна є фундаментом для вивчення інтегрального числення, диференціальних рівнянь, математичного моделювання, що розширює горизонти математичної освіти та готує учнів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах.

Обсяг і глибина вивчення матеріалу з теми «Похідна» у навчальних програмах різняться залежно від рівня підготовки учнів.

На рівні стандарту, тема «Похідна» вивчається у 10 класі впродовж 14 годин. Програма включає основні поняття, такі як похідна функції, її геометричний і фізичний зміст. Учні ознайомлюються з правилами диференціювання, вчать знаходити швидкість зміни величини в точці, кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції. Значна увага приділяється застосуванню похідної для дослідження функцій, знаходження проміжків монотонності та екстремумів функцій, а також побудові їх графіків. Програма також передбачає розв'язання нескладних прикладних задач на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин. Ступінь деталізації теоретичного матеріалу є базовою, забезпечуючи учнів основними знаннями та вміннями для розуміння і застосування похідної у простих ситуаціях.

На профільному рівні, вивчення теми «Похідна» є більш глибоким і детальним. Програма профільного рівня включає значно більшу кількість навчальних годин для вивчення похідних функцій, зокрема складених, неявних функцій, функцій від кількох змінних. Учні опановують різні методи диференціювання, включаючи ланцюгове диференціювання та похідні вищих порядків. Викладаються складніші теоретичні аспекти та детальніше розглядаються методи дослідження функцій з використанням похідної. Значна увага приділяється прикладним задачам, що потребують більш глибоких аналітичних здібностей та комплексних розрахунків. Учні вивчають не лише основні правила та властивості похідних, але й застосування їх у різних галузях знань, таких як фізика, економіка, інформатика [22].

Різниця в глибині викладу на різних рівнях зумовлена цілями програм. На рівні стандарту основна мета - забезпечити базову математичну грамотність, необхідну для повсякденного життя та подальшого навчання. Профільний рівень орієнтований на підготовку учнів до вищої освіти в галузях, де математика відіграє ключову роль, тому вимагає більш глибокого розуміння та детального вивчення математичних концепцій.

Отже, обсяг і глибина вивчення теми «Похідна» варіюються залежно від рівня навчальної програми. На рівні стандарту забезпечується базове розуміння та застосування основних понять, тоді як на профільному рівні передбачено більш детальне і глибоке вивчення з акцентом на складніші теоретичні аспекти та практичне застосування у різних сферах.

Методичні підходи до викладання теми «Похідна» включають використання практичних завдань, задач, прикладів, різні методи формування уявлень про похідну та інтерактивні методи і технології навчання.

Практичні завдання і задачі відіграють важливу роль у засвоєнні матеріалу з теми «Похідна». Вчителі використовують приклади з реального життя, щоб учні могли зрозуміти практичне застосування похідної. Наприклад, задачі на знаходження швидкості руху, кутового коефіцієнта нахилу дотичної, а також на дослідження функцій на екстремуми та

проміжки монотонності. Практичні завдання допомагають учням закріпити теоретичні знання і застосувати їх у реальних ситуаціях.

Методи формування уявлень про похідну включають графічний, аналітичний і числовий підходи. Графічний підхід полягає у візуалізації поняття похідної через побудову графіків функцій та їхніх дотичних. Це допомагає учням зрозуміти геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції. Аналітичний підхід включає використання формул та алгоритмів для обчислення похідних різних функцій, що дозволяє учням опанувати правила диференціювання та застосовувати їх у різних задачах. Числовий підхід передбачає обчислення похідних за допомогою числових методів, що є особливо корисним при вивченні складених та неявних функцій [23].

Інтерактивні методи та технології навчання включають використання інформаційно-комунікаційних технологій, таких як комп'ютерні програми для побудови графіків та моделювання функцій. Це сприяє більш глибокому розумінню матеріалу та робить навчання більш захоплюючим. Інтерактивні уроки, де учні працюють у групах, виконують дослідницькі проекти та презентують свої роботи, сприяють розвитку критичного мислення та уміння співпрацювати. Використання онлайн-платформ для розв'язування задач і тестів дозволяє учням самостійно перевіряти свої знання та отримувати зворотний зв'язок.

Тому, методичні підходи до викладання теми «Похідна» забезпечують ефективне засвоєння теоретичного матеріалу і формування практичних навичок. Використання різних методів і технологій навчання сприяє розвитку уявлень про похідну та її застосування у різних галузях знань, що є важливим для підготовки учнів до подальшого навчання та професійної діяльності.

Таблиця 2.1. Порівняльна таблиця програм з вивчення теми «Похідна»

Критерій	Рівень стандарту	Профільний рівень
Подібності у підходах до вивчення теми похідної		
Загальні методи викладання	Використання графічного, аналітичного та числового підходів	Використання тих самих методів з більшою деталізацією
Схожість у структурі та побудові навчального матеріалу	Вивчення основних понять: похідна функції, правила диференціювання, застосування похідної для дослідження функцій	Вивчення основних понять з додатковим акцентом на складніші випадки та застосування похідної у різних галузях знань
Відмінності у підходах до вивчення теми похідної		
Відмінності в обсязі та глибині вивчення теми	Тема 'Похідна' вивчається впродовж 14 годин	Тема вивчається глибше та детальніше, з більшим обсягом навчального матеріалу
Різні акценти на практичне застосування похідної	Основна увага на застосування похідної для дослідження функцій та розв'язання простих прикладних задач	Більше уваги приділяється складнішим прикладним задачам, використанню похідної у фізиці, економіці, інформатиці
Різниця в рівні складності матеріалу та задач	Матеріал і задачі простішого рівня, спрямовані на засвоєння основних понять та методів	Більш складні задачі та детальний розгляд методів диференціювання, складених функцій, функцій від кількох змінних
Вплив рівня складності на розуміння учнями теми		
Як різні рівні навчальних програм впливають на засвоєння теми	Програма стандартного рівня дозволяє учням засвоїти базові знання та вміння, необхідні для розуміння похідної та її застосування	Профільний рівень забезпечує глибоке розуміння теми, готує до подальшого навчання у вищих навчальних закладах
Переваги і недоліки складнішого підходу в профільному рівні	Переваги: глибше розуміння теми, підготовка до вищої освіти, розвиток аналітичного мислення. Недоліки: можливі труднощі у засвоєнні	Переваги: детальне розуміння теми, здатність вирішувати складні задачі. Недоліки: підвищені вимоги до учнів, необхідність додаткового часу
Аналіз ефективності навчання теми на різних рівнях з точки зору підготовки до ЗНО(НМТ) та майбутнього навчання	Стандартний рівень забезпечує достатню підготовку для складання ЗНО(НМТ) та продовження навчання	Профільний рівень дає глибшу підготовку для складання ЗНО(НМТ) та успішного навчання у вищих навчальних закладах

Таблиця 2.1. дозволяє зрозуміти як подібності, так і відмінності в підходах до викладання теми «Похідна» на різних рівнях навчання, а також як ці підходи впливають на розуміння і засвоєння матеріалу учнями.

Порівняння навчальних програм з математики для рівня стандарту і профільного рівня щодо вивчення теми «Похідна» показує, що обидві програми використовують схожі методи викладання, включаючи практичні завдання, графічний, аналітичний і числовий підходи. Проте, програма профільного рівня передбачає значно більший обсяг і глибину вивчення матеріалу, акцентуючи увагу на складніших прикладних задачах і теоретичних аспектах. Це сприяє більш глибокому розумінню теми і підготовці учнів до вступу у вищі навчальні заклади, хоча може викликати труднощі у менш підготовлених учнів. Обидва підходи ефективно готують учнів до ЗНО (НМТ), але профільний рівень надає кращу підготовку для технічних і наукових спеціальностей [24].

2.2. Огляд підручників: методи та підходи до викладання теми похідних

Огляд підручників з вивчення теми похідних у шкільному курсі математики починається з короткого опису основних підручників, що аналізуються. Перший підручник - це "Алгебра і початки аналізу" для 10 класу авторів Мерзляка, Номіровського, Полонського та Якіра, виданий у 2018 році видавництвом "Гімназія". Другий підручник - "Алгебра і початки аналізу" для 10 класу авторів Істера, також виданий у 2018 році. Обидва підручники рекомендовані Міністерством освіти і науки України.

Структура викладання теми похідних у підручниках є досить схожою, проте відрізняється глибиною та деталізацією матеріалу. У підрунику Мерзляка, Номіровського, Полонського та Якіра тема "Похідна" охоплюється у розділі "Алгебра і початки аналізу". Учні знайомляться з основними поняттями похідної, такими як похідна функції, правила диференціювання, геометричний та фізичний зміст похідної. Окрему увагу приділяється

застосуванню похідної для дослідження функцій, знаходження екстремумів та побудови графіків. Навчальний матеріал подається у зрозумілій формі з численними прикладами та задачами для самостійного розв'язання, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Підручник Істера також має чітко структурований виклад теми похідних, але більш детально розглядаються методи диференціювання складених функцій та функцій від кількох змінних. Особливу увагу приділено застосуванню похідної у різних галузях, таких як фізика, економіка та інформатика. Учні мають змогу ознайомитися з більш складними прикладами та задачами, що вимагають глибокого розуміння теоретичного матеріалу [25].

Методи викладання теми похідних включають різні підходи, серед яких графічний, аналітичний та числовий. Кожен з них має свої особливості та переваги у навчальному процесі.

Графічний підхід до вивчення похідних акцентує увагу на використанні графіків та ілюстрацій. Це дозволяє учням візуально зрозуміти геометричний зміст похідної, як, наприклад, нахил дотичної до графіка функції у певній точці. Використання графіків допомагає учням побачити, як зміна аргументу впливає на значення функції, що сприяє кращому розумінню концепції похідної. Приклади завдань з побудовою графіків функцій та їх дотичних, а також аналіз графічного зображення допомагають закріпити теоретичні знання. Наприклад, завдання на знаходження точок екстремуму функції та проміжків монотонності за допомогою аналізу графіка функції є невід'ємною частиною цього підходу [26].

Аналітичний підхід зосереджується на викладі теоретичних аспектів похідної та застосуванні формул і правил диференціювання. Учні вивчають основні правила диференціювання, такі як правило суми, різниці, добутку, частки та складеної функції. Особливу увагу приділяють доведенню теоретичних тверджень і використанню формул для обчислення похідних різних функцій. Аналітичний підхід дозволяє учням глибше зрозуміти основні принципи і методи диференціювання, що є фундаментальними для

подальшого вивчення математичного аналізу. Наприклад, задачі на знаходження похідної функції за визначенням, а також задачі на застосування правил диференціювання для обчислення похідних складених функцій є ключовими елементами цього підходу.

Числовий підхід передбачає використання числових методів для обчислення похідних. Це включає застосування методів наближеного обчислення похідних за допомогою скінченних різниць та інших числових методів. Числовий підхід особливо корисний при розв'язанні задач, де точне аналітичне розв'язання є складним або неможливим. Завдання на числові методи обчислення похідних включають використання таблиць значень функції та їх обчислення за допомогою відповідних формул. Наприклад, завдання на знаходження похідної функції у точці за допомогою різницевих схем є типовими для цього підходу [27].

Комбінація графічного, аналітичного та числового підходів у навчальному процесі не тільки сприяє всебічному засвоєнню теми похідних, але й допомагає учням розвивати важливі математичні навички та критичне мислення. Використання різних методів дозволяє вчителю адаптувати навчання під потреби і здібності кожного учня, забезпечуючи індивідуальний підхід.

Графічний підхід, наприклад, є особливо корисним для учнів, які мають схильність до візуального сприйняття інформації. Побудова графіків та ілюстрацій допомагає їм краще зрозуміти і запам'ятати основні концепції похідних. Це також полегшує розуміння складних математичних понять, таких як точка екстремуму чи інтервали зростання та спадання функцій.

Аналітичний підхід підходить для учнів, які добре орієнтуються у теоретичних аспектах та люблять розв'язувати задачі з використанням формул. Виклад теоретичних аспектів похідної, доведення правил диференціювання та їх застосування у різних задачах допомагає розвивати логічне мислення та здатність до абстрактного мислення [28].

