

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему "Особливості навчання учнів розв'язуванню логарифмічних
рівнянь і нерівностей"

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)з-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Луканюк А.-А. Б.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник Никифорчин І. В.

(прізвище та ініціали)

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ І. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ.....	5
1.1. Особливості поняття логарифму і його властивості.....	5
1.2. Логарифмічна функція, її властивості та графік.....	14
1.3. Аналіз навчальних програм і підручників за досліджуваною темою.....	21
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1.....	26
РОЗДІЛ ІІ. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЛОГАРИФМИ, У КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ.....	27
2.1. Класифікація логарифмічних рівнянь та методи їх розв’язування.....	27
2.2. Класифікація логарифмічних нерівностей та методи їх розв’язування.....	38
2.3. Розв’язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами.....	45
2.4. Системи логарифмічних рівнянь і нерівностей.....	48
2.5. Факультативне заняття «Завдання підвищеної складності з використанням логарифмів».....	51
ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2.....	59
ВИСНОВКИ.....	60
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	62
ДОДАТКИ.....	64

ВСТУП

Слово «логарифм» з грецької у буквальному перекладі означає число, що змінює відношення. Це поняття з'явилося через практичну необхідність виконання обчислень в астрономії. Сьогодні воно фігурує у фізиці, хімії, музиці, теорії інформації, ракетобудуванні, соціології. Логарифмічна спіраль розповсюджена у багатьох формах природи, що подібні до форми мушлі моллюска.

У шкільному курсі математики необхідність у вивченні логарифмів пояснюється через неможливість точного знаходження коренів показникових рівнянь виду $a^x = b$, $a > 0, a \neq 1$, праву частину яких не можна подати у вигляді степеня з основою a . Графічний метод розв'язання таких рівнянь дозволяє встановити лише кількість їх коренів. В учнів складається уявлення про логарифм як дієвий інструмент розв'язку показникових рівнянь та нерівностей у подальшому. Для розв'язання рівнянь та нерівностей, що містять логарифми обов'язково треба знати означення та наслідки з нього і вміти застосовувати властивості логарифмів, тому у роботі приділено достатньо уваги цьому питанню

Предметом дослідження є вивчення логарифмів, логарифмічних функцій та рівнянь і нерівностей, що містять логарифми, у шкільному курсі математики старшої профільної школи.

Об'єктом дослідження є методи викладання та засвоєння учнями тем, пов'язаних з логарифмами, логарифмічними функціями, рівняннями та нерівностями.

Мета дослідження: здійснити аналіз особливостей вивчення логарифмічної функції, рівнянь і нерівностей у курсі математики профільної школи.

Задачі дослідження:

1. Аналіз особливостей поняття логарифму та його властивостей у шкільному курсі математики.

2. Вивчення логарифмічної функції та її властивостей, а також способів її графічного представлення.

3. Аналіз навчальних програм і підручників щодо висвітлення теми логарифмів у шкільному курсі математики.

4. Класифікація логарифмічних рівнянь і нерівностей та методів їх розв'язування.

5. Дослідження рівнянь і нерівностей, що містять логарифми з параметрами, та систем таких рівнянь і нерівностей.

6. Розробка факультативного заняття, спрямованого на розв'язування задач підвищеної складності, які містять логарифми.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів з підрозділами, висновків до кожного розділу, загального висновку та списку використаних джерел і додатків.

Матеріал роботи може бути корисним для здобувачів загальної середньої освіти, студентів педагогічних факультетів чи закладів вищої освіти педагогічного напрямку, студентам фахових передвищих закладів освіти, де передбачено вивчення логарифмів та їх додатків.

РОЗДІЛ І. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Особливості поняття логарифму і його властивості.

Згідно з діючою програмою навчання математики, поняття логарифму є першим поняттям, з яким учні знайомляться на початку 11 класу, незалежно від вибору профілізації навчання у старшій школі.

Логарифми були винайдені у першій половині 17 століття у відповідь на важливу потребу виконання важких обчислень в астрономії. До їх винайдення прийшло одночасно різні учені та за влучним виразом Лапласа, логарифми «скоротили працю астронома, подвоїв їх життя». Першим винахідником логарифмів був шотландський математик Джон Непер, який і запровадив сам термін логарифм. Обчислені ним таблиці вийшли у світ у 1614 році, містили окрім логарифмів чисел від 1 до 1449 також і логарифми тригонометричних функцій, обчислені через кожен мінуту дуги. Однак, як зауважував і сам автор, його таблиці були незручними через те, що число, яке відповідало основі його системи, було оберненим до основи натурального логарифма. Логарифми Непера спадали зі збільшенням числа.

Першим ученим, що істотно вдосконалив логарифми, був Генрі Брігс, професор геометрії з Лондона. За основу логарифмів він обрав число 10 та у 1624 році опублікував свою «Логарифмічну арифметику», яка містила чотирнадцятизначні логарифми чисел від 1 до 20000 і від 90000 до 100000. Одночасно з Г. Брігсом над удосконаленням логарифмів та полегшенням їх обчислень працювали лондонський учитель математики Джон Спейдель, голландський математик Адріан Влакк, швейцарський годинникар Іост Бюргі, великий астроном Йоганн Кеплер.

Способи обчислень, які застосовували перші винахідники логарифмів, ґрунтувалися на застосуванні пропорцій. Їх використання потребувало титанічних зусиль. Пізніше були знайдені інші способи обчислення логарифмів, наприклад за допомогою нескінчених рядів.

Вперше в Україні таблиці логарифмів були видані у 1703 році викладачами Московської навігаційної школи Андрієм Фархвансоном, Стеваном Гвіном та Леонтієм Магницьким. До «Універсальної арифметики» Леонард Ейлер включив розділи, присвячені теорії логарифмів.

Друком семизначні універсальні таблиці логарифмів вийшли у другій половині 18 століття. Вони були складені австрійським математиком Георгом Веогою та ними користувалися впродовж наступних ста п'ятдесяти років.

Майже одночасно з логарифмами було винайдено і лічильну лінійку. У 1620 році Едмунд Гюнтер сконструював шкалу, поділки якої були пропорціональні до логарифмів чисел. За допомогою циркуля можна було додавати та віднімати числа цієї шкали, виконуючи таким чином операції множення і ділення. Ця лінійка була вдосконалена Амеде Маннгеймом. Запропонована ним лінійка після 1850 року використовувалася до винайдення мікрокалькуляторів, зміни у її конструкції стосувалися лише незначних деталей.

У школі діти знайомляться з логарифмом як з розв'язком показникового рівняння

$$a^x = b, \quad a > 0, a \neq 1, \quad (1)$$

що існує, коли права частина цього рівняння (1) має обмеження $b > 0$. Саме корінь цього рівняння, існування якого підтверджує графічний спосіб розв'язання рівняння, - значення x і називають *логарифмом* числа b за основою a . Тут обмеження на значення a, b слідує з (1).

Означення 1. Логарифмом числа b за даною основою a називається показник степеня x , до якого треба піднести a , щоб отримати b і позначають $\log_a b = x$.

Таким чином, вираз $\log_a b$ має зміст за умови, що $a > 0, a \neq 1, b > 0$.

Завдання 1.1. Обчисліть $\log_2 8$, $\log_2 0,25$, $\log_{25} 5$.

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_2 0,25 = -2, \quad \log_{25} 5 = \frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{lll} \text{оскільки } 2^3 = 8. & \text{оскільки } 2^{-2} = \frac{1}{4}. & \text{Оскільки } 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{1/2} = 5. \end{array}$$

Знаком lg без зазначення основи позначається десятковий логарифм, тобто логарифм при основі 10, знаком $\log$ без зазначення основи – за довільною основою (в межах однієї формули ця основа мислиться тієї самою). Останній підхід у закладах загальної середньої освіти не актуальний.

Отже, за визначенням, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$ або

$$a^{\log_a b} = b. \quad (2)$$

Формула (2) має назву *основна логарифмічна тотожність*. Це одне з основних і часто використовуваних співвідношень для доведень властивостей логарифмів, обчислень тощо.

Завдання 1.2. Обчисліть $3^{\log_3 7}$, $5^{2 \log_5 3}$, $8^{\frac{1}{2} \log_8 9 - 1}$.

$$\begin{array}{lll} 3^{\log_3 7} = 7 & 5^{2 \log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 & 8^{\frac{1}{2} \log_8 9 - 1} = 8^{\frac{1}{2} \log_8 9} : 8 = \\ & = 9, & = (8^{\log_8 9})^{1/2} : 8 = 9^{1/2} : 8 = \frac{3}{8}. \end{array}$$

Окрім основної логарифмічної тотожності обов'язково знати також й інші важливі властивості логарифмів.

Далі будемо розглядати дійсні логарифми, у яких будь-яке дійсне число, що не дорівнює одиниці, є основою логарифмів [2].

Властивості логарифмів.

1. Будь-яке додатне число при довільній основі має єдиний логарифм.
2. При будь-якій (додатній) основі від'ємні числа не мають логарифмів.
3. При будь-якій основі логарифм одиниці дорівнює 0, тобто $\log_a 1 = 0$.
4. Логарифм самої основи дорівнює одиниці, тобто $\log_a a = 1$.

Властивості 7 -12 не є обов'язковими.

5. При основі, більшій за одиницю, більшому числу відповідає більший логарифм. При цьому, логарифми чисел, більших за одиницю, додатні, а логарифми чисел, менших за одиницю – від’ємні.

$$b > c, a > 1 \rightarrow \log_a b > \log_a c.$$

Справедливим є і обернене твердження. Тобто,

$$b > c, a > 1 \leftrightarrow \log_a b > \log_a c.$$

6. При основі, меншій за одиницю, більшому числу відповідає менший логарифм. При цьому логарифми чисел, менших за одиницю, додатні, а логарифми чисел, більших за одиницю – від’ємні.

$$b > c, a < 1 \rightarrow \log_a b < \log_a c.$$

обернене твердження також справедливе, тому

$$b > c, a < 1 \leftrightarrow \log_a b < \log_a c.$$

властивості 5 -6 мають назву властивості монотонності логарифмів.

7. Якщо основа логарифмів більша за одиницю, то при необмеженому зростанні числа необмежено зростає і його логарифм, а при наближенні додатного числа до нуля його логарифм, залишаючись від’ємним, необмежено зростає за абсолютною величиною.

8. Якщо основа логарифма менша за одиницю, то при необмеженому зростанні числа його логарифм, залишаючись від’ємним, необмежено спадає, а при наближенні додатного числа до нуля його логарифм необмежено зростає.

Властивості 1-4 слідує безпосередньо з означення. Властивості 5 – 8 можна обґрунтувати після розгляду логарифмічної функції за допомогою їх графіків.

Також важливо запам’ятати, що

9. Якщо $a > 1, b > 1$, то $\log_a b > 0$.

10. Якщо $a > 1, 0 < b < 1$, то $\log_a b < 0$.

11. Якщо $0 < a < 1, b > 1$, то $\log_a b < 0$.

12. Якщо $0 < a < 1, 0 < b < 1$, то $\log_a b > 0$.

Властивості 9-13 є наслідком властивостей 5-6 монотонності логарифмів.

Приклади на використання властивостей логарифмів

Завдання 1.3. Виходячи з означення логарифма, знайти

Яке число має логарифм 2 при основі 7	Логарифм 125 за основою 5	При якій основі логарифм числа 16 дорівнює 4.
$2 = \log_7 x \rightarrow$ $x = 7^2 = 49.$	$x = \log_5 125 \rightarrow$ $5^x = 125 \rightarrow x = 3$	$4 = \log_x 16 \rightarrow$ $x^4 = 16 \rightarrow x = 2.$

Завдання 1.4. Порівняйте

$\log_a 2$ та $\log_a 3$	x та 7, якщо $\log_2 7 > \log_2 x$	$\log_2 5$ та $\log_2 \pi$	$\log_{1/2} 23$ та $\log_{1/2} 11$
Якщо $a > 1$, то більшому числу відповідає більший логарифм, тобто $\log_a 2 < \log_a 3.$ Якщо $0 < a < 1$, то $\log_a 2 > \log_a 3.$	Оскільки $\log_2 7 > \log_2 x$, то $x < 7$, нагадаємо, що $x > 0$ у будь- якого логарифма, тому $0 < x < 7.$	Оскільки $5 > \pi$, то $\log_2 5 > \log_2 \pi$, враховуючи $a = 5 > 1.$	Оскільки $11 > 23$, то $\log_{1/2} 23 < \log_{1/2} 11$, оскільки $a = \frac{1}{2} < 1.$

Разом з поняттям логарифма часто використовують термін *логарифмування*. Прологарифмувати вираз - значить виразити цей логарифм через логарифми окремих чисел, що входять у цей вираз. Це можна зробити, використовуючи теорему про логарифм добутку, частки, степеня, яку часто називають теоремою про основні властивості логарифмів.

Теорема (основні властивості логарифмів). Для будь-якого $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$ виконується

$$13. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$14. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$15. \log_a x^p = p \log_a x, p \in \mathbb{R}.$$

$$16. \log_a z^{2m} = 2m \log_a |z|, m \in \mathbb{Z}, z \neq 0.$$

Доведемо деякі з цих тверджень, інші аналогічно. Для цього будемо використовувати основну логарифмічну властивість та твердження, що стосується показникових рівнянь: $a^{x_1} = a^{x_2} \leftrightarrow x_1 = x_2$ для будь-якого $a > 0, a \neq 1$. Таке поєднання дає можливість звести техніку доведення до роботи зі степенями.

Розглянемо два вирази $a^{\log_a xy}$ та $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні. Використовуючи основну логарифмічну тотожність, для цих двох виразів отримаємо

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a xy}$, що можливо тоді і тільки тоді, коли рівні степені цих виразів.

Розглянемо два вирази $a^{\log_a \frac{x}{y}}$ та $a^{\log_a x - \log_a y}$. Доведемо їх рівність. За основною логарифмічною тотожністю отримаємо

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y};$$

$$a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{-\log_a y} = x(a^{\log_a y})^{-1} = xy^{-1} = \frac{x}{y}.$$

Отже, $a^{\log_a x - \log_a y} = a^{\log_a \frac{x}{y}}$, що можливо тоді і тільки тоді, коли рівні степені цих виразів.

Розглянемо два вирази $a^{\log_a x^p}$ та $a^{p \log_a x}$. Маємо,

$$a^{\log_a x^p} = x^p;$$

$$a^{p \log_a x} = (a^{\log_a x})^p = x^p.$$

Отже, $a^{\log_a x^p} = a^{p \log_a x}$, що можливо тоді і тільки тоді, коли рівні степені цих виразів.

Треба мати на увазі, що не спрацьовують аналогії: логарифм суми не дорівнює сумі логарифмів, логарифм різниці не дорівнює різниці логарифмів.

Завдання 1.5. Прологарифмувати вирази

1. $x = 3abc$; $\log x = \log 3 + \log a + \log b + \log c$;
2. $x = \frac{a}{bc}$, $\log x = \log a - \log bc = \log a - (\log b + \log c) = \log a - \log b - \log c$;
3. $x = a^3 b^2$, $\log x = \log a^3 b^2 = \log a^3 + \log b^2 = 3 \log a + 2 \log b$.
4. $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{2ab^2c}}$, $\log x = \log \left(\frac{a^3}{2ab^2c} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log \frac{a^3}{2ab^2c} =$
 $\frac{1}{4} (\log a^3 - \log(2ab^2c)) = \frac{1}{4} (3 \log a - \log 2 - \log a - 2 \log b - \log c)$
5. $x = \frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}$, $\log x = \log \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - \log \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}} =$
 $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{4} \log a + \frac{1}{8} \log a - \frac{1}{3} \log a - \frac{1}{9} \log a = \frac{31}{72} \log a$.

Якщо за даним результатом логарифмування знаходять вираз, з якого одержано цей результат, то таку операцію називають *потенціюванням*.

Завдання 1.6. Пропотенціювати такі вирази

$\log x = 5 \log c - \frac{1}{3} \log a$ $\log x = \log c^5 - \log a^{\frac{1}{3}} =$ $\log \frac{c^5}{\sqrt[3]{a}}, \quad x = \frac{c^5}{\sqrt[3]{a}}$	$\log x = \log b - \frac{1}{m} \log(b-c) + m \log(b+c)$ $\log x = \log b - \log \sqrt[m]{b-c} + \log(b+c)^m$ $= \log \frac{b}{\sqrt[m]{b-c}} + \log(b+c)^m$ $= \log \frac{b(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}, \quad x = \frac{b(b+c)^m}{\sqrt[m]{b-c}}$
---	---

Якщо треба перейти від логарифмів з основою c до логарифмів з основою a , то користуються такою тотожністю

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \quad (3)$$

Множник $\frac{1}{\log_c a}$ називається *модулем переходу*.

Формулу (3) отримують, якщо прологарифмувати співвідношення (2) за основою c , $c \neq 1$, $c > 0$, отримаємо

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

За властивістю логарифму степеня, маємо, що $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$, звідки й отримуємо потрібне співвідношення (3).

Наслідками з цієї формули є такі властивості логарифмів

$$17. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$18. \log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b,$$

$$19. \log_{a^k} a^n = \frac{n}{k},$$

$$20. \log_{b^n} a^n = \log_b a.$$

Завдання 1.7. Що більше

$$1) \log_4 3 \text{ чи } \log_{16} 9?$$

$$4) \log_3 4 \text{ чи } \log_5 6?$$

$$2) \log_{13} 150 \text{ чи } \log_{17} 290?$$

$$5) \log_7 10 \text{ чи } \log_{11} 13?$$

$$3) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} \text{ чи } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}?$$

Розв'язання

$$1) \text{ Використовуючи властивість 19, отримаємо } \log_{16} 9 = \log_{4^2} 3^2 = \frac{2}{2} \log_4 3.$$

$$2) \text{ Оскільки } \log_{13} 150 < \log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2,$$

$$\log_{17} 290 > \log_{17} 289 = \log_{17} 17^2 = 2,$$

Отже, маємо, що $\log_{13} 150 < \log_{17} 290$.

$$3) \text{ Оскільки } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4 \text{ та } 15 + \sqrt{2} > 16 \text{ і } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4, \text{ то } \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}.$$

$$4) \text{ Розглянемо числа } 5 \log_3 4 \text{ та } 5 \log_5 6. \text{ Оскільки виконується}$$

$$5 \log_3 4 = \log_3 4^5 = \log_3 1024 > \log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$$

та

$$5 \log_5 6 = \log_5 6^5 = \log_5 7776 < \log_5 15625 = \log_5 5^6 = 6,$$

маємо, що $5 \log_3 4 < 5 \log_5 6$ та відповідно $\log_3 4 > \log_5 6$.