Числовий підхід є незамінним для розв'язання прикладних задач, де точні аналітичні розв'язання є складними або неможливими. Цей підхід допомагає учням зрозуміти, як можна використовувати наближені методи для обчислення похідних і як ці методи застосовуються у реальних життєвих ситуаціях, наприклад, у фізиці, економіці або інженерії.

Інтеграція інтерактивних методів навчання, таких як використання комп'ютерних програм для побудови графіків, візуалізація математичних процесів, групові проекти та дослідницькі завдання, додатково збагачує навчальний процес. Це сприяє розвитку навичок командної роботи, комунікації, критичного мислення та самостійного навчання.

Також важливо враховувати, що різні методи викладання теми похідних можуть бути ефективними на різних етапах навчання. Наприклад, графічний підхід може бути особливо корисним на початковому етапі, коли учні лише знайомляться з основними поняттями похідної. Аналітичний підхід може бути ефективним для більш глибокого вивчення теми та підготовки до складання іспитів. Числовий підхід може стати в пригоді при розв'язанні складних прикладних задач та підготовці до майбутнього навчання у вищих навчальних закладах [29].

Інтерактивні методи навчання мають велике значення у викладанні математики, зокрема теми похідних. Використання інформаційно-комунікаційних технологій є одним з ключових елементів цього підходу. Комп'ютерні програми та онлайн ресурси надають можливість вчителям та учням візуалізувати математичні процеси, що сприяє глибшому розумінню складних тем. Наприклад, за допомогою програм для побудови графіків, таких як GeoGebra чи Desmos, учні можуть легко побачити, як змінюється функція при різних значеннях аргументу, і як це впливає на похідну. Це особливо корисно при вивченні властивостей функцій та їх похідних, адже візуалізація допомагає зрозуміти абстрактні поняття на конкретних прикладах.

Використання комп'ютерних програм дозволяє також здійснювати числові обчислення, перевіряти результати, проводити експерименти з різними функціями та аналізувати їх поведінку. Онлайн ресурси, такі як відеоуроки, інтерактивні вправи та математичні симуляції, надають учням можливість самостійно вивчати матеріал та повторювати його у зручний для них час, що сприяє індивідуалізації навчання [31].

Інтерактивні уроки є важливим компонентом сучасного освітнього процесу. Групові роботи та проекти допомагають учням розвивати навички співпраці, комунікації та критичного мислення. При роботі в групах учні мають можливість обмінюватися ідеями, обговорювати різні підходи до розв'язання задач, вчитися один у одного. Це сприяє не тільки засвоєнню математичного матеріалу, але й розвитку соціальних навичок, необхідних у повсякденному житті.

Дослідницькі завдання дозволяють учням зануритися у процес вивчення теми більш глибоко. Виконуючи проекти, пов'язані з похідними, учні можуть досліджувати реальні застосування математичних концепцій у фізиці, економіці, біології та інших галузях. Наприклад, дослідницький проект може включати аналіз швидкості зміни показників популяції в екології або дослідження економічних показників за допомогою похідних. Це допомагає учням зрозуміти практичну цінність математичних знань та їх застосування у різних сферах.

Інтерактивні методи навчання також сприяють адаптації навчального процесу до сучасних вимог і технологій. Завдяки інтеграції інформаційно-комунікаційних технологій в освітній процес, учні отримують доступ до величезної кількості ресурсів, які можуть використовувати для поглиблення своїх знань. Наприклад, відео-лекції, інтерактивні підручники та онлайн-тести дозволяють учням навчатися у зручний для них час і темп, що особливо важливо в умовах дистанційного навчання.

Комп'ютерні програми та онлайн ресурси, такі як інтерактивні симуляції, дозволяють учням проводити віртуальні експерименти, які б були

неможливими у звичайному класі. Наприклад, учні можуть змінювати параметри функцій і одразу бачити, як ці зміни впливають на їх похідні та графіки. Це допомагає учням краще зрозуміти взаємозв'язок між математичними поняттями та їх реальним застосуванням.

Групові роботи та проекти розвивають у учнів навички командної роботи, що є важливими не тільки для академічного успіху, але й для майбутньої професійної діяльності. Вони вчаться розподіляти обов'язки, координувати свої дії, розв'язувати конфлікти та приймати колективні рішення. Проекти з математики можуть включати реальні задачі, що стимулюють учнів до творчого підходу та пошуку нестандартних рішень.

Дослідницькі завдання, які включають застосування похідних, сприяють розвитку навичок самостійної роботи та критичного мислення. Учні навчаються ставити перед собою дослідницькі завдання, планувати та проводити дослідження, аналізувати отримані результати та робити висновки. Такі навички є важливими не тільки у навчанні, але й у майбутній професійній діяльності.

Інтерактивні методи навчання також сприяють формуванню у учнів позитивного ставлення до навчання та підвищенню їхньої мотивації. Коли учні бачать, як математичні знання можуть бути застосовані у реальних життєвих ситуаціях, вони стають більш зацікавленими у вивченні математики. Це допомагає знизити рівень стресу та тривожності, пов'язаних з навчанням, і зробити процес навчання більш приємним та ефективним [32].

Таким чином, інтерактивні методи навчання є потужним інструментом для покращення якості викладання математики. Вони сприяють розвитку у учнів необхідних знань та навичок, підвищують їхню мотивацію та зацікавленість у навчанні, а також готують їх до успіху у майбутній освіті та професійній діяльності. Інтеграція цих методів у навчальний процес робить освіту більш адаптованою до сучасних викликів та потреб, забезпечуючи всебічний розвиток учнів.

Порівняння підходів у підручниках з вивчення теми похідних дозволяє виявити як подібності, так і відмінності у методах викладання. Підручники Мерзляка та Істера мають багато спільного у своїй структурі та підходах до викладання, проте є також суттєві відмінності, які варто враховувати при виборі матеріалу для навчання [33].

Обидва підручники використовують комплексний підхід до викладання теми похідних, включаючи графічний, аналітичний та числовий методи. Вони надають велику кількість прикладів і завдань, що сприяють кращому розумінню учнями теоретичного матеріалу. У підручниках подано основні правила диференціювання, властивості похідної, а також методи її застосування для дослідження функцій.

Проте є й відмінності. Підручник Мерзляка більш детально зосереджується на практичних завданнях, що включають графічний підхід. Учні мають змогу побачити візуальні приклади застосування похідної, що сприяє кращому розумінню геометричного змісту цього поняття. Завдання, що супроводжують теоретичний матеріал, допомагають учням застосовувати отримані знання на практиці. Наприклад, завдання на побудову графіків функцій та їхніх похідних дозволяють учням візуально оцінити поведінку функцій та знайти точки екстремуму.

Підручник Істера, в свою чергу, більше уваги приділяє аналітичному підходу. В ньому докладно пояснюються теоретичні аспекти диференціювання, наводяться численні докази і теореми, що стосуються похідних. Це дозволяє учням глибше зрозуміти основні принципи і методи диференціювання. Крім того, підручник містить завдання, які вимагають застосування формул і правил диференціювання для розв'язання складних задач [34].

Ефективність різних методів з точки зору розуміння учнями теми також варіюється. Графічний підхід є більш зрозумілим для учнів, які мають візуальний стиль навчання. Вони можуть краще зрозуміти концепцію похідної, бачачи її на графіках. Аналітичний підхід, з іншого боку, підходить

для учнів, які віддають перевагу логічному мисленню і теоретичним доказам. Числовий підхід є корисним для тих, хто прагне застосувати математику у практичних задачах, особливо у фізиці та економіці.

Приклади завдань з підручників також відрізняються за складністю та спрямованістю. У підручнику Мерзляка завдання більше орієнтовані на застосування графічних методів, наприклад, знайти точки перетину графіка функції з віссю абсцис або визначити проміжки зростання та спадання функції. У підручнику Істера завдання мають більш аналітичний характер, наприклад, довести теорему або розв'язати рівняння з використанням похідної [35].

Таким чином, обидва підручники мають свої переваги та недоліки. Підручник Мерзляка більш підходить для учнів, які краще сприймають візуальну інформацію, тоді як підручник Істера є ідеальним для тих, хто віддає перевагу глибокому теоретичному аналізу. Використання обох підручників у навчальному процесі може забезпечити всебічне розуміння теми похідних, розвинути різноманітні навички та підготувати учнів до успішного складання іспитів та подальшого навчання.

Практичне застосування знань з математики, зокрема теми похідних, є важливим аспектом навчального процесу, що допомагає учням зрозуміти зв'язок між теорією та реальними життєвими ситуаціями. У підручниках з математики автори часто намагаються показати, як математичні знання можуть бути застосовані на практиці, використовуючи різноманітні прикладні задачі.

Зв'язок теорії з практикою у підручниках представлений через завдання, які демонструють використання похідних у реальних життєвих ситуаціях. Наприклад, учні можуть зустріти задачі, що стосуються швидкості зміни різних величин, таких як швидкість автомобіля, зміна температури, або зростання населення. Це дозволяє учням побачити, як математичні знання застосовуються для вирішення конкретних проблем, і як важливо володіти такими знаннями для розуміння та аналізу реальних процесів.

Застосування похідних у реальних життєвих ситуаціях може включати аналіз економічних даних, прогнозування ринкових тенденцій, оптимізацію виробничих процесів або навіть моделювання природних явищ. Наприклад, задачі з економіки можуть включати оптимізацію прибутку або витрат, де використання похідних допомагає знайти максимуми і мінімуми функцій. У фізиці похідні застосовуються для визначення швидкості і прискорення об'єктів, що рухаються, а також для аналізу електричних і механічних систем.

Приклади прикладних задач у підручниках ілюструють ці застосування. У підручнику Мерзляка є задачі, які вимагають від учнів знайти точки максимуму або мінімуму функції, що моделює певний процес. Наприклад, задача на знаходження максимальної площі прямокутника при фіксованому периметрі. Такі задачі допомагають учням зрозуміти, як використовувати похідні для оптимізації і прийняття рішень [36].

У підручнику Істера також представлено завдання, що демонструють застосування похідних у різних контекстах. Наприклад, завдання на аналіз кривих попиту і пропозиції в економіці, де похідні використовуються для визначення точок рівноваги. Це дозволяє учням побачити, як математичні концепції використовуються в економічних моделях і як вони можуть бути застосовані для аналізу реальних економічних процесів.

Загалом, практичне застосування знань з теми похідних допомагає учням не тільки зрозуміти теоретичні аспекти математики, але й побачити їхню цінність у реальному світі. Це сприяє формуванню у учнів стійкої мотивації до навчання, розвитку критичного мислення та вмінь застосовувати отримані знання для вирішення різноманітних завдань і проблем. Вивчення прикладних аспектів похідних також готує учнів до майбутньої професійної діяльності, де математичні знання можуть бути необхідними для успіху у багатьох сферах.

2.3. Рекомендації щодо покращення процесу вивчення похідних у школах

Аналіз поточного стану викладання похідних у школах свідчить про різноманітність методів та підходів, які використовуються вчителями для засвоєння цієї важливої теми. Основними методами викладання є графічний, аналітичний та числовий підходи, кожен з яких має свої особливості та переваги. Графічний підхід базується на візуалізації поняття похідної через побудову графіків та ілюстрацій. Це дозволяє учням краще зрозуміти геометричний зміст похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції. Використання графічних методів є ефективним на початкових етапах вивчення, оскільки допомагає учням візуально усвідомити зміни функції та її похідної.

Аналітичний підхід зосереджується на теоретичних аспектах, правилах та формулах диференціювання. Учні вивчають основні правила диференціювання, такі як правило суми, різниці, добутку та частки, а також правило ланцюга для складених функцій. Аналітичний підхід є незамінним для глибокого розуміння теоретичних основ диференціювання та дозволяє учням застосовувати знання у розв'язанні складних математичних задач. Числовий підхід передбачає використання числових методів для наближеного обчислення похідних, що є корисним для практичних застосувань, де аналітичні методи можуть бути занадто складними або неможливими [37].

Незважаючи на різноманітність методів, існують основні труднощі, з якими стикаються учні при вивченні похідних. Однією з таких труднощів є абстрактність поняття похідної, що може бути складним для розуміння на початкових етапах. Учні часто мають труднощі з усвідомленням взаємозв'язку між функцією та її похідною, а також з розумінням геометричного та фізичного змісту похідної. Візуалізація за допомогою графіків може допомогти подолати ці труднощі, проте не всі учні мають достатні навички для роботи з графіками.

Іншою проблемою є складність правил та формул диференціювання, які вимагають від учнів високого рівня абстрактного мислення та логіки. Вивчення правил диференціювання потребує постійного тренування та розв'язання великої кількості задач, що може бути викликом для учнів з недостатньою математичною підготовкою. Крім того, учні часто стикаються з труднощами при застосуванні теоретичних знань до розв'язання прикладних задач, особливо коли йдеться про задачі з реального життя, які вимагають інтеграції знань з різних розділів математики [38].

Також варто відзначити, що рівень підготовки вчителів та їхня здатність ефективно пояснювати складні математичні концепції відіграють ключову роль у процесі вивчення похідних. Вчителі повинні бути готові адаптувати методи викладання до індивідуальних потреб учнів, використовувати різноманітні підходи та забезпечувати інтерактивність навчального процесу. Недостатня підготовка або застарілі методи викладання можуть суттєво знижувати ефективність засвоєння матеріалу учнями.

Рекомендації щодо покращення методики викладання теми похідних включають кілька основних напрямків, які дозволяють зробити навчальний процес більш ефективним та зрозумілим для учнів. Використання графічного підходу є одним з ключових елементів. Розширення використання графіків та візуальних матеріалів допомагає учням краще зрозуміти геометричний зміст похідної. Візуалізація функцій та їх похідних на графіках дозволяє учням бачити, як зміна аргументу впливає на зміну значення функції. Це робить абстрактні математичні концепції більш доступними та зрозумілими. Інтерактивні уроки з використанням графічних програм, таких як GeoGebra чи Desmos, дозволяють учням самостійно будувати графіки, експериментувати з функціями та аналізувати результати. Це сприяє активному залученню учнів до навчального процесу та розвитку їхньої візуальної уяви.

Покращення аналітичного підходу включає введення більшої кількості прикладів з реального життя. Застосування похідних у різних сферах, таких

як економіка, фізика, біологія, допомагає учням побачити практичне значення математичних знань. Наприклад, задачі на оптимізацію витрат або прибутку в економіці, аналіз швидкості руху в фізиці або зростання популяції в біології можуть значно підвищити інтерес учнів до вивчення математики. Поглиблення теоретичних знань через розв'язування складніших задач дозволяє учням краще зрозуміти основні принципи диференціювання та навчитися застосовувати їх у різних контекстах. Це сприяє розвитку логічного мислення та здатності до абстрактного мислення.

Використання числового підходу також є важливим елементом покращення методики викладання. Впровадження числових методів для обчислення похідних дозволяє учням використовувати наближені методи для розв'язання задач, де точне аналітичне розв'язання є складним або неможливим. Практичні заняття з використанням числових методів допомагають учням закріпити знання та вміння на практиці. Наприклад, обчислення похідних за допомогою скінченних різниць або числових методів інтеграції дозволяє учням бачити, як теоретичні знання застосовуються у реальних завданнях.

Інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес є ключовим чинником підвищення ефективності викладання математики, зокрема теми похідних. Використання комп'ютерних програм та онлайн ресурсів дозволяє створити більш інтерактивне та залучаюче середовище для навчання, що сприяє кращому розумінню складних математичних концепцій. Рекомендації щодо вибору програмного забезпечення включають використання таких програм, як GeoGebra, Desmos та WolframAlpha. GeoGebra і Desmos дозволяють учням будувати графіки функцій, аналізувати їх поведінку та взаємодіяти з математичними моделями у реальному часі. WolframAlpha надає потужні інструменти для аналітичних розрахунків та вирішення математичних задач, що допомагає учням перевіряти свої рішення та отримувати додаткову інформацію про розв'язування задач [39].

Платформи для онлайн-навчання, такі як Khan Academy, Coursera та EdX, надають широкий спектр курсів та навчальних матеріалів, які можуть бути використані для викладання похідних. Khan Academy пропонує відеоуроки, інтерактивні вправи та тести, що допомагають учням самостійно вивчати матеріал та перевіряти свої знання. Coursera та EdX пропонують курси від провідних університетів світу, які можуть бути корисними для поглибленого вивчення теми та підвищення кваліфікації вчителів. Використання цих платформ у навчальному процесі дозволяє забезпечити доступ до якісних навчальних матеріалів та сприяє розвитку самостійного навчання [40].

Розробка та впровадження інтерактивних навчальних матеріалів є важливим кроком у покращенні викладання математики. Відеоуроки дозволяють учням переглядати пояснення вчителя у зручний для них час та темп, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу. Відеоуроки можуть включати як теоретичні пояснення, так і розв'язування прикладних задач, що допомагає учням зрозуміти практичне застосування теорії. Симуляції та інтерактивні підручники надають учням можливість взаємодіяти з математичними моделями, проводити експерименти та аналізувати результати. Це сприяє розвитку критичного мислення та навичок вирішення проблем.

Інтерактивні підручники, що містять гіперпосилання, інтерактивні графіки та анімації, роблять процес навчання більш залучаючим та цікавим для учнів. Використання таких підручників дозволяє учням краще зрозуміти складні математичні концепції та застосування похідних у різних контекстах. Наприклад, анімації можуть показувати, як змінюється нахил дотичної до графіка функції при зміні аргументу, що допомагає візуально усвідомити поняття похідної.

Активізація навчального процесу через інтерактивні методи є ключовим елементом у сучасній освіті, який сприяє підвищенню інтересу учнів до навчання та покращенню розуміння складних тем, таких як похідні. Одним із ефективних способів активізації є організація групових робіт та

проектів. Групові завдання дозволяють учням працювати разом, обмінюватися ідеями та досвідом, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу. Наприклад, групове завдання може полягати у створенні презентації на тему "Застосування похідних у різних галузях науки та техніки", де кожна група аналізує та презентує конкретний приклад застосування похідної у фізиці, економіці, біології чи інформатиці. Інший приклад групового проекту може бути пов'язаний з аналізом реальних даних, наприклад, дослідження зміни температури або рівня забруднення повітря впродовж певного періоду та використання похідних для визначення швидкості зміни цих показників.

Проведення дослідницьких завдань також відіграє важливу роль у навчальному процесі. Дослідницька діяльність дозволяє учням глибше зануритися у вивчення теми, розвинути навички самостійного дослідження та аналізу. Теми для дослідницьких проектів можуть бути різноманітними. Наприклад, учні можуть досліджувати історичний розвиток теорії похідних, аналізувати внесок відомих математиків, таких як Ісаак Ньютон або Готфрід Лейбніц, у розвиток цієї теорії. Інша тема може включати дослідження застосування похідних у сучасних технологіях, таких як аналіз даних у машинному навчанні або оптимізація виробничих процесів у промисловості. Дослідницькі проекти також можуть бути пов'язані з екологічними проблемами, наприклад, дослідження змін клімату та використання похідних для моделювання цих змін [41].

Роль дослідницької діяльності у розумінні похідних є надзвичайно важливою. По-перше, дослідження дозволяють учням самостійно знайти та опрацювати інформацію, що сприяє розвитку навичок критичного мислення та самостійного навчання. По-друге, дослідницька діяльність дозволяє учням бачити практичне застосування теоретичних знань, що підвищує їхню мотивацію до вивчення математики. По-третє, робота над дослідницькими проектами сприяє розвитку комунікативних навичок, вміння презентувати свої результати та аргументувати власну точку зору.

Підвищення мотивації учнів до вивчення похідних є одним із ключових завдань сучасної освіти, оскільки це дозволяє зробити навчальний процес більш ефективним та цікавим для учнів. Одним з найдієвіших способів підвищення мотивації є введення прикладних задач, що показують значення похідних у реальному житті. Прикладні задачі дозволяють учням побачити практичну цінність теоретичних знань та зрозуміти, як ці знання можуть бути застосовані у різних галузях.

Наприклад, у фізиці похідні використовуються для аналізу руху об'єктів. Задачі на знаходження швидкості та прискорення об'єкта, який рухається за певною траєкторією, дозволяють учням зрозуміти, як похідні використовуються для опису механічних процесів. В економіці похідні застосовуються для аналізу ринкових процесів. Задачі на оптимізацію прибутку або витрат, де потрібно знайти максимуми та мінімуми функцій, допомагають учням побачити, як математичні методи використовуються для прийняття бізнес-рішень. У біології похідні використовуються для моделювання зростання популяцій. Задачі на аналіз швидкості зростання або зниження популяції дозволяють учням зрозуміти, як математичні моделі допомагають вивчати екологічні процеси.

Використання гейміфікації у навчальному процесі також є ефективним способом підвищення мотивації учнів до вивчення похідних. Гейміфікація передбачає використання ігрових методів та елементів у навчанні, що робить процес навчання більш цікавим та захоплюючим. Наприклад, можна організувати математичні конкурси, де учні змагаються у розв'язанні задач на похідні. Такі конкурси можуть включати різні рівні складності задач, що дозволяє кожному учню знайти завдання відповідно до свого рівня підготовки. Ігрові методи, такі як математичні квести або вікторини, також сприяють активному залученню учнів до навчального процесу. Наприклад, квест, де учні мають пройти серію завдань на похідні, вирішуючи задачі та знаходячи підказки для наступних етапів, може стати захоплюючим способом повторення та закріплення знань [42].

Використання гейміфікації дозволяє створити позитивну атмосферу на уроках математики, де учні не бояться робити помилки та мають можливість навчатися через гру. Це сприяє розвитку командної роботи, комунікаційних навичок та вміння працювати у стресових ситуаціях. Гейміфікація також допомагає підвищити інтерес до навчання, оскільки учні бачать у навчальному процесі елементи гри, що робить його менш формальним та більш привабливим.

Висновки до розділу 2

У 2 розділі проведено всебічний аналіз шкільних навчальних програм та підручників з математики щодо викладання теми «Похідна». Похідна є одним із ключових понять математичного аналізу, що має велике значення як у теоретичних, так і в прикладних аспектах. Аналіз навчальних програм показав, що вивчення теми похідної значно варіюється залежно від рівня: на рівні стандарту учні знайомляться з основами поняття похідної, її геометричним та фізичним змістом, а також основними правилами диференціювання. Профільний рівень передбачає глибше вивчення, включаючи похідні складених функцій, функцій від кількох змінних, а також застосування похідної для розв'язання складних прикладних задач.

Програми на профільному рівні спрямовані на підготовку учнів до подальшого навчання у вищих навчальних закладах, що вимагає високого рівня математичної підготовки та критичного мислення. Важливим аспектом навчального процесу є також методичні підходи до викладання теми. Використання графічного, аналітичного та числового підходів дозволяє забезпечити різностороннє розуміння теми та сприяє засвоєнню матеріалу учнями з різними навчальними стилями.

Аналіз підручників показав, що більшість з них використовують комплексний підхід, надаючи теоретичний матеріал разом із практичними задачами та прикладами з реального життя. Це дозволяє учням бачити зв'язок теорії з практикою та використовувати знання для розв'язання реальних задач.

Зокрема, підручники Мерзляка та Істера пропонують різні підходи: перший надає більше практичних задач із графічними методами, а другий — глибше охоплює аналітичні аспекти, що є важливим для учнів, які прагнуть оволодіти математичними основами більш детально.

Рекомендації щодо покращення викладання теми похідної у школах включають розширення використання інтерактивних методів, таких як візуалізація за допомогою графічних програм, застосування інформаційно-комунікаційних технологій та гейміфікація, що підвищує мотивацію учнів. Інтеграція таких методів робить процес навчання більш привабливим та ефективним. Водночас, важливим є врахування індивідуальних потреб учнів, розширення можливостей для самостійного навчання та доступ до онлайн-ресурсів.

РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

3.1. Етапи побудови графіка функції з використанням похідних

Побудова графіка функції є складним, але надзвичайно важливим процесом у математиці, який дозволяє зрозуміти поведінку функції на всьому проміжку її визначення. Цей процес включає попередній аналіз функції, знаходження похідних, дослідження критичних точок, аналіз проміжків монотонності, дослідження другої похідної та знаходження асимптот. Кожен із цих етапів має своє значення та сприяє створенню точного графічного зображення функції, яке відображає всі її ключові властивості [43].