5) Розглянемо різницю цих чисел

$$A = \log_7 10 - \log_{11} 13 = \log_7 10 - \frac{\log_7 13}{\log_7 11} = \frac{\log_7 10 \log_7 11 - \log_7 13}{\log_7 11}.$$

Представимо кожен логарифм виразу у іншому вигляді

$$\log_7 10 = \log_7 7 \cdot \frac{10}{7} = 1 + \log_7 \frac{10}{7},$$

$$\log_7 11 = \log_7 7 \cdot \frac{11}{7} = 1 + \log_7 \frac{11}{7},$$

$$\log_7 13 = \log_7 7 \cdot \frac{13}{7} = 1 + \log_7 \frac{13}{7}.$$

Отже, маємо, що

$$\begin{aligned} A &= \frac{\log_7 10 \log_7 11 - \log_7 13}{\log_7 11} \\ &= \frac{1}{\log_7 11} \left(\left(1 + \log_7 \frac{10}{7}\right) \left(1 + \log_7 \frac{11}{7}\right) - \left(1 + \log_7 \frac{13}{7}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\log_7 11} \left(\log_7 \frac{10 \cdot 11 \cdot 13}{7 \cdot 7 \cdot 13} + \log_7 \frac{10}{7} \log_7 \frac{11}{7} \right) = \\ &= \frac{1}{\log_7 11} \left(\log_7 \frac{110}{91} + \log_7 \frac{10}{7} \log_7 \frac{11}{7} \right). \end{aligned}$$

Усі логарифми у добутку є додатними, тому отримаємо, що $A > 0$

Завдання 1.8. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} 8$, знаючи, що $\log_2 3 = a$.

$$\text{Маємо, що } \log_{\sqrt{3}} 8 = 2 \log_3 8 = \log_3 64 = \frac{1}{\log_{64} 3} = \frac{1}{\log_{2^6} 3} = \frac{1}{6}.$$

Формулу переходу до іншої основи виду (3) використовують часто для обчислень наближених значень логарифма за довільною основою, оскільки більшість комп'ютерних програм чи калькуляторів використовують десяткові логарифми. Наприклад, стандартний додаток Calculator у операційних системах сімейства Windows обчислює лише десяткові логарифми, які позначаються на кнопках через $\log$. Отже, щоб знайти наближене значення логарифма з довільною іншою основою, треба обов'язково використати формулу переходу до основи 10.

Для обчислення значення натурального логарифма потрібно використовувати число $\lg e = 0,4343, \dots$, яке називається модулем десяткових логарифмів.

Завдання 1.9. Обчислити $\log_2 9, \ln 2$ за допомогою калькулятора.

$$\log_2 9 = \frac{\lg 9}{\lg 2} \approx \frac{0,9542}{0,3010} \approx 3,1701.$$

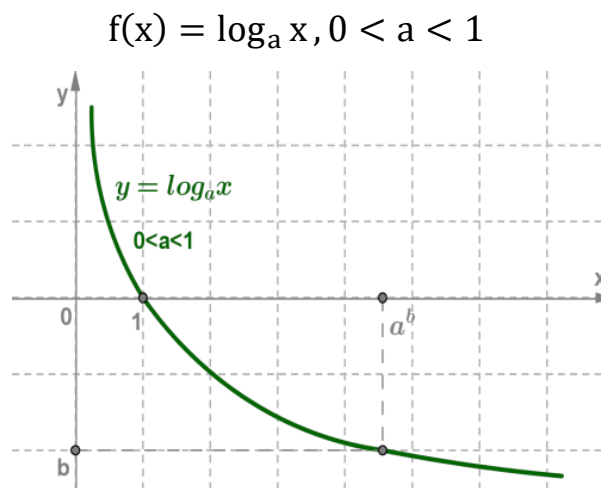
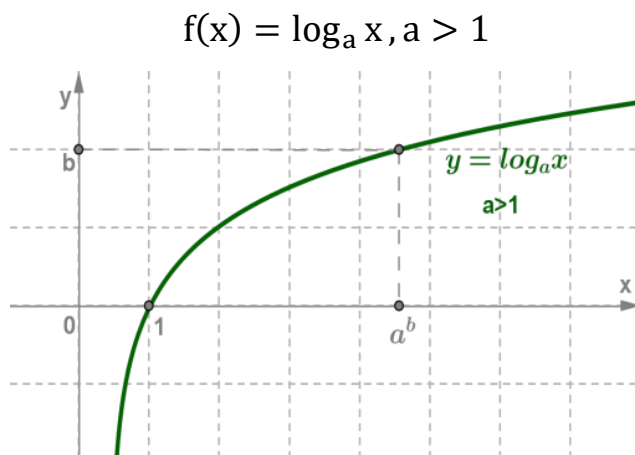
$$\ln 2 = \frac{\lg 2}{\lg e} \approx \frac{0,3010}{0,4343} \approx 0,6931.$$

1.2. Логарифмічна функція, її властивості та графік

Під час вивчення властивостей логарифмів учнів вже навчають розв'язувати показникові рівняння за їх допомогою. Відповідно ми вже провели умовну пропедевтику до вивчення логарифмічної функції як тієї, що пов'язана з показниковою функцією.

За А. Мерзляком *логарифмічною функцією* називається функція, яка кожному додатному числу x ставить у відповідність так число y таке, що $y = \log_a x$. У цьому випадку областю визначення цієї функції $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ є множина $D(f) = (0; +\infty)$.

Для побудови графіка логарифмічної функції автор обґрунтовує факт взаємно оберненості показникової $g(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ і логарифмічної $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ функцій через рівність області визначення логарифмічної та множини значень показникової функції і області визначення показникової та множини значень логарифмічної функції та виконання рівності $f(g(x)) = x, \forall x \in D(f)$. Тоді графіки цих функцій є симетричними відносно прямої $y = x$ як графіки взаємно обернених функцій та це дозволяє пояснити властивості логарифмічної функцій у залежності від основи логарифма.



Проміжки знакосталості $y > 0$

$(1; +\infty)$

$(0; 1)$

Проміжки знакосталості $y < 0$

$(0; 1)$

$(1; +\infty)$

Проміжки зростання

$(0; +\infty)$

-

Проміжки спадання

-

$(0; +\infty)$

Властивості логарифмічної функції $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$,

не залежно від основи логарифму

1 Область визначення логарифмічної функції $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ – множина всіх R^+ додатних чисел.

2 Множина значень логарифмічної функції – множина R всіх дійсних чисел.

3 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ має єдиний нуль $x = 1$.

4 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ має два проміжки знакосталості.

5 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ не є парною, не є непарною – функція загального вигляду.

6 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ не є обмеженою.

7 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ є неперервною.

8 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ є диференційовною.

9 Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ не має точок екстремуму.

10 Графік логарифмічної функції $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ має вертикальну асимптоту $x = 0$, коли x прямує до нуля справа.

Аналізуючи графіки логарифмічної функції та їх властивості, можемо оцінити значення логарифму відносно 0:

11 Якщо a і b розташовані на дійсній осі по один бік від 1, то $\log_a b > 0$, тобто

$$0 < a < 1, 0 < b < 1 \text{ або } a > 1, b > 1 \rightarrow \log_a b > 0$$

12 Якщо a і b розташовані по різні боки від 1 на дійсній осі, то $\log_a b < 0$, тобто

$$0 < a < 1, b > 1 \text{ або } a > 1, 0 < b < 1 \rightarrow \log_a b < 0.$$

Завдання 1.10. Порівняйте (використовуючи властивості логарифмічної функції)

1) $\log_3 2,7 < \log_3 2,9$ як зростаюча функція на всій ОДЗ з основою $a = 3 > 0$.

2) $\log_{0,3} \frac{1}{8} > \log_3 \frac{1}{2}$ як спадна функція на всій ОДЗ з основою $0 < a = 0,3 < 1$.

3) $\log_3 10$ та $\log_{0,5} 0,28$. Оцінимо кожен логарифм окремо відносно деякого цілого та потім порівняємо отримані оцінки.

$$\log_3 10 > \log_3 9 = 2.$$

$$\log_{0,5} 0,28 < \log_{0,5} 0,25 = 2.$$

Маємо, що $\log_3 10 > 2$ та $\log_{0,5} 0,28 < 2$. Отже, $\log_{0,5} 0,28 < \log_3 10$.