Початковий етап побудови графіка функції включає попередній аналіз функції, що є ключовим для правильного розуміння її поведінки на всьому проміжку визначення. Розглянемо це на конкретному прикладі функції, взятій з підручника.

Для прикладу візьмемо функцію $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Першим кроком є дослідження області визначення функції. Для цього необхідно знайти всі значення x , при яких функція визначена, тобто всі значення, що не призводять до розривів або невизначеностей. У даному прикладі функція визначена всюди, крім точки $x=1$, де знаменник дорівнює нулю. Отже, область визначення функції $f(x)$ — це всі дійсні числа, крім $x=1$ (запис: $D(f): x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$).

Далі аналізуємо парність або непарність функції. Для цього потрібно перевірити, чи виконується рівність $f(-x)=f(x)$ (для парної функції) або $f(-x)=-f(x)$ (для непарної функції). Обчисливши $f(-x) = \frac{-2x+3}{-x-1}$ бачимо, що ця функція не відповідає жодній із вказаних рівностей, отже, вона не є ані парною, ані непарною.

Наступним кроком є виявлення періодичності функції. Оскільки функція раціональна і складається з многочленів першого степеня в

чисельнику і знаменнику, вона не має періодичності. Періодичність зазвичай властива тригонометричним функціям або складним комбінаціям многочленів та тригонометричних виразів, які повторюють свої значення через певний інтервал [44].

Таким чином, попередній аналіз функції дозволяє виявити ключові особливості функції перед початком побудови її графіка. Ми визначили область визначення, з'ясували відсутність парності та непарності, а також виявили, що функція не є періодичною. Ці дані допомагають краще зрозуміти поведінку функції і підготуватися до подальших етапів побудови її графіка, зокрема аналізу похідних та побудови точного графіка функції.

Наступний етап дослідження функції для побудови графіка – знаходження точок перетину з осями координат. Графік перетинає вісь ОХ в точці, де $f(x)=0$, отже точка перетину графіка даної функції з віссю ОХ має координати $(-1,5; 0)$. А вісь ОУ графік функції перетинає в точці, де $x=0$. Виконавши обчислення, знаходимо значення $f(x)$ при $x=0$. Отже, графік даної функції перетинає вісь ОУ в точці $(0; -3)$.

Далі шукаємо похідну функції $f'(x)$ для функції $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ за правилом частки: $f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1} \right)' = \frac{(2x+3)' \cdot (x-1) - (2x+3) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) - (2x+3) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2}$

Визначаємо критичні точки, в яких $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує. В розглядуваній функції критичною є точка $x=1$, при якій $f'(x)$ не існує. Бачимо, що при $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) < 0$, отже графік функції спадає на всій області визначення, а критична точка є точкою перегину.

За необхідності можна знайти координати додаткових точок і приступати до побудови графіка функції. Побудову даного графіка за допомогою онлайн-ресурсу Desmos зображено на рисунку.

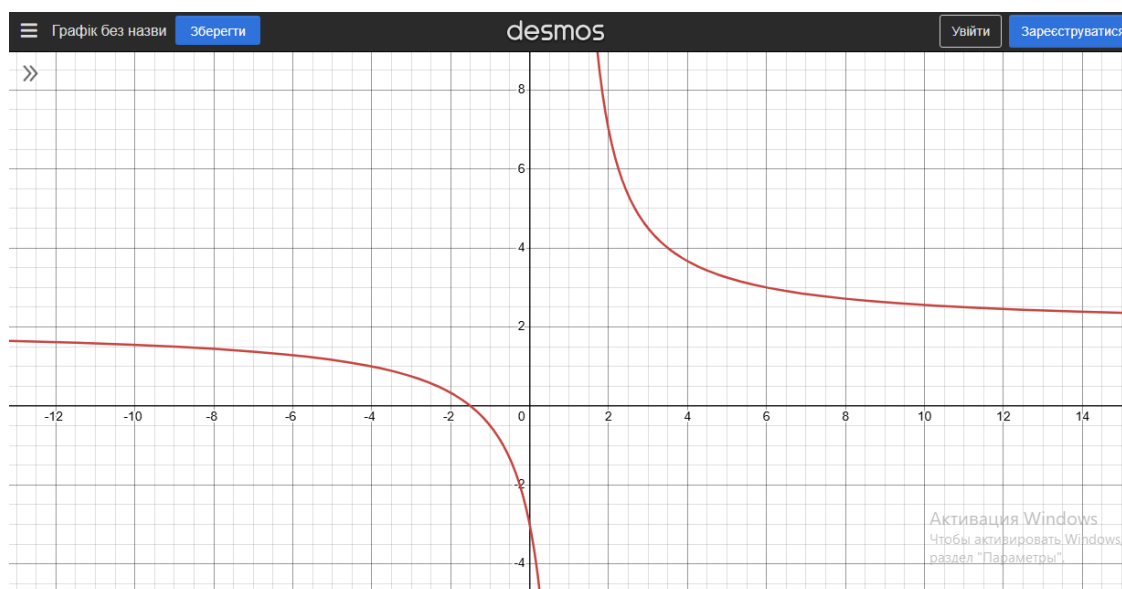


Рис.1. Графік функції $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ зображений в онлайн-ресурсі Desmos.

Ключовим етапом є знаходження самих похідних, оскільки саме вони дають важливу інформацію про поведінку функції, такі як точки екстремуму, проміжки зростання та спадання, а також точки перегину. Розглянемо цей процес на прикладі ще однієї функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Першим кроком є обчислення першої похідної функції. Перша похідна $f'(x)$ характеризує швидкість зміни функції, тобто як змінюється функція по мірі зміни значення x . Для функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ обчислюємо похідну за правилом диференціювання:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(2x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Похідна $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ використовується для знаходження критичних точок функції, де похідна дорівнює нулю або не існує. Знайдемо ці точки, розв'язавши рівняння $3x^2 - 6x + 2 = 0$. Використовуючи дискримінант:

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 36 - 24 = 12$$

Корені рівняння знаходимо за формулою:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Таким чином, критичні точки функції — це $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ та $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Другим кроком є обчислення другої похідної, яка допомагає визначити опуклість функції та знайти точки перегину. Друга похідна $f''(x)$ для нашої функції буде:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 6x + 2) = 6x - 6$$

Друга похідна дає нам інформацію про те, на яких інтервалах функція є опуклою або вгнутою. Наприклад, при $f''(x) > 0$ функція є опуклою вниз (вигинається догори), а при $f''(x) < 0$ — вгнутою (вигинається донизу). Для даного прикладу функція має точку перегину, де $f''(x) = 0$, тобто при $x = 1$.

Вищі похідні, такі як третя похідна, можуть бути необхідними для більш детального аналізу, особливо в контексті складніших функцій, де важливо визначити зміни в конвексності (опуклості) або точки перегину з більш складною поведінкою. У нашому прикладі третя похідна $f'''(x) = 6$ є константою, що свідчить про відсутність додаткових складностей у зміні форми графіка [45].

Графік розглядуваної функції, побудований в ресурсі GeoGebra, зображено на рисунку, де виділено точки екстремуму й перетину з осями.

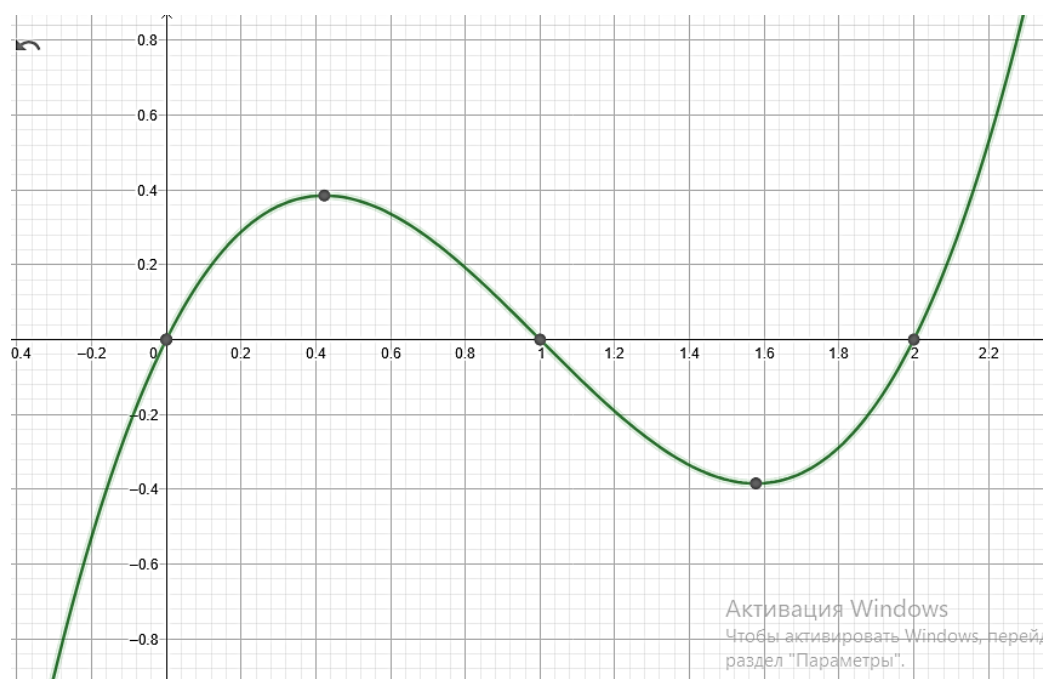


Рис.2. Графік функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. в GeoGebra.

Дослідження критичних точок функції є важливим етапом у побудові її графіка, оскільки саме критичні точки дозволяють визначити екстремуми (максимуми та мінімуми) функції, а також точки перегину. Ці точки знаходяться за допомогою першої похідної функції, яка вказує на швидкість зміни значення функції відносно аргументу.

Для того щоб знайти критичні точки функції, необхідно обчислити першу похідну $f'(x)$ і визначити значення x , при яких ця похідна дорівнює нулю або не існує. Це пов'язано з тим, що в критичних точках функція може змінювати свій характер: переходити з росту на спад або навпаки, що свідчить про наявність екстремуму, або ж змінювати напрям опуклості, що вказує на точку перегину.

Розглянемо приклад функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ для ілюстрації процесу знаходження та класифікації критичних точок. Спочатку обчислимо першу похідну:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Тепер знаходимо значення x , при яких $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Розв'язавши це квадратне рівняння, отримуємо:

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ці значення $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ та $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ є критичними точками функції. Наступним кроком є класифікація цих точок. Для цього аналізуємо знак першої похідної на інтервалах, які утворюються критичними точками. Якщо похідна змінює знак з плюса на мінус, то критична точка є максимумом функції. Якщо ж похідна змінює знак з мінуса на плюс, то це точка мінімуму.

У даному прикладі, перевіряючи знак похідної на інтервалах $(-\infty, x_2)$, (x_2, x_1) та (x_1, ∞) , можна визначити, що $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ функція має мінімум, а при $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ — максимум.

Далі варто дослідити можливість існування точки перегину, що визначається за допомогою другої похідної $f''(x)$. Якщо друга похідна змінює знак в критичній точці, то ця точка є точкою перегину. У даному випадку:

$$f''(x) = 6x - 6$$

Рівняння $f''(x) = 0$ дає $x = 1$. Це означає, що при $x = 1$ функція змінює опуклість і має точку перегину.

Аналіз проміжків монотонності функції є важливим етапом у побудові її графіка, оскільки дозволяє визначити, на яких інтервалах функція зростає, а на яких — спадає. Для цього використовується перша похідна функції, яка вказує на швидкість зміни значення функції залежно від зміни аргументу.

Першим кроком у визначенні проміжків зростання та спадання функції є обчислення першої похідної $f'(x)$. Знак цієї похідної на різних інтервалах області визначення функції вказує на характер її монотонності. Якщо $f'(x) > 0$ на певному інтервалі, це означає, що функція зростає на цьому інтервалі. Якщо ж $f'(x) < 0$, то функція спадає. Монотонність функції змінюється в точках, де $f'(x) = 0$ або похідна не існує.

Розглянемо цей процес на прикладі функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Спочатку обчислимо першу похідну:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Далі знаходимо корені рівняння $f'(x) = 0$, щоб визначити критичні точки, у яких функція може змінювати свій характер монотонності:

$$3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо два корені:

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ці значення розбивають область визначення функції на три інтервали: $(-\infty, x_2)$, (x_2, x_1) та (x_1, ∞) .

Тепер аналізуємо знак першої похідної на кожному з цих інтервалів. Для цього достатньо обрати довільне значення x з кожного інтервалу та підставити його у похідну $f'(x)$. Наприклад, обираємо значення $x = 0$ для інтервалу $(-\infty, x_2)$, $x = 1$ для інтервалу (x_2, x_1) і $x = 2$ для інтервалу (x_1, ∞) :

- на інтервалі $(-\infty, x_2)$, при $x = 0$, маємо $f'(0) = 2$, отже, $f'(x) > 0$, функція зростає на цьому інтервалі;
- на інтервалі (x_2, x_1) , при $x = 1$, маємо $f'(1) = -1$, отже, $f'(x) < 0$, функція спадає на цьому інтервалі;
- на інтервалі (x_1, ∞) , при $x = 2$, маємо $f'(2) = 2$, отже, $f'(x) > 0$, функція знову зростає на цьому інтервалі.

Дослідження другої похідної функції є важливим етапом при побудові її графіка, оскільки саме друга похідна надає інформацію про форму графіка: його опуклість або вгнутість, а також про наявність точок перегину. Точки перегину є тими точками, в яких графік функції змінює свою опуклість, тобто переходить від опуклості до вгнутості або навпаки.

Першим кроком у дослідженні другої похідної є її обчислення. Якщо для функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ перша похідна становить $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, то друга похідна, яка є похідною від $f'(x)$, буде:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 6x + 2) = 6x - 6$$

Для знаходження точок перегину необхідно визначити значення x , при яких друга похідна дорівнює нулю або не існує. В даному прикладі рівняння $f''(x) = 0$ має вигляд:

$$6x - 6 = 0$$

Розв'язавши це рівняння, отримуємо $x = 1$. Отже, точка $x = 1$ є потенційною точкою перегину. Щоб переконатися, що це дійсно точка перегину, необхідно проаналізувати знак другої похідної на інтервалах до і після цієї точки.

Якщо друга похідна змінює знак при переході через точку $x = 1$, це підтверджує наявність точки перегину. Розглянемо знак $f''(x)$ на інтервалах $(-\infty, 1)$ та $(1, \infty)$:

- на інтервалі $(-\infty, 1)$ для $x < 1$, наприклад при $x = 0$, маємо $f''(0) = -6$, отже, $f''(x) < 0$, і функція є вгнутою на цьому інтервалі;
- на інтервалі $(1, \infty)$ для $x > 1$, наприклад при $x = 2$, маємо $f''(2) = 6$, отже, $f''(x) > 0$, і функція є опуклою на цьому інтервалі.

Таким чином, точка $x = 1$ є дійсно точкою перегину, оскільки графік функції змінює свою опуклість з вгнутої на опуклу. Це означає, що графік функції у точці $x = 1$ переходить від вигину вниз до вигину догори.

Визначення проміжків опуклості та вгнутості функції дозволяє детальніше описати форму графіка. На інтервалах, де друга похідна додатна $f''(x) > 0$, функція є опуклою вниз, а на інтервалах, де друга похідна від'ємна $f''(x) < 0$, функція є вгнутою. Це допомагає зрозуміти, як графік функції поводить себе на різних ділянках, і чітко уявити його форму.

Знаходження асимптот функції є важливим етапом при побудові її графіка, оскільки асимптоти відображають поведінку функції на нескінченності або в точках, де функція не визначена. Існують три основні типи асимптот: вертикальні, горизонтальні та похилі, кожна з яких має своє значення при аналізі функції [46].

Визначення вертикальних асимптот починається з аналізу області визначення функції. Вертикальні асимптоти виникають у тих точках, де функція прямує до нескінченності або мінус нескінченності при наближенні до певного значення аргументу. Найчастіше такі асимптоти з'являються у

функціях, які мають розриви в області визначення, зокрема у раціональних функціях, де знаменник дорівнює нулю. Наприклад, для функції $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ вертикальна асимптота виникає в точці $x = 1$, оскільки в цій точці знаменник перетворюється на нуль, а значення функції прямує до нескінченності.

Горизонтальні асимптоти характеризують поведінку функції на нескінченності, тобто коли аргумент прямує до плюс або мінус нескінченності. Горизонтальна асимптота визначається як межа функції при x прямує до нескінченності або мінус нескінченності. Для функцій, які мають фіксоване значення на нескінченності, така асимптота буде лінією $y = c$, де c — межа функції. Наприклад, для функції $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ горизонтальну асимптоту можна знайти, розглянувши межу при $x \rightarrow \infty$ прямує до нескінченності:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 2$$

Отже, горизонтальна асимптота цієї функції — це пряма $y = 2$.

Похилі асимптоти виникають у випадках, коли функція на нескінченності поводить подібно до лінійної функції, але не є ні строго горизонтальною, ні вертикальною. Такі асимптоти визначаються як лінія, що наближається до графіка функції на нескінченності. Похилу асимптоту можна знайти, обчисливши ліміт відношення функції до x при x прямує до нескінченності, якщо цей ліміт дає лінійну функцію $y = kx + b$. Для функції $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ похила асимптота відсутня, оскільки горизонтальна асимптота вже визначена, і вона повністю описує поведінку функції на нескінченності.

Завдяки послідовному аналізу всіх зазначених аспектів, ми отримуємо повне уявлення про форму графіка функції, її опуклість, вгнутість, а також про точки, в яких функція змінює свою поведінку. Також важливо враховувати асимптоти, які вказують на поведінку функції на нескінченності

або в точках розриву. Сукупність цих кроків забезпечує створення детального та точного графіка, що є важливим інструментом у вирішенні математичних задач та вивченні властивостей функцій.

3.2. Приклади побудови графіків типових функцій

Побудова графіків типових функцій з використанням похідних є одним з основних методів у математичному аналізі, що дозволяє детально вивчити властивості функцій та їхню поведінку на всій області визначення. Розглянемо кілька прикладів таких функцій та процес побудови їх графіків.

Перший приклад — це квадратична функція виду $y = ax^2 + bx + c$. Ця функція є параболою, форма та напрямок якої визначаються коефіцієнтами a , b та c . Для побудови графіка цієї функції важливо знайти її вершину, яка визначається за формулою $x_{\text{вершина}} = -\frac{b}{2a}$. Знаходимо також значення функції в цій точці $y_{\text{вершина}} = f(x_{\text{вершина}})$.

Перша похідна функції $y' = 2ax + b$ дорівнює нулю у точці вершини, що підтверджує наявність екстремуму. Якщо $a > 0$, парабола спрямована догори, і вершина є мінімумом. Якщо $a < 0$, парабола спрямована вниз, і вершина є максимумом. Наносимо вершину та декілька точок на графік і з'єднуємо їх плавною кривою.



Рис. 3. Графік квадратичної функції виду $y = ax^2 + bx + c$

Другий приклад — це кубічна функція виду $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Така функція має більш складну поведінку і може мати один або кілька екстремумів та точок перегину. Перша похідна $y' = 3x^2 - 6x + 2$ використовується для знаходження критичних точок. Знаходимо корені рівняння $3x^2 - 6x + 2 = 0$ і визначаємо точки екстремумів. Аналіз знака першої похідної дозволяє визначити проміжки зростання та спадання функції. Друга похідна $y'' = 6x - 6$ допомагає знайти точки перегину, де функція змінює свою опуклість, і відповідно визначити проміжки опуклості та вгнутості. Після цього графік будується шляхом нанесення критичних точок, точок перегину та з'єднання їх кривою з урахуванням знаків похідних.

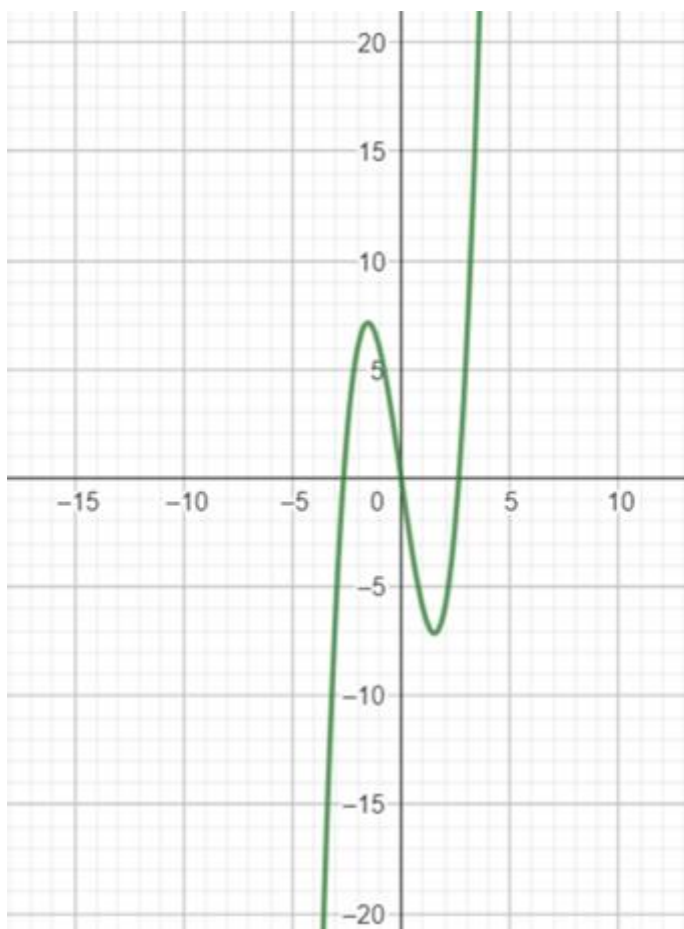


Рис. 4. Графік кубічної функції виду $y = x^3 - 3x^2 + 2x$.

Третій приклад — це раціональна функція, наприклад, $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Ця функція має вертикальну асимптоту в точці $x = 1$, де знаменник дорівнює

нулю. Перша похідна $y' = \frac{2(x-1)-(2x+3)}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$ показує, що функція спадає на всій області визначення, окрім точки розриву. Друга похідна $y'' = \frac{10}{(x-1)^3}$ вказує на опуклість графіка на всьому інтервалі також важливо знайти горизонтальну асимптоту, яка визначається межею функції при x прямує до нескінченності. У цьому випадку горизонтальна асимптота — це пряма $y = 2$. Побудова графіка включає нанесення асимптот, перетину з віссю ординат, та побудову кривої з урахуванням знаків похідних