4) $\frac{1}{2} \log_2 9$ та $\log_5 11$. Оцінимо кожен логарифм окремо відносно деякого цілого та потім порівняємо отримані оцінки.

$$\log_2 9 > \log_2 8 = 3 \rightarrow \frac{1}{2} \log_2 9 > \frac{3}{2},$$

$$\log_5 11 = \frac{2}{2} \log_5 11 = \frac{1}{2} \log_5 11^2 = \frac{1}{2} \log_5 121 < \frac{1}{2} \log_5 125 = \frac{3}{2}.$$

Маємо, що $\frac{1}{2} \log_2 9 > \log_5 11$.

Завдання 1.11. Довести, що $\log_9 10 > \lg 11$.

Розглянемо дріб $A = \frac{\lg 11}{\log_9 10}$ та доведемо, що $A < 1$. Для цього достатньо довести, що $\sqrt{A} < 1$. Використаємо властивості логарифму переходу до іншої основи та нерівність між середнім арифметичним та середнім геометричним, отримаємо

$$\begin{aligned} \sqrt{A} &= \sqrt{\frac{\lg 11}{\log_9 10}} = \sqrt{\lg 11 (\log_9 10)^{-1}} = \sqrt{\lg 11 \lg 9} \leq \frac{\lg 11 + \lg 9}{2} = \frac{\lg 99}{2} \\ &< \frac{\lg 100}{2} = 1. \end{aligned}$$

Отже, $\sqrt{A} < 1$.

Аналогічно можна довести, коли $a > 1$, то

$$\log_a(a+1) > \log_{(a+1)}(a+2). \quad (4)$$

Завдання 1.12. Довести, що $\log_{17} 19 > \log_{a_{19}} 20$.

Використовуючи нерівність (4) можна довести справедливості нерівності у завданні (4). Вона впливає з такого ланцюжка міркувань

$$\log_{17} 19 > \log_{a_{17}} 18 > \log_{18} 19 > \log_{18} 19 > \log_{19} 20.$$

Серед важливих завдань, що мають відношення до теми логарифмічної функції виділимо:

- 1) Завдання на знаходження області визначення;
- 2) Завдання на знаходження найбільшого та найменшого значення функції;
- 3) Завдання на побудову графіка логарифмічної функції.

Наведемо приклади таких класів завдань.

Завдання 1.13. Знайти область визначення функцій

$y = \log_{0,2}(1 - \cos x)$	$y = \log_{x-1}(9 - x^2)$	$y = \log_{0,1}(3 - x) + \sqrt{x - 2}$
Область визначення	Область визначення	Область визначення
$1 - \cos x > 0 \rightarrow$ $\cos x < 0 \rightarrow$ $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$	$\begin{cases} x - 1 \neq 1 \\ x - 1 > 0 \\ 9 - x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow$ $\begin{cases} x \neq 2, \\ x > 1, \\ (3 - x)(3 + x) > 0 \end{cases}$ $\rightarrow x \in (1; 2) \cup (2; 3).$	$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \rightarrow$ $x \in [2; 3).$

Завдання 1.14. Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному проміжку

$y = \log_{\frac{1}{4}} x, x \in \left[\frac{1}{4}; 16\right].$	$y = \log_{\frac{1}{3}} x, x \in \left[\frac{1}{9}; 3\right].$	$y = \lg x, x \in [1; 1000]$
Оскільки функція	Оскільки функція	Оскільки функція
$y = \log_{\frac{1}{4}} x$ спадає на всій	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ спадає на всій	$y = \lg x$ зростає на всій
множині $\left[\frac{1}{4}; 16\right]$, то	множині $x \in \left[\frac{1}{9}; 3\right]$, то	множині $x \in [1; 1000]$,
своїх найбільшого та	своїх найбільшого та	то своїх найменшого та
найменшого значень	найменшого значень	найбільшого значень
вона набуває на кінцях	вона набуває на кінцях	вона набуває на кінцях
цього проміжку, отже	цього проміжку, отже	цього проміжку, отже
$y_{\max} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} = 1,$	$y_{\max} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2,$	$y_{\max} = \lg 1000 = 3,$
$y_{\min} = \log_{\frac{1}{4}} 16 \rightarrow$	$y_{\min} = \log_{\frac{1}{3}} 3 \rightarrow$	$y_{\min} = \lg 1 = 0.$
$\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4^2 \rightarrow 4^{-y} = 4^2$	$\rightarrow y_{\min} = -1.$	
$\rightarrow y_{\min} = -2.$		

Завдання 1.15. Знайти найменше значення функції $y = \log_2(x^4 + 64)$.

Зауважимо, що підлогарифмічний вираз $x^4 + 64 > 0$ для будь якого дійсного x , тому ОДЗ нерівності є множину усіх дійсних чисел.

Щоб знайти найменше значення функції $y = \log_2(x^4 + 64)$ потрібно спершу визначити, при яких значеннях x функція $x^4 + 64$ набуває свого мінімального значення.

Вираз під знаком під логарифмом досягає мінімального значення при $x = 0$. Тоді найменше значення функції $f(x) = x^4 + 64$ отримаємо при $x = 0$, тобто $f(0) = 0^4 + 64 = 64$.

Знайдемо мінімальне значення функції $y = \log_2(x^4 + 64)$. Для цього підставляємо $f(0) = 64$ у функцію функції $y = \log_2(x^4 + 64)$. Маємо, що

$$y(0) = \log_2(64) = 6.$$

Отже, мінімальне значення функції $y = \log_2(x^4 + 64)$ дорівнює 6 і досягається при $x = 0$.

Завдання 1.16. Знайти найбільше значення функції

$$y = \log_{0,5}(2\sqrt[3]{2} - |x|).$$

Знайдемо область визначення функції $y = \log_{0,5}(2\sqrt[3]{2} - |x|)$. Згідно з означенням логарифмічної функції, її ОДЗ

$$2\sqrt[3]{2} - |x| > 0.$$

Таким чином, x має задовольняти умову $|x| < 2\sqrt[3]{2}$, звідки отримаємо

$$-2\sqrt[3]{2} < x < 2\sqrt[3]{2}$$

Функція $y = \log_{0,5} f(x)$ є спадною, тобто зменшується при збільшенні $f(x)$. Отже, максимальне значення логарифмічної функції буде досягатися при найбільшому значенні виразу $2\sqrt[3]{2} - |x|$. Найбільше значення виразу $2\sqrt[3]{2} - |x|$ досягається, коли $|x|$ мінімальне, тобто при $x = 0$.

Знайдемо значення функції при $x = 0$.

$$y(0) = \log_{0,5}(2\sqrt[3]{2} - 0) = \log_{0,5} 2\sqrt[3]{2} = \log_{0,5} 2^{\frac{4}{3}} = -\frac{4}{3}$$

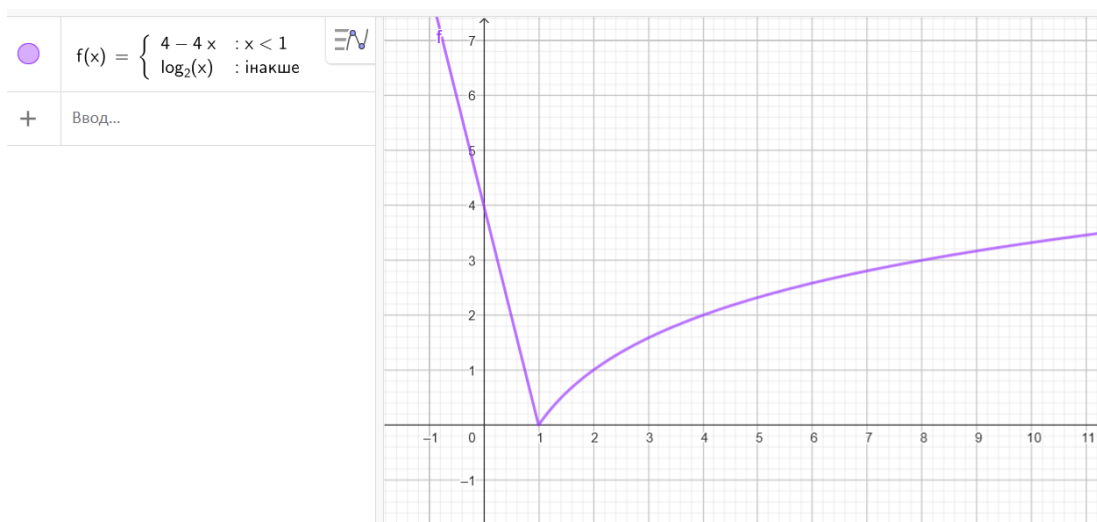
Оскільки основа логарифма менша за 1 (тобто 0.5), то функція є спадною. Чим більший вираз під логарифмом, тим менше значення функції. Отже, максимальне значення функції буде найменшим можливим значенням логарифма, коли аргумент логарифма найменший:

$$y(0) = \log_{0,5} 2\sqrt[3]{2}$$

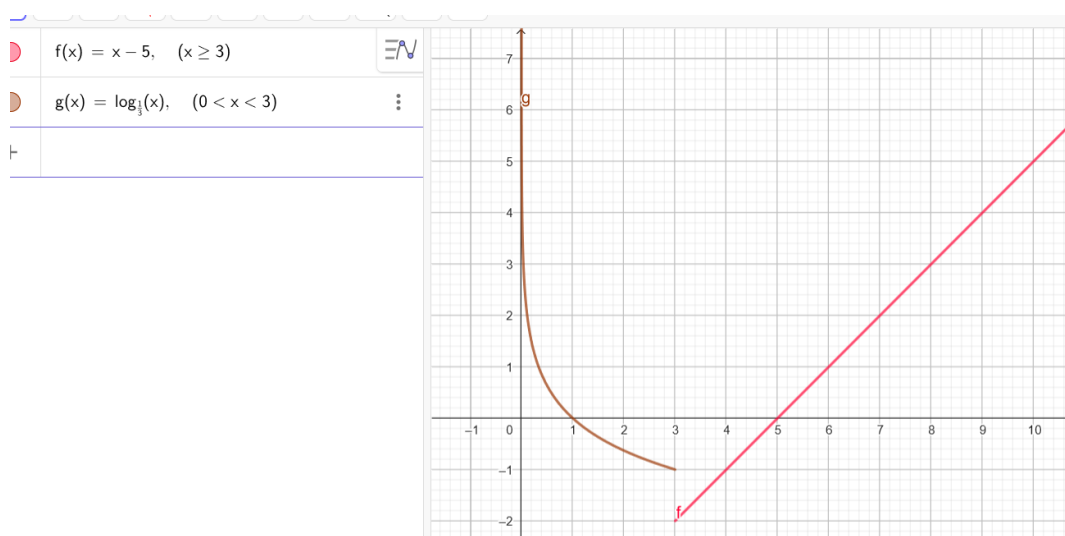
Найбільше значення функції $y = \log_{0,5}(2\sqrt[3]{2} - |x|)$ дорівнює $-\frac{4}{3}$ і досягається при $x = 0$.

Завдання 1.17. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} 4 - 4x, & x < 1 \\ \log_2 x, & x \geq 1. \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} x - 5, & x \geq 3 \\ \log_{\frac{1}{3}} x, & x < 3. \end{cases}$$



Завдання 1.18. Побудуйте графік функції $y = \log_2(|x| + 1)$.

Побудова графіка функції $y = \log_2(|x| + 1)$ за допомогою елементарних перетворень графіків може бути виконана в кілька кроків. Ми почнемо з графіка функції $y = \log_2 x$ і поступово внесемо необхідні зміни.

1) Будуємо графік $y = \log_2 x$. Це основний графік, який ми будемо змінювати. Він визначений тільки для $x > 0$, проходить через точку $(1, 0)$, і функція зростає.

2) Перетворення графіка на $y = \log_2(x + 1)$. Це горизонтальне зміщення графіка $y = \log_2 x$ на одиницю вліво. Тепер функція визначена для $x > -1$ і проходить через точку $(0, 0)$.

3) Модуль аргументу $|x|$. Ми беремо модуль аргументу, тобто перетворюємо функцію на $\log_2(x + 1)$. Це означає, що права частина графіка залишиться незмінною, а ліва частина буде відбиттям правої відносно осі y . Тепер функція визначена для всіх дійсних значень x .

Отже, графік $y = \log_2(|x| + 1)$:

1. Графік симетричний відносно осі y через $|x|$.
2. Проходить через точку $(0, 0)$.

Підсумок: побудувати графік функції $y = \log_2(|x| + 1)$ можна, спочатку побудувавши графік $y = \log_2 x$, зсунувши його вліво на 1 одиницю, а потім застосувавши модуль до аргументу, щоб віддзеркалити графік відносно осі ординат.

1.3. Аналіз навчальних програм і підручників за досліджуваною темою

Проведемо порівняльний аналіз теми, що стосується поняття логарифмів, у курсі алгебри і початків аналізу для 11 класу для поглибленого і профільного рівнів у відповідних діючих навчальних програмах [11].

Логарифмічні рівняння та нерівності виокремлені в окрему тему сумісно з показниковими. Цікаво, що тривалість вивчення теми на поглибленому рівні незначно перевищує вивчення за профільним рівнем (36 і 40 годин відповідно).

Профільний і поглиблений рівні вивчення математики включають такі однакові змістові компоненти

- Логарифми та їх властивості.
- Логарифмічна функція та її графік.
- Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності (з параметрами).
- Похідні показникової та логарифмічної функцій.
- Застосування логарифмічної функції у прикладних задачах.

Однак на поглибленому рівні додається тема «Нерівність Коші як наслідок нерівності Йєнсена», яка є додатковою призначена для поглибленого опрацювання теорії нерівностей. Цей розділ є окремим обов'язковим елементом для вивчення.

Обидва рівні передбачають однакове практичне застосування отриманих знань. Учні на поглибленому рівні навчання вивчають логарифми та їх властивості, будують графіки, розв'язують рівняння та нерівності, зокрема з параметрами, і знаходять похідні. Крім того, увага приділяється застосуванню показникових і логарифмічних функцій у прикладних задачах. Профільний рівень включає ті ж самі практичні задачі, однак глибина їх менша. Можна зробити висновок, що на профільному рівні більша увага надається практичним задачам і прикладним аспектам функцій, що відповідає меті профільної підготовки — забезпечення учнів навичками для застосування математичних знань у різних контекстах.

Відмітимо, що згідно діючих програм, нині передбачено вивчення похідної логарифмічної функцій і застосування цих знань для дослідження властивостей функцій. Вивчення похідних функцій є важливим компонентом як для поглибленого, так і для профільного рівнів, однак на профільному рівні більше уваги приділяється їх застосуванню в задачах, пов'язаних з реальними ситуаціями.

Таким чином, програма поглибленого рівня вивчення алгебри і початків налізку більше орієнтована на теоретичні аспекти теми, включає складніші

теми, як-от нерівність Коші, і дає можливість учням більш глибоко розвинути свої знання в теоретичному контексті.

Навчання за профільним рівнем є більш орієнтовним на прикладне використання математичних знань і надає учням більше часу на практичне застосування показникових і логарифмічних функцій у реальних задачах.

Аналіз шкільних підручників з математики важливий для оцінки їхньої ефективності та відповідності навчальним програмам. Проведемо аналіз підручників з алгебри і початків аналізу для 11 класу для поглибленого рівня авторських колективів на чолі з Аркадієм Мерзляком [10] та Олександром Істером [6].

Матеріали підручників цих авторів відповідають вимогам державної програми та її цілям, оскільки охоплюють всі ключові аспекти теми. Вони містять всі основні поняття й властивості логарифмів, необхідні для глибокого розуміння теми. Матеріал викладено логічно і послідовно. Спочатку введено поняття логарифма, далі поступово розкрито його властивості, а потім подано приклади для закріплення матеріалу.

Розділи мають чітко виділені підрозділи, кожен з яких відповідає певному аспекту логарифмічної функції. Після кожного теоретичного розділу є приклади для кращого розуміння теми. Однак у підручнику А. Мерзляка немає явних висновків після кожного розділу, але приклади і вправи допомагають учням узагальнити матеріал. Підручник О. Істера також висновків не містить, але кожен розділ наприкінці передбачає питання для контролю, відповіді на яких і будуть загальними висновками.

У обох підручниках поняття логарифма пояснені через прості приклади, що робить матеріал доступним для учнів з різними рівнями підготовки. Виклад зрозумілий і послідовний. Використовуються стандартні математичні терміни, що відповідає рівню учнів 11 класу.

У підручниках є достатня кількість прикладів та вправ різної складності — від простих до складних. Наприклад, завдання з логарифмічними рівняннями, нерівностями та їхніми системами. Наведені приклади

показують, як застосовувати логарифми в задачах, що мають практичне значення (наприклад, використання логарифмів у фінансових розрахунках або фізиці), зустрічаються в реальних процесах.

Підручники містять незначну кількість рисунків, які допомагають учням візуалізувати властивості логарифмічної функції. Ілюстрації чітко пояснюють матеріал. Графіки чітко відповідають поясненням у тексті.

У посібниках передбачені завдання на розвиток логічного мислення, зокрема, вправи, де учням пропонують довести логарифмічні властивості або розв'язати рівняння. Є набір вправ для закріплення матеріалу, проте окремих тестів для самоконтролю не передбачено у А. Мерзляка, однак розділи для перевірки власної компетентності за допомогою тестів є у підручнику О. Істера.

Підручники сприяють розвитку ключових математичних компетентностей, зокрема вмінню аналізувати та робити висновки, оскільки багато завдань потребують застосування логічних міркувань і перевірки знань.

Є завдання для учнів з різними рівнями підготовки, включаючи більш складні завдання, що потребують додаткових знань (наприклад, завдання з логарифмами для поглибленого вивчення).

У підручнику Аркадія Мерзляка не зазначено цифрові інструменти або рекомендації щодо їх використання, однак традиційний виклад теми добре інтегрується в сучасний навчальний процес. Олександр Істер натомість пропонує у якості завершення вивчення логарифмів перейти за посиланням у QR-коді до вправ для повторення знань за всім розділом. За посиланням доступний pdf-файл з переліком завдань до кожного розділу, що достатньо зручно та наприкінці є відповіді до них для успішного самоконтролю учнів.