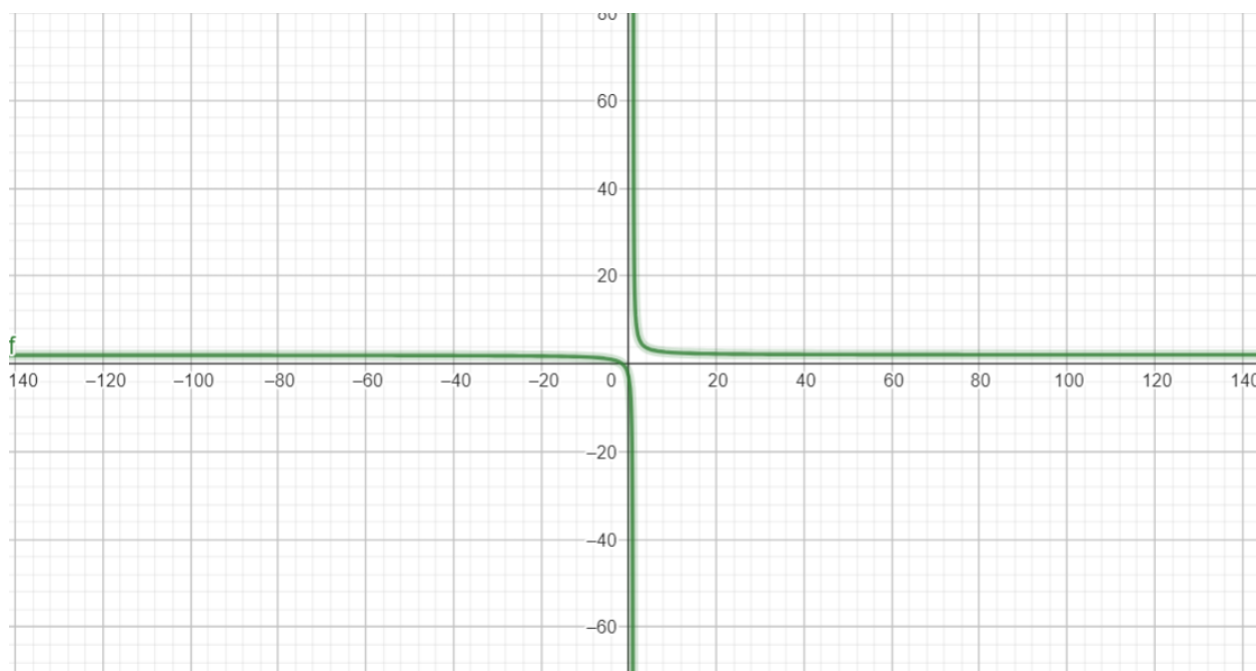


Рис. 5. Графік раціональної функції $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Кожен з наведених прикладів показує, як похідні дозволяють отримати важливу інформацію про поведінку функції, що суттєво спрощує процес побудови її графіка Використання похідних допомагає знайти критичні точки, екстремуми, точки перегину, визначити проміжки монотонності та опуклості, а також врахувати асимптоти, що робить графік більш точним і повним

Після визначення всіх ключових характеристик функції за допомогою похідних ми можемо перейти до безпосередньої побудови графіка. Спочатку на координатній площині наносяться всі знайдені критичні точки, точки

перегину, а також перетини з осями координат. Ці точки служать опорними для побудови графіка, і на їх основі визначаються загальні контури функції.

Потім проводиться побудова графіка з урахуванням проміжків монотонності та опуклості, що були визначені за допомогою першої та другої похідних. Наприклад, якщо на певному проміжку функція зростає (згідно з першою похідною), то графік на цьому інтервалі буде підніматися від однієї критичної точки до іншої. Аналогічно, якщо функція є опуклою на певному інтервалі (згідно з другою похідною), то графік на цьому проміжку матиме відповідну форму [47].

Останнім етапом є врахування асимптот. Вертикальні асимптоти показують місця, де графік різко прямує до нескінченності, що необхідно відобразити на графіку як лінії, до яких графік наближається, але не перетинає. Горизонтальні та похилі асимптоти демонструють поведінку функції на нескінченності: графік поступово наближається до цих ліній, що відображає стабілізацію значень функції при великих значеннях аргументу.

По завершенні всіх цих етапів ми отримуємо повний і точний графік функції, який відображає всі її важливі характеристики та особливості. Використання похідних дозволяє не лише побудувати графік швидко та ефективно, але й глибше зрозуміти внутрішню структуру функції, що є надзвичайно корисним для подальшого аналізу та застосування цих знань у вирішенні практичних задач. Таким чином, побудова графіків функцій з використанням похідних є важливим інструментом у математичному аналізі, який дозволяє точно та всебічно досліджувати поведінку різних типів функцій.

3.3. Застосування комп'ютерних технологій для дослідження та побудови графіків функцій

Застосування комп'ютерних технологій для дослідження та побудови графіків функцій у контексті уроків математики в старших класах має важливе значення для підвищення ефективності навчального процесу.

Використання спеціалізованого програмного забезпечення дозволяє учням не лише швидше та точніше виконувати побудову графіків, але й глибше зрозуміти властивості та поведінку функцій. Одним із найпоширеніших інструментів для цього є графічні калькулятори та комп'ютерні програми, такі як GeoGebra, Desmos та Wolfram Alpha. Ці програми дозволяють миттєво будувати графіки функцій за введеними формулами, проводити аналіз похідних, знаходити точки екстремумів, перегину та інші ключові характеристики. Завдяки цьому учні мають можливість швидко перевірити правильність своїх розрахунків, що особливо важливо при виконанні складних завдань, де ручне обчислення може зайняти багато часу.

Розглянемо приклад застосування онлайн-інструменту Wolfram Alpha. На рисунку нижче подано графік функції, яку ми розглядали в одному з попередніх розділів.

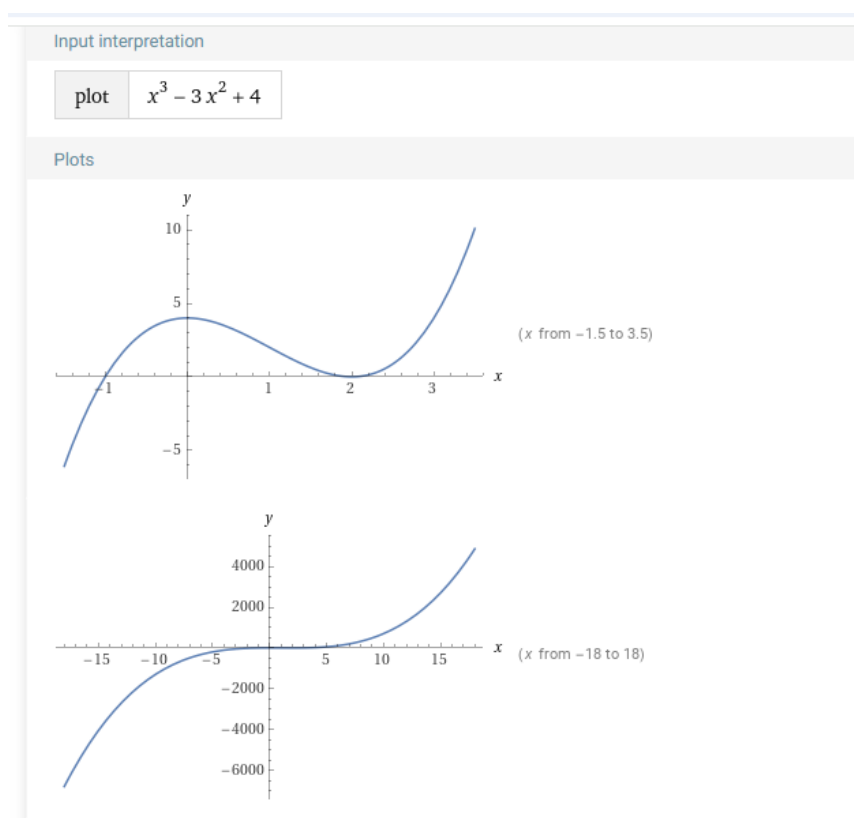


Рис. 6. Графік функції побудований в графічному калькуляторі Wolfram Alpha.

Крім того, комп'ютерні технології дають змогу досліджувати функції, змінюючи параметри в реальному часі, що допомагає учням краще зрозуміти, як зміни у формулах впливають на форму графіка. Це стає особливо

корисним при вивченні параметричних функцій або дослідженні сімейств функцій. Учні можуть спостерігати, як зміна коефіцієнтів у рівнянні функції впливає на її графік, що дозволяє їм краще зрозуміти абстрактні математичні поняття через візуалізацію. Використання комп'ютерних програм також сприяє розвитку навичок самостійного навчання, оскільки учні можуть експериментувати з різними функціями та параметрами, досліджуючи їхні властивості самостійно або в групах. Це не лише допомагає закріпити матеріал, але й сприяє розвитку критичного мислення та аналітичних здібностей [48].

Інтеграція комп'ютерних технологій у процес навчання дозволяє зробити уроки математики більш динамічними та цікавими. Використання інтерактивних методів навчання, таких як електронні підручники, онлайн-курси та відеоуроки, також значно полегшує процес освоєння складних тем. Учні можуть не лише будувати графіки, але й проходити тестування, виконувати інтерактивні завдання та отримувати миттєвий зворотний зв'язок від вчителя або програмного забезпечення. Це підвищує мотивацію до навчання, оскільки учні бачать реальні результати своєї роботи та можуть відразу ж коригувати помилки.

Нами було створено в онлайн-ресурсі Prezi для уроку алгебри в 10 класі презентацію, яку доцільно використовувати з метою кращого засвоєння учнями теми дослідження функції за допомогою похідної для побудови її графіка. Презентація включає загальний алгоритм дослідження функції та приклад покрокового розв'язання конкретної задачі й ілюструє графік функції. Презентацію можна гортати, приближуючи кожен компонент зі схеми. Переглянути її можна за посиланням <https://prezi.com/view/tlhwgQ30LZy0by3Bzjyd/?authuser=0>. На рисунку нижче подано загальний макет презентації.

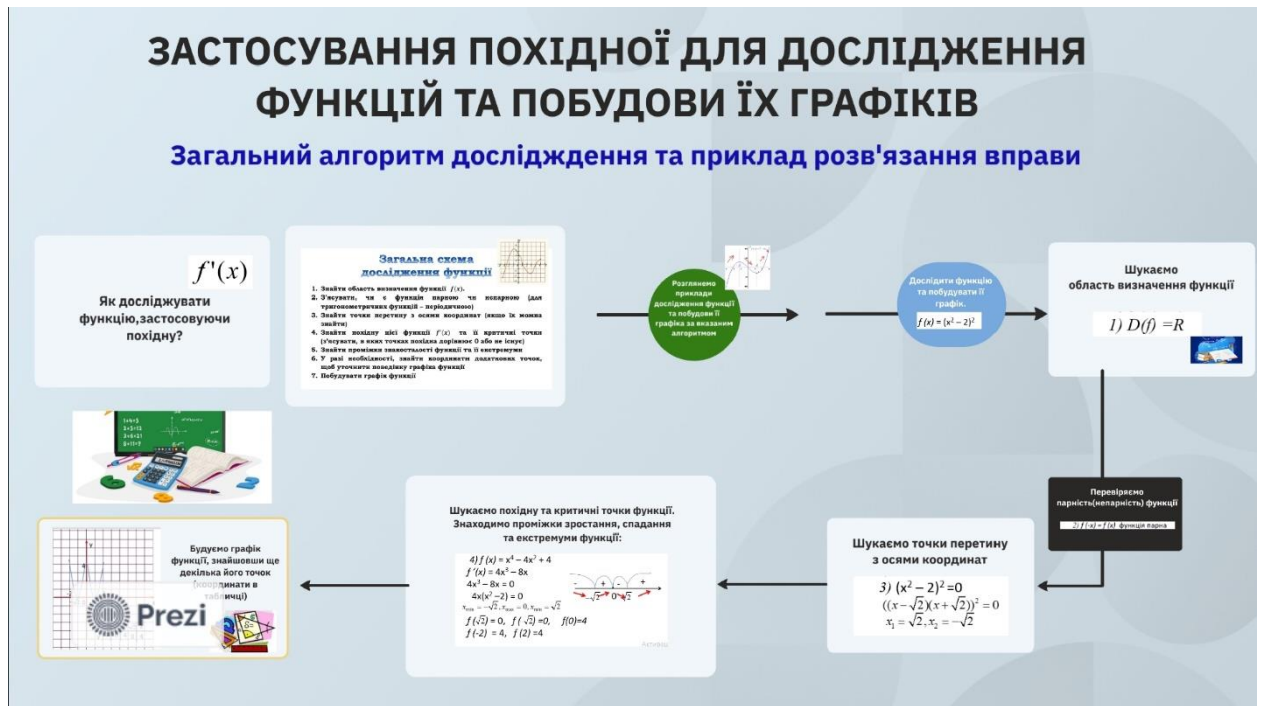


Рис. 7. Презентація для уроку в 10 класі, згенерована в Prezi.com

Крім того, в онлайн-ресурсі Canva розроблено інфографіку, на якій проілюстровано алгоритм дослідження функцій за допомогою першої та другої похідної, де до кожного етапу дослідження є більш детальне пояснення та приклади. Дана інфографіка візуалізує поданий навчальний матеріал, що допомагає учням краще його засвоїти і глибше зрозуміти, а також допомагає зробити процес вивчення похідної більш цікавим та доступним. Переглянути інфографіку можна за посиланням https://www.canva.com/design/DAGXmrPMqU0/Fn0Bh5rb3hdSAfWmTZ8RiA/edit?utm_content=DAGXmrPMqU0&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton.

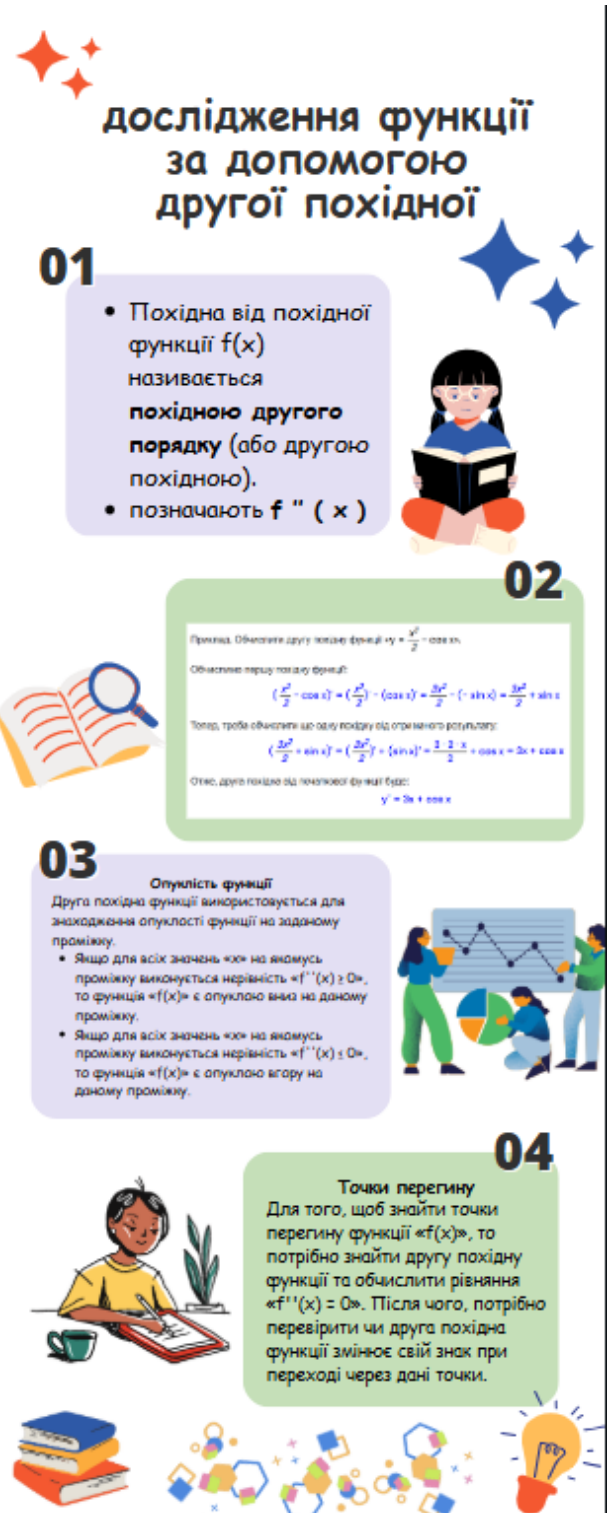


Рис.8. Інфографіка для вивчення дослідження функцій за допомогою похідної

Для закріплення вивчених знань про алгоритм дослідження функцій з використанням похідної, було розроблено інтерактивну гру в онлайн-ресурсі learningapps.org. Дана гра пропонує впорядкувати кроки для знаходження екстремумів функції, переставляючи описані етапи в правильному порядку. Гра доступна за посиланням <https://learningapps.org/watch?v=pqbhe9st524>.

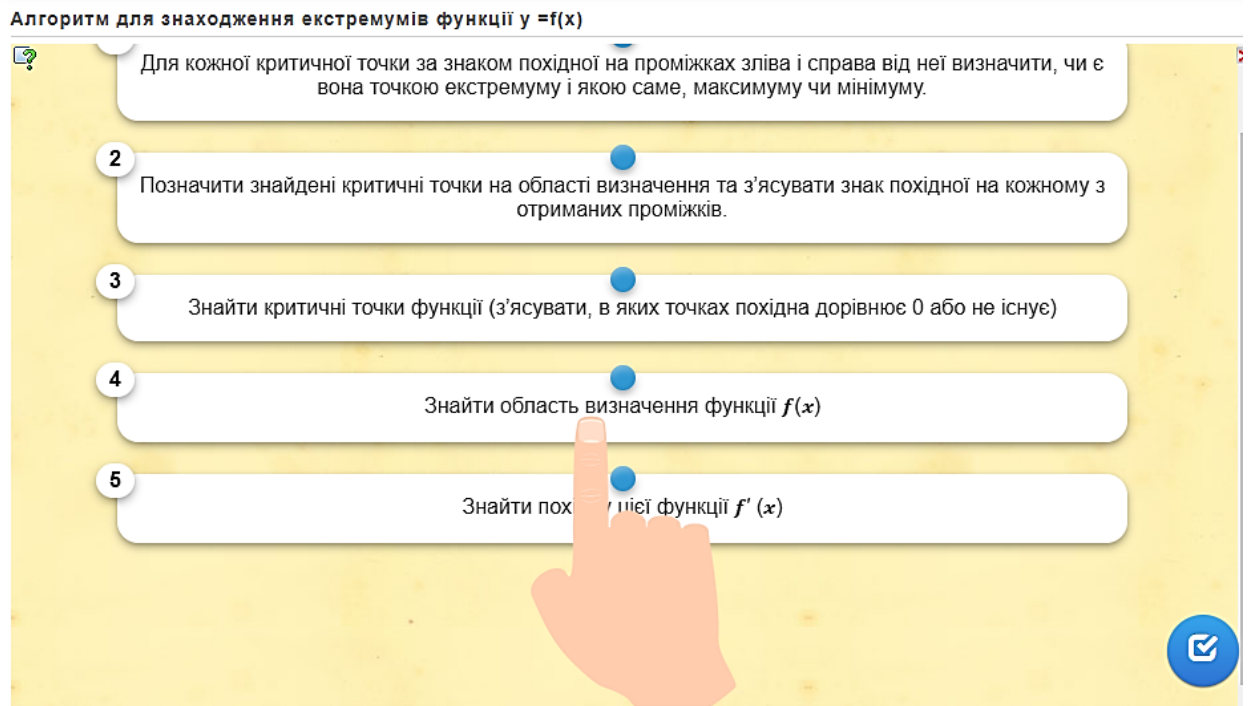


Рис. 9. Гра «Алгоритм для знаходження екстремумів функції $y=f(x)$ ».

Таким чином, застосування комп'ютерних технологій для дослідження та побудови графіків функцій у старших класах відкриває нові можливості для більш ефективного навчання математики. Воно дозволяє зробити навчальний процес більш інтерактивним, візуальним та доступним, що сприяє глибшому розумінню математичних концепцій та підвищує інтерес учнів до предмета. Впровадження таких технологій на уроках математики допомагає учням не лише краще підготуватися до ЗНО, але й формує необхідні навички для подальшого навчання та професійної діяльності у сучасному світі [49].

Застосування комп'ютерних технологій також сприяє індивідуалізації навчання, що особливо важливо у старших класах, де рівень підготовки учнів може суттєво відрізнятися. Використання різних програмних засобів дозволяє кожному учневі працювати у своєму темпі, звертати увагу на ті аспекти, які потребують додаткового вивчення, та отримувати завдання відповідно до свого рівня знань. Наприклад, у класі, де деякі учні швидше засвоюють матеріал, вони можуть працювати над більш складними завданнями або досліджувати додаткові теми, тоді як інші учні зможуть закріпити базові

поняття. Це підвищує ефективність навчального процесу, оскільки дозволяє вчителю приділяти більше уваги індивідуальним потребам учнів [50].

Крім того, застосування комп'ютерних технологій на уроках математики сприяє розвитку важливих цифрових навичок, які необхідні в сучасному світі. Учні вчаться користуватися різними програмами, аналізувати дані, будувати графіки та моделі, що є корисними навичками не лише для вивчення математики, але й для подальшого навчання та кар'єри у багатьох галузях. Такі навички є особливо цінними у сферах, пов'язаних із наукою, технологіями, інженерією та математикою (STEM), де вміння працювати з комп'ютерними програмами та розуміти математичні моделі є необхідними.

Іншою важливою перевагою використання комп'ютерних технологій є можливість дистанційного навчання. Це стало особливо актуальним у сучасних умовах, коли багато навчальних закладів перейшли на онлайн-формат через різні обставини. Використання онлайн-платформ для побудови графіків функцій, інтерактивних вправ та тестів дозволяє продовжувати навчання навіть за відсутності можливості відвідувати школу. Це забезпечує безперервність навчального процесу та дає змогу учням підтримувати свій рівень знань незалежно від зовнішніх обставин.

Висновки до розділу 3

У 3 розділі розглянуто ключові аспекти процесу побудови графіків функцій із використанням похідних, що є важливим етапом у математичному аналізі та допомагає глибше зрозуміти поведінку функцій. Кожен із методів дослідження, від обчислення першої та другої похідних до аналізу точок екстремуму, перегину, монотонності та асимптот, дозволяє отримати детальну інформацію про функцію, яка допомагає створити точне графічне зображення її поведінки на всьому проміжку визначення.

Знаходження похідних дає змогу виявити критичні точки функції, де можуть бути екстремуми, проміжки зростання та спадання, а також визначити точки перегину, які впливають на форму графіка. Аналіз другої

похідної надає інформацію про опуклість і вгнутість графіка, допомагаючи краще зрозуміти його загальну структуру. Також важливим елементом є визначення асимптот, які дозволяють прогнозувати поведінку функції при наближенні аргументу до меж області визначення або на нескінченності. Завдяки цьому методологія побудови графіків забезпечує всебічний огляд і точне уявлення про функцію.

Приклади побудови графіків типових функцій демонструють, як різні етапи аналізу за допомогою похідних дозволяють знаходити особливості графіка для кожного конкретного типу функції. Квадратична функція надає можливість вивчення параболічної структури, кубічна функція розкриває нюанси з кількома екстремумами та точками перегину, тоді як раціональна функція потребує уваги до вертикальних та горизонтальних асимптот. Кожен із цих прикладів показує, що використання похідних дозволяє швидко і точно побудувати графік, який відображає всі ключові особливості функції, включаючи зміни в монотонності, опуклості та асимптотичній поведінці.

Застосування комп'ютерних технологій значно розширює можливості побудови графіків і дослідження функцій, що робить процес навчання більш ефективним. Програми як-от GeoGebra, Desmos і Wolfram Alpha дозволяють учням швидко отримати точні графіки функцій, проаналізувати їхні властивості, а також отримати зворотний зв'язок щодо правильності своїх обчислень. Вони дають можливість учням взаємодіяти з графіками функцій у реальному часі, що сприяє кращому розумінню змін функцій при варіюванні параметрів. Інтерактивність комп'ютерних програм підвищує мотивацію до навчання, дозволяє ефективніше використовувати час на уроках, а також розвиває цифрові навички учнів.

Таким чином, інтеграція похідних для побудови графіків функцій та використання комп'ютерних технологій сприяють розвитку аналітичних здібностей учнів і роблять навчальний процес більш сучасним та орієнтованим на практичне застосування. Це підвищує якість математичної

освіти, дозволяючи учням глибше опановувати теоретичні та практичні знання, які будуть корисні в подальшому навчанні та професійній діяльності.

ВИСНОВКИ

Застосування похідної для дослідження та побудови графіків функцій на уроках математики має велике значення, оскільки дозволяє глибше зрозуміти природу зміни функцій та їх поведінку. Цей метод є основою для розуміння багатьох математичних концептів, які широко застосовуються в науці, техніці, економіці та інших галузях. Використання похідних дає можливість не лише виявляти екстремуми функцій, аналізувати їх монотонність, визначати точки перегину, але й повністю досліджувати геометрію графіків, що надає можливість точніше моделювати та прогнозувати поведінку різних систем.

Застосування похідної у навчанні дозволяє учням не тільки навчитися розв'язувати задачі на дослідження функцій, але й розвивати важливі аналітичні навички, що допомагають формувати науковий підхід до вирішення проблем. Це сприяє розвитку критичного мислення, підвищує мотивацію до вивчення математики, а також дозволяє зв'язати теоретичні знання з практичними застосуваннями.