Матеріал підручників відповідає віковим особливостям учнів 11 класу. Пояснення йде від простого до складного, що відповідає рівню підготовки старшокласників.

Підручники містить достатню кількість завдань для самостійної роботи, але чітких поетапних інструкцій для розв'язування складних задач немає. Немає прикладів розв'язування окремих складних задач певного типу: побудови графіків складних функції, що містять логарифми, за допомогою елементарних перетворень тощо.

Приклади і вправи у посібниках підібрані так, що демонструють практичне застосування логарифмів (наприклад, фінансові задачі або застосування в природничих науках), що може підвищити мотивацію учнів.

Підручник Олександра Істера містить після кожного параграфа також задачі з життєвої математики та цікаві задачі для неледачих учнів з математичних олімпіад різних років, які не стосуються логарифмів.

Безсумнівною перевагою підручників є наявність великої кількості розв'язаних завдань до теми.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Поняття логарифму є важливим елементом шкільного курсу математики, оскільки воно закладає основи для вивчення логарифмічних рівнянь та нерівностей, їх систем, а також розвитку обчислювальних навичок. В елементарному курсі математики особлива увага приділяється базовим властивостям логарифмів, зокрема основним тотожностям, властивостям логарифмічних виразів та основним прийомам їхнього спрощення. Вивчення логарифмів дозволяє учням більш усвідомлено сприймати концепції, пов'язані з експоненційними та показниковими функціями.

Розгляд логарифмічної функції як оберненої до експоненційної функції надає можливість учням зрозуміти більш широкий контекст математичних взаємозв'язків. У шкільному курсі підкреслюється важливість властивостей логарифмічної функції, зокрема її області визначення, монотонності та поведінки на проміжках. Графік логарифмічної функції сприяє візуалізації її особливостей та допомагає виявити залежність між основою логарифма та формою кривої. Таке опрацювання теми формує навички роботи з графіками функцій, що є необхідним для подальшого вивчення аналізу та алгебри.

Аналіз навчальних програм і підручників показує, що тематика логарифмів викладається в межах старшої профільної школи з урахуванням вимог державного стандарту та рівня навчання (профільний або стандарт, чи класи з поглибленим вивченням математики). Основні підручники з математики для старших класів містять чітке роз'яснення властивостей логарифмів, однак виклад матеріалу може різнитися залежно від рівня складності. Підручники профільного чи поглибленого рівнів детально розглядають різноманітні способи розв'язання задач, що дозволяє учням закріпити теоретичні знання про логарифми,

РОЗДІЛ II. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЛОГАРИФМИ, У КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ПРОФІЛЬНОЇ ШКОЛИ

2.1. Класифікація логарифмічних рівнянь та методи їх розв'язування.

При розв'язанні логарифмічних рівнянь часто доводиться логарифмувати та потенціювати обидві частини рівняння. Вказані операції можуть привести до рівнянь, що не рівносильні до даних.

Так, якщо A і B є виразами, що містять невідомі, то не завжди є рівносильними такі рівняння:

- a) $A = B$ і $\log A = \log B$.
- b) $\log(AB) = \log C$ та $\log A + \log B = \log C$.
- c) $\log A/B = \log C$ та $\log A - \log B = \log C$.
- d) $\log A^n = C$ і $n \log A = C$.

Для логарифмічних рівнянь загального методу розв'язання нема. Однак серед рівнянь можна виділити кілька груп, що розв'язуються елементарними методами. Приступаючи до розв'язування таких рівнянь, бажано встановити область допустимих значень для невідомого.

Розглянемо умовну класифікацію логарифмічних рівнянь у залежності від способу розв'язування цих рівнянь, що у свою чергу залежить від того, чи змінна міститься тільки під знаком логарифму:

- Найпростіші логарифмічні рівняння та ті, які зводяться до них за допомогою властивостей логарифмів;
 - Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$;
 - Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
 - Зведення до алгебраїчного через заміну змінної;
 - Рівняння вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$, $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$.
- Рівняння, що потребує логарифмування.

Найпростіші логарифмічні рівняння та ті, які зводяться до них

Серед логарифмічних рівнянь спершу завернемо увагу на ті рівняння, розв'язування яких слідує безпосередньо з означення логарифма, такі рівняння вважають найпростішими.

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0, a \neq 1$, називають найпростішим логарифмічним рівнянням. Таке рівняння має єдиний корінь при будь-якому b , його можна знайти за означення логарифма: $x = \log_a b$.

Завдання 2.1: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_2(x + 1) = 3$.

Розв'язання: За означенням логарифма, рівняння можна переписати у вигляді: $2^3 = x + 1$, звідки маємо, що $x = 7$.

Завдання 2.2: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_3(2x - 5) = 2$.

Розв'язання: За означенням логарифма, рівняння можна переписати у вигляді показникової функції: $3^2 = 2x - 5$, звідки маємо, що $x = 7$.

Завдання 2.3: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_5 x^2 = 4$.

Розв'язання: Перепишемо за означенням, отримаємо: $5^4 = x^2$, звідки маємо, що $x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$.

Завдання 2.4: Розв'язати рівняння $\lg x = 2 - \lg 5$.

Розв'язання. ОДЗ $x > 0$; $\lg x = \lg 100 - \lg 5 = \lg \frac{100}{5} = \lg 20$; $x = 20$.

Завдання 2.5: Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_3(x^2 - 7x + 21) = 2$.

Розв'язання: Область допустимих значень для x – вся числова вісь, тому що $x^2 - 7x + 21 > 0$ при будь-якому дійсному x , дискримінант $D < 0$. За визначенням логарифма

$$x^2 - 7x + 21 = 3^2, x_1 = 3; x_2 = 4.$$

Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Для розв'язання тих логарифмічних рівнянь, що не є найпростішими, найчастіше застосовують рівносильні або нерівносильні перетворення – заміна вихідного рівняння таким, що не змінює кількості коренів вихідного

рівняння (рівносільний перехід) або такі заміни рівняння, які впливають на кількість коренів вихідного рівняння – втрата чи поява сторонніх коренів (нерівносільний перехід) у наслідок зміни області значень вихідного рівняння. Такий підхід використовується тоді, коли не можна виконати рівносільний перехід та альтернативи йому нема.

Ідея рівносільного переходу описується такою *теоремою*: нехай $a > 0, a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0, x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Доведення. Для доведення скористаємося означенням логарифма та властивостями показникової функції і відповідною теоремою для неї про рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Пряма теорема. Нехай $\log_a x_1 = \log_a x_2$, за означенням логарифма це означає, що

$$a^{\log_a x_1} = x_1, \quad a^{\log_a x_2} = x_2.$$

Оскільки за умовою $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то підставимо це значення в попередню першу рівність, отримаємо $a^{\log_a x_2} = x_1$.

Але за означенням логарифма $a^{\log_a x_2} = x_2$, отже $x_1 = x_2$.

Обернена теорема. Нехай $x_1 = x_2$. Тоді маємо, що $a^{\log_a x_1} = a^{\log_a x_2}$. Оскільки показникова функція є строго монотонною (зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$), то з рівності степенів випливає рівність показників $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Таким чином, ми довели, що рівність логарифмів $\log_a x_1 = \log_a x_2$, виконується тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Наслідок. Нехай $a > 0, a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносільне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв'язати легше. Якщо ж обидві

нерівності розв'язати складно, то розв'язуємо рівняння системи $f(x) = g(x)$ та обираємо ті, що задовольняють хоча б одну з цих нерівностей.

Завдання 2.7: Розв'язати логарифмічне рівняння

$$5 \lg x = 3 \lg \frac{x}{2}.$$

Розв'язання: Область допустимих значень $x > 0$.

$$\lg x^5 = \lg \left(\frac{x}{2}\right)^3 \rightarrow x^5 = \frac{x^3}{8} \rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0, x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{4}, x_5 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

До області допустимих значень належить тільки x_5 . Отже дане рівняння має один розв'язок $x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Завдання 2.8: Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\lg(2x) = 2 \lg(4x - 15).$$

Розв'язання: Область допустимих значень для невідомого $\lg(2x)$ $x > 0$, для $\lg(4x - 15)$ $4x - 15 > 0 \rightarrow x > \frac{15}{4}$. Отже область допустимих значень рівняння буде $x > 3\frac{3}{4}$.

Перетворимо дане рівняння:

$$\lg(2x) = \lg(4x - 15)^2 \rightarrow 2x = (4x - 15)^2 \rightarrow 16x^2 - 122x + 225 = 0.$$

Отже, $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{8}$. Оскільки x_2 не належить до області визначення, то x_1 є єдиним коренем рівняння.

Зроблений під час розв'язування перехід від рівняння $\lg(2x) = 2 \lg(4x - 15)$ до рівняння $2x = (4x - 15)^2$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Це відбувається тому, що область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ (4x - 15) > 0 \end{cases}$$

множиною розв'язків якої є проміжок $\left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$. Замінивши вираз $\lg(2x) = 2 \lg(4x - 15)$ на вираз $\lg(4x - 15)^2$, ми розширили область

визначення початкового рівняння, оскільки область визначення виразу $\lg(4x - 15)^2$ задається нерівністю $(4x - 15)^2 > 0$, множиною розв'язків якої $\in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $\left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$ до множини $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$ і стало причиною появи стороннього кореня $x_1 = \frac{9}{2}$.

Логарифмічні рівняння вигляду

$\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \dots + \log_a f_s(x) = \log_a \varphi_1(x) + \log_a \varphi_2(x) + \dots + \log_a \varphi_m(x)$, де $a > 0, a \neq 1$; $f_i(x), i = \{1, 2, \dots, s\}, \varphi_j(x), j = \{1, 2, \dots, m\}$ — алгебраїчні функції, при цьому деякі з них можуть бути сталими числами.

Рівняння, що містять суми логарифмів також можна віднести до рівнянь вказаного типу, оскільки вони можуть бути зведеними за допомогою властивостей логарифмів до рівнянь виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Рівняння такого вигляду зводяться до рівняння виду

$$f_1(x)f_2(x) \dots f_s(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x) \dots \varphi_m(x).$$

Завдання 2.9. Розв'язати рівняння $1 + \log_6 \frac{(x+3)}{(x+7)} = \frac{1}{2} \log_6 (x-1)^2$.

Розв'язок: Перепишемо дане рівняння у вигляді:

$$\log_6 6 + \log_6 \frac{(x+3)}{(x+7)} = \log_6 \sqrt{(x-1)^2}$$

$$\log_6 6 \frac{(x+3)}{(x+7)} = \log_6 |x-1|.$$

Звідки маємо, $\begin{cases} \frac{x+3}{x+7} = |x-1| \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}, x_1 = -11, x_2 = -1, x_3 = 5.$

Відповідь: $-11; -1; 5$.

Завдання 2.10. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\lg(3x - 11) + \lg(x - 27) = 3.$$

Розв'язання: Знайдемо спочатку область допустимих значень для невідомого

$$3x - 22 > 0 \rightarrow x > 3\frac{2}{3}.$$

$$x - 27 > 0 \rightarrow x > 27.$$

Загальна область допустимих значень рівняння є перетином цих двох множин, маємо, що $x > 27$.

Виконаємо заміну у вихідному рівнянні, $3 = \lg 1000$, тоді можемо його записати у вигляді

$$\lg(3x - 11)(x - 27) = \lg 1000,$$

Звідки $(3x - 11)(x - 27) = 1000$ або $3x^2 - 92x - 703 = 0 \rightarrow x_1 = 37$, $x_2 = -\frac{19}{3}$. Оскільки $x_2 = -\frac{19}{3}$ не належить області визначення, то рівняння має єдиний корінь $x = 37$.

Завдання 2.11. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\lg(2x) + \lg(x + 3) = \lg 2 + \lg(6x - 2).$$

Розв'язання: Область допустимих значень

$$\text{для } \lg(2x) : 2x > 0 \rightarrow x > 0.$$

$$\text{для } \lg(x + 3) : x + 3 > 0 \rightarrow x > -3.$$

$$\text{для } \lg(6x - 2) : 6x - 2 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Загальна область допустимих значень буде $x > \frac{1}{3}$.

Рівняння набуває вигляду $x(x + 3) = (6x - 2)$ або $x^2 - 3x + 2 = 0$, звідки $x_1 = 2, x_2 = 1$. Обидва ці значення належать області визначення і обидва вони є розв'язком цього рівняння.

Завдання 2.12. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}(4 - x) - \log_4(6 + x)^3.$$

Розв'язання: Зведемо логарифми до однакової основи $\frac{1}{4}$, маємо

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}(4 - x) = \log_{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3}(4 - x)^3 = \log_{\frac{1}{4}}(4 - x)^3,$$

$$-\log_4(6+x)^3 = \log_{4^{-1}}(6+x)^{-3} = -\log_{\frac{1}{4}}(6+x)^3.$$

Тоді початкове рівняння матиме вигляд

$$\frac{3}{2} \log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(6+x)^3,$$

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(6+x),$$

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 1 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)$$

$$\log_{\frac{1}{4}} 4|x+2| = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)(x+6)$$

Маємо, що $4|x+2| = (4-x)(x+6)$, звідки отримуємо

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 & x+2 < 0 \\ (x+2) = (4-x)(x+6) & -(x+2) = (4-x)(x+6). \end{cases}$$

Коренем першої системи є $x_1 = 2, x_2 = 1 - \sqrt{33}$. Виконаємо перевірку знайдених чисел з метою відсікти сторонні корені, що з'явилися у результаті розширення області визначення в процесі використання властивостей логарифма. Перевірка показує, що числа $x_1 = 2, x_2 = 1 - \sqrt{33}$ є коренями рівняння.

Зведення до алгебраїчного через заміну змінної;

Для розв'язання логарифмічного рівняння вигляду $F[g(x)] = 0$, де $g(x)$ – логарифмічна функція, а F – елементарна алгебраїчна функція вводять змінну $t = g(x)$. Тоді вихідне рівняння зводиться до рівняння $F(t) = 0$.

Завдання 2.13. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\lg(x-5) \lg x^3 + 18 = 0.$$

Область допустимих значень $x > 0$. Оскільки $\lg x^3 = 3 \lg x$, то дане рівносильне рівняння є рівносильним

$$\lg(x-5) 3 \lg x + 18 = 0.$$

Покладаючи $\lg x = t$, отримаємо

$$3t(t-5) + 18 = 0; t^2 - 5t + 6 = 0; \rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = 3.$$

Розв'язавши рівняння $\lg x = 2, \lg x = 3$, одержимо розв'язки даного рівняння. $x_1 = 100, x_2 = 1000$.

Завдання 2.14. Розв'язати логарифмічне рівняння

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0.$$

Область допустимих значень $x > 0$. Покладаючи $\log_2 x = t$, отримаємо

$$t^2 - t - 2 = (t - 2)(t + 1) = 0.$$

Отримаємо, що $t_1 = 2, t_2 = -1$. Отже, $\log_2 x = 2 \rightarrow x = 4$; $\log_2 x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Завдання 2.15. Розв'язати логарифмічне рівняння $\log_5 \log_4 \log_3 x = 0$.

Перепишемо рівняння так $\log_5(\log_4 \log_3 x) = 0$.

Тоді число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма дорівнює $5^0 = 1$: $\log_4 \log_3 x = 5^0 = 1$.

Аналогічно $\log_4 \log_3 x = \log_4(\log_3 x) = 1$, отже число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма дорівнює $4^1 = 4$: $\log_3 x = 4$. Тоді маємо, $x = 3^4 = 81$.

Розв'язок логарифмічних рівнянь вигляду $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$

та рівнянь вигляду $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$

Для того, щоб розв'язати рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ потрібно розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$ та вибрати значення, які задовольняють умові для області визначення рівняння

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0, \\ \varphi(x) \neq 1 \end{cases}$$

Для того, щоб розв'язати рівняння вигляду $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$ потрібно розв'язати систему двох рівнянь $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ \varphi(x) = 1 \end{cases}$ та перевірити, які з коренів рівняння будуть коренями початкового рівняння.

Завдання 2.16: Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\log_{x-1}(x^2 - 5x + 2,25) = 2.$$

Розв'язання: область допустимих значень невідомого визначається з умов $x - 1 > 0, x - 1 \neq 1, x^2 - 5x + 2,25 > 0$. Отже, $x > 4,5$.

Розв'язання вихідного рівняння зводиться до розв'язання рівняння

$$x^2 - 5x + 2,25 = (x - 1)^2, \text{ або } -3x = -1,25; x = \frac{5}{12}.$$

Завдання 2.17: Розв'язати логарифмічне рівняння

$$\log_{x^2+7x-3} x^2 + \log_{x^2}(x^2 + 7x - 3) - 2 = 0.$$

Спочатку використаємо властивості логарифмів для спрощення виразів, отримаємо

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ тоді } \log_{x^2+7x-3} x^2 = \frac{1}{\log_{x^2} x^2 + 7x - 3}$$

Маємо, що

$$\log_{x^2+7x-3} x^2 + \frac{1}{\log_{x^2} x^2 + 7x - 3} = 2,$$

$$\text{за умови, що } \begin{cases} x^2 + 7x - 3 > 0 \\ x^2 + 7x - 3 \neq 1 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases}$$

Методом інтервалів розв'яжемо нерівності, враховуючи усі обмеження.

$$D = 7^2 - 4(1)(-3) = 49 + 12 = 61$$

Тоді корені нерівності

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{61}}{2}, x_2 = \frac{-7 - \sqrt{61}}{2}.$$

Отже, областю допустимих значень рівняння є множина

$$\left(-\infty; \frac{-7 - \sqrt{61}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7 + \sqrt{61}}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

Нехай $\log_{x^2+7x-3} x^2 = t$, тоді вихідне рівняння запишемо як

$$\frac{1}{t} + t = 2 \rightarrow \frac{t^2 - 2t + 1}{t} = \frac{(t - 1)^2}{t} = 0, \rightarrow t = 1$$