Використання похідної для побудови графіків функцій допомагає учням краще зрозуміти значення кожного етапу побудови: від попереднього аналізу функції, дослідження критичних точок і проміжків монотонності, до визначення асимптот та аналізу другої похідної. Всі ці етапи є важливими для повного розуміння поведінки функцій та забезпечують міцну основу для подальшого вивчення більш складних математичних концептів.

Застосування похідної в навчанні також сприяє розвитку навичок самостійного дослідження та критичного аналізу, що є надзвичайно важливим у процесі підготовки до складання зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) та подальшого навчання у вищих навчальних закладах. Вивчення похідних дозволяє учням бачити зв'язок між різними розділами математики, такими як алгебра, геометрія, аналітична геометрія, і навіть елементи математичного аналізу. Це не лише сприяє глибшому розумінню

математичних концепцій, але й робить процес навчання більш інтегрованим і зв'язним.

На уроках математики в старших класах вивчення похідної відкриває перед учнями нові горизонти у розумінні складних математичних задач. Вони вчаться не лише вирішувати стандартні задачі, але й підходити до вирішення нетипових, творчих завдань, що стимулює їх інтелектуальний розвиток і допомагає формувати науковий підхід до навчання. Знання похідних також є ключовими при вивченні диференціальних рівнянь, які широко використовуються в моделюванні фізичних, економічних та інших процесів. Це підготовлює учнів до більш глибокого вивчення математики та її застосування в різних галузях науки і техніки.

Особливу роль у викладанні похідних відіграє використання інформаційно-комунікаційних технологій. Сучасні графічні калькулятори, програмні засоби, такі як GeoGebra, Desmos, Mathcad, Mathematica та Wolfram Alpha, значно спрощують процес дослідження функцій та побудови їх графіків. Вони дозволяють миттєво виконувати складні обчислення, будувати точні графіки, досліджувати вплив зміни параметрів на вигляд графіка, що сприяє глибшому розумінню учнями матеріалу. Використання цих технологій також допомагає вчителям робити уроки більш наочними, інтерактивними та цікавими, що підвищує мотивацію учнів до вивчення математики.

Застосування похідних у навчанні також допомагає розвивати навички логічного мислення та доведення. Учні вчаться доводити свої міркування, будувати логічно обґрунтовані висновки, що є важливою частиною не лише математичної освіти, але й загальної інтелектуальної підготовки. Вивчення похідних розвиває в учнів здатність до абстрактного мислення, вміння аналізувати різні варіанти вирішення задач і обирати найбільш оптимальний шлях.

Окрім того, знання, отримані при вивченні похідних, допомагають учням краще зрозуміти математичну природу процесів, які вони вивчають у

курсах фізики, хімії, економіки та інших предметів. Це робить математику універсальним інструментом, який вони можуть застосовувати в різних контекстах, що, в свою чергу, підвищує їхню впевненість у своїх знаннях та навичках. Можливість застосовувати математику на практиці робить її більш привабливою та корисною для учнів, що стимулює їх до подальшого вивчення цього предмета.

Таким чином, вивчення похідних є важливою частиною математичної освіти, яка не лише дозволяє учням опанувати складні математичні поняття, але й розвиває в них навички, необхідні для успішного навчання та подальшої професійної діяльності. Застосування похідних у дослідженні та побудові графіків функцій є потужним інструментом, що допомагає учням краще зрозуміти математичні закони і зв'язки, а також використовувати ці знання для вирішення практичних задач у різних сферах життя. Цей підхід сприяє всебічному розвитку учнів, формуванню в них комплексного бачення світу через призму математики, що є ключовим для їхнього майбутнього успіху в навчанні та кар'єрі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасенко К. В., Чуприна І. В., Цигульов П. В. Форми, методи та засоби розв'язання завдань на застосування похідної. 2021.
2. Величко В., Сенчук І. Формування математичної компетентності учнів в процесі вивчення теми «Похідна та її застосування»: методика навчання математики в закладах загальної середньої та вищої освіти. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ, 2024, 14: 106-114.
3. Поповкіна А. С., Войналович Н. М. Побудови графіків функцій в системі математичної освіти старшокласників. Наукові записки молодих учених, 2022, 10.
4. Конобрицький В. С. Методика узагальнення і систематизації знань учнів ліцеїв у навчанні теми «Похідна та її застосування» (профільний рівень). 2023.
5. Чібісов О. Д., Дейніченко Г. В. Логічний аналіз змісту навчального матеріалу у вивченні похідної та її застосувань у профільній школі. 2022.
6. Левицький Я. В. Використання технології УДО при складанні задач із модулем. Наукові записки молодих учених, 2022, 10.
7. Коваленко І. О. Методичні особливості використання комп'ютерних технологій у процесі вивчення функцій в профільній школі. 2023.
8. Кулішова Л. Впровадження дистанційної форми навчання учнів на прикладі вивчення теми «Похідна та її застосування». Випуск 15, 26.
9. Дейніченко Т. І. Диференціація навчання у груповій формі його організації (на прикладі предметів природничо-математичного циклу) : автореф. дис. ... канд. пед наук : 13.00.09. Харків, 2020. 21 с.
10. Жерновникова О. А. Мікротехнології вивчення галузі «Математика»: навч.-метод. посіб. Х.: Мітра, 2021. 78 с.
11. Моторіна В. Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: навч. посіб. для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних

навчальних закладів. 2-е допов. видання. Х.: Видавництво Іванченко, 2021. 318 с.

12. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 кл.: академічний рівень. Х.: Гімназія, 2019. 416 с.

13. PISA: математична грамотність / уклад. Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. К.: УЦОЯО, 2018. 60 с.

14. Іщенко М. В. Математична грамотність – компетентність. Цифрова трансформація та диджитал технології для сталого розвитку всіх галузей сучасної освіти, науки і практики: матеріали міжнар. наук.-практ. конф., 26 січня 2023 р.; Міжнар. акад. прикладних наук (Польща) – Держ. біотехнологічний ун-т (Україна). Ломжа, Республіка Польща, 2023. Ч. 4. С. 38-39.

15. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. 2022. № 1. С. 35–39.

16. Корольський В. В., Капіносов А. М. Математична алгоритмічна компетентність: теоретико-методичні основи формування, структура та рівні. Educational Dimension, 37, 2018. С. 78-84.

17. Ткачук Г., Медведєва М. Формування математичної компетентності студентів педагогічних університетів в умовах неформальної освіти. Освіта. Інноватика. Практика, 2023. Том 11, №3. С. 39-46.

18. Коберник Г. Формування математичної компетентності майбутніх учителів початкової школи. Věda a perspektivy, 11 (30), 2023.

19. Крамаренко Т. Г., Пилипенко О. С. Математика в STEMі: навчально-методичний посібник. Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2023. 274 с.

20. Velychko V. Ye., Kaydan N. V., Fedorenko O. G., Kaydan V. P. Training of practicing teachers for the application of STEM education. Journal of Physics: Conference Series, 2288(1), 012033 (jun 2022)

21. Fedorenko E. G., Kaidan N. V., Velychko V. Ye., Soloviev V. N. Gamification when studying logical operators on the Minecraft EDU platform. In Lytvynova, S. H. and Semerikov, S. O., editors, Proceedings of the 4th International Workshop on Augmented Reality in Education (AREdu2021), Kryvyi Rih, Ukraine, May 11, 2021, volume 2898 of CEUR Workshop Proceedings, pages 107–118.

22. Velychko V. Ye., Fedorenko E. G., Kaidan N. V., Kaidan V. P. The use of immersive technology in the study of mathematical logics in secondary school. In Proceedings of the 2nd Myroslav I. Zhaldak Symposium on Advances in Educational Technology – AET; ISBN 978-989-758-662-0, SciTePress, 2023, pages 326-337.

23. Романюк В. Я., Дутко Л. І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. Львів: Тріада плюс, 2024.

24. Використання інтерактивних технологій на уроках математики: теорія, досвід: Методичний посібник. Авт. Цивенко. 2018.

25. Пометун О. Інтерактивні методики та система навчання. К.: Шкільний світ, 2020.

26. Кадемія М. Ю., Шевченко Л. С., Шестоपालюк О. В. Підготовка майбутніх вчителів до використання ІКТ: навчально-методичний посібник. Вінниця, 2019. 100 с.

27. Уроки математики у школі з використанням електронних засобів навчання. Навчально-методичний посібник. [уклад. Гарус І. Б.]. Полтава: ПОІППО, 2019. 101 с.

28. Мамай В., Штонда О. Нестандартні застосування похідної. Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі: тези доп. учасників IV Всеукр. наук.-практ. конф. молод. учених, Харків, 11–12 трав. 2022 р. Харків. нац. пед. ун-т ім. Г. С. Сковороди. Харків, 2022. С. 202–204.

29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра 11 клас: підручник для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Профільний рівень. Київ: Гімназія, 2020. 320 с.

30. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти: профільний рівень. Авт. Є. П. Нелін. Х. : Гімназія, 2019. 416 с.
31. Король Г. О. Математика для 10 класу: алгебра і початки аналізу. Навчальний посібник. Київ: Либідь, 2020. 350 с.
32. Ляшенко О. І., Савченко О. В. Методика викладання математики в школі: навчальний посібник. Київ: Освіта, 2019. 234 с.
33. Семенюк А. С. Диференціальне числення в середній школі: теорія і практика. Львів: Тріада, 2021. 180 с.
34. Горбачова Н. П., Андрєєва М. М. Застосування комп'ютерних технологій у викладанні похідної та інтегралів у старшій школі. Наукові записки. 2022. Вип. 12. С. 68–74.
35. Богданова К. В., Ломакіна О. І. Використання ІКТ в навчанні математики: інтегровані уроки. Київ: Видавничий дім «Школяр», 2021. 146 с.
36. Кузьміна Л. В. Викладання математики за допомогою інтерактивних технологій в профільній школі. Освіта і наука. 2020. № 6. С. 52–60.
37. Чорний В. А., Бондаренко Г. І. Методичні підходи до вивчення похідної та її застосувань у школі. Практична математика. 2021. № 5. С. 112–118.
38. Плахотнюк О. О., Гречка О. П. Сучасні підходи до навчання математики у профільній школі. Київ: Освіта України, 2020. 290 с.
39. Іваненко М. А., Коломієць Н. В. Підготовка майбутніх вчителів математики до використання електронних підручників у навчанні. Інноваційні технології в освіті. 2022. № 7. С. 70–78.
40. Мороз В. С. Алгебра та початки аналізу: навчальний посібник для старших класів. Київ: Літера, 2021. 256 с.
41. Сорока Т. В. Застосування похідної в задачах економічного змісту: практичний аспект. Математика в школі. 2021. № 4. С. 32–39.
42. Дубинський В. О. Методичні рекомендації щодо використання похідної у задачах оптимізації. Освіта і час. 2021. № 3. С. 58–63.

43. Назаренко П. С. Підручник з алгебри для 11 класу. Київ: Либідь, 2022. 420 с.
44. Литовченко О. В. Методичні аспекти вивчення диференціальних рівнянь у старшій школі. Наукові записки. 2022. № 14. С. 75–81.
45. Мазуренко Г. І. Математичне моделювання та диференціальне числення: навчальний посібник. Київ: Наукова думка, 2020. 180 с.
46. Пилипчук А. М. Практичні задачі з похідної в шкільному курсі математики. Математика в школі. 2023. № 2. С. 42–48.
47. Громакова Т. В. Використання цифрових технологій у вивченні математики в школі. Інноваційна педагогіка. 2023. № 1. С. 12–19.
48. Боровик В. М., Крамаренко О. С. Викладання теми «Похідна та її застосування» за допомогою комп'ютерних програм. Математика в школі. 2023. № 6. С. 75–82.
49. Мельниченко П. В. Використання інформаційних технологій при вивченні похідної у старшій школі. Інформаційні технології в освіті. 2023. № 3. С. 102–108.
50. Бойко С. В., Черненко Л. М. Використання інтерактивних технологій на уроках математики в старшій школі. Наукові записки. 2022. Вип. 10. С. 48–55.