Отже, $\log_{x^2+7x-3} x^2 = 1$, звідки за означенням логарифма маємо

$$x^2 + 7x - 3 = x^2 \rightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Завдання 2.18: Розв'язати рівняння

$$\log_x 2x + 1 = \log_{2x^3+x^2} 4x^3 + 4x^2 + x.$$

Знайдемо область визначення рівняння
$$\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 4x^3 + 4x^2 + x > 0 \\ x > 0 \\ x \neq 1 \\ 2x^3 + x^2 > 0 \\ 2x^3 + x^2 \neq 1 \end{cases}.$$

Перейдемо в даному рівнянні до логарифма з основою 2, отримаємо

$$\frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2(4x^3 + 4x^2 + x)}{\log_2(2x^3 + x^2)}$$

та виконаємо дії над виразами, що містять логарифми, у правій частині рівняння

$$\log_2(4x^3 + 4x^2 + x) = \log_2 x (2x + 1)^2 = \log_2 x + 2 \log_2(2x + 1) \quad i$$

$$\log_2(2x^3 + x^2) = 2 \log_2 x + \log_2(2x + 1)$$

Отже, отримаємо таке рівняння

$$\frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x + 2 \log_2(2x + 1)}{2 \log_2 x + \log_2(2x + 1)} = \frac{1 + 2 \frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x}}{2 + \frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x}}.$$

Нехай $t = \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}$, отримаємо

$$t = \frac{1+2t}{2+t},$$

$$\text{тоді } 2t + t^2 = 1 + 2t \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t_1 = 1, t_2 = -1.$$

Маємо 2 рівняння:

$$\frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x} = 1, \quad \frac{\log_2(2x + 1)}{\log_2 x} = -1.$$

Перше рівняння запишемо як $\log_2 x = \log_2(2x + 1)$, звідки $x_1 = -\frac{1}{2}$, але на області визначення початкового рівняння виконується умова $2x + 1 > 0$, яку не задовольняє $x_1 = -\frac{1}{2}$ має коренів, а друге рівняння $\log_2 x = -\log_2(2x + 1)$, запишемо як

$$\log_2 x = \log_2(2x + 1)^{-1},$$

$$x = \frac{1}{2x+1} \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = 0$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -1.$$

Оскільки виконується умова $x > 0$, то $x_3 = -1 < 0$ не є коренем рівняння.

Відповідь: $x = 1/2$.

Рівняння, що потребує логарифмування.

Якщо обидві частини рівняння $f(x) = g(x)$ додатні, то коли прологарифмувати обидві його частини за основою a , $a \neq 1, a > 0$, отримаємо рівняння

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

Що рівносильне даному. Вибір основи для логарифмування треба зробити з метою спрощення отримати рівняння, яке є менш складним відносно вихідного.

Такий спосіб раціонально застосовувати рівнянь, де логарифмічні вирази містяться у степені, тобто виду $a^{\varphi(x)}, (h(x))^{\psi(x)}$, де $\varphi(x), \psi(x)$ – деякі логарифмічні вирази.

Завдання 2.19. Розв'язати рівняння $(\sqrt{x})^{\log_4 \sqrt{x}-2} = (2)^{3(\log_4 \sqrt{x}-2)}$.

Обидві частини вихідного рівняння є додатними величинами, тому можемо обидві частини цього рівняння прологарифмувати. Вибір основи логарифмування треба зробити так, щоб кожен з виразів в обох частинах рівняння можна було звести до більш простого, ніж вихідне. Такою основою може бути число 4 як основа логарифма степеня або навіть 2. Оберемо за основу логарифма число 4, маємо

$$\log_4 (\sqrt{x})^{\log_4 \sqrt{x}-2} = \log_4 (2)^{3(\log_4 \sqrt{x}-2)}.$$

$$(\log_4 \sqrt{x} - 2) \log_4 (\sqrt{x}) = 3(\log_4 \sqrt{x} - 2) \log_4 (2).$$

Нехай $\log_4 \sqrt{x} = t$, тоді отримаємо таке квадратне рівняння

$$(t-2)t = \frac{3}{2}(t-2) \leftrightarrow t^2 - \frac{7}{2}t + \frac{3}{2} = 0$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-3) = 0.$$

Повертаємося до заміни

$$\begin{cases} \log_4 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \\ \log_4 \sqrt{x} = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 4^6 = 4096 \end{cases}$$

Відповідь: 4; 4096.

2.2. Класифікація логарифмічних нерівностей та методи їх розв'язування

Серед множини логарифмічних нерівностей можна виділити:

- найпростіші нерівності;
- нерівності, де обидві частини містять логарифми з однаковими основами;
- нерівності, що містять змінну в основі логарифма.
- нерівності, що можна розв'язати методом інтервалів.

Також при розв'язуванні нерівностей, що містять невідому під знаком логарифма або у його основі, використовують також раніше засвоєні методи розв'язування алгебраїчних нерівностей, логарифмічних рівнянь, широко використовують властивості логарифмічної функції.

Найпростіші логарифмічні нерівності

Дуже часто логарифми виникають при розв'язуванні найпростіших показникових нерівностей вигляду $a^x < b$ або $a^x > b$. Перша з них при $b \leq 0$ немає розв'язків, а при $b > 0$ її задовольняють усі значення

$$x > \log_a b, \text{ якщо } a > 1;$$

$$x < \log_a b, \text{ якщо } 0 < a < 1.$$

Якщо описувати правила розв'язання строгих чи нестрогих нерівностей, що містять логарифми, то у залежності від основи a , вони розв'язуються по-

різному: якщо $a > 1$, функція $y = \log_a x$ є зростаючою і більшим значенням аргументу відповідають більші значення функції. Тому нерівність $\log_a x > b$ еквівалентна нерівності $x > a^b$. Якщо $0 < a < 1$, функція $\log_a x$ є спадною (малюнок 7.2), тобто меншим значенням аргументу відповідають більші значення функції, і нерівність $\log_a x > b$ еквівалентна нерівності $x < a^b$.

Важливо зауважити, що оскільки область допустимих значень логарифмічної функції має умову $x > 0$, то нерівності автоматично враховують цю умову. Якщо нерівність отримана після перетворень не задовольняє цієї умови, то це необхідно перевірити додатково.

Отже, правила учням для запам'ятовування:

- У випадку $a > 1$, при переході від логарифмічної нерівності до нерівності без логарифма знак нерівності не змінюється.
- Якщо $0 < a < 1$, знак нерівності змінюється на протилежний.

Найпростішими логарифмічними нерівностями називають, зрозуміло, й нестрогі нерівності.

Завдання 2.20. Розв'язати нерівність $3^x > \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

Розв'язання. Тут основа степеня 3 більше за 1, отже $x < \log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$. Але $\log_3 \sqrt[5]{\frac{1}{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5}$, тому $x > -\frac{1}{5}$.

Найпростішими логарифмічними нерівностями називають нерівності вигляду

$$\log_a x > b, \quad \text{або} \quad \log_a x < b.$$

Перша з них має множину розв'язків $x > a^b$ при $a > 1$; $0 < x < a^b$ при $0 < a < 1$.

Завдання 2.21. Розв'язати нерівність $\log_{0,5} x \geq 3$.

Розв'язання. Потенціюючи вихідну нерівність, маємо $x \leq 0,5^3$; $0 < x < 0,125$.

Логарифмічні нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad \log_a f(x) \geq \log_a g(x).$$

При розв'язанні таких нерівностей важливо знати правила, за якими змінюється знак нерівності залежно від основи логарифма і враховувати визначити область допустимих значень (ОДЗ. Це означає, що обидві функції і повинні бути додатними, тобто $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Правила зміни знаку таких нерівностей залежать від основи логарифма. Якщо основа $a > 1$, то знак нерівності зберігається, тобто:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

У випадку нестрогої нерівності, отримуємо також нестрогу нерівність для підлогарифмічних функцій за умови для основи $a > 1$.

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Системи можна розглядати спрощеного вигляду: можна виключати одну з нерівностей для підлогарифмічної функції – наприклад, не враховувати $f(x) > 0$, оскільки вона слідує з умов $f(x) > g(x)$ і $g(x) > 0$.

У випадку, коли основа $0 < a < 1$, то знак нерівності-наслідку змінюється на протилежний, тобто:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або}$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

У системах також можна виключати одну з нерівностей для підлогарифмічної функції – не враховувати $g(x) > 0$, оскільки вона слідує з умов $f(x) < g(x)$ і $f(x) > 0$.

Таким чином, правило зміни знака при розв'язуванні логарифмічних нерівностей, обидві частини якої – логарифмічні вирази: якщо основа логарифма більша за 1, знак нерівності не змінюється. Якщо ж основа $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється на протилежний. Визначення ОДЗ є важливим кроком, адже логарифмічна функція визначена тільки для додатних аргументів. Тому завжди додавайте умови і до вашої системи нерівностей.

Завдання 2.22. Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{\lg x} + \frac{1}{1 - \lg x} > 1.$$

Виконавши додавання в лівій частині, одержимо $\frac{1}{\lg x(1 - \lg x)} > 1$, звідки $0 < \lg x(1 - \lg x) < 1$.

Як бачимо, розв'язок x мусить задовольняти дві нерівності

$$\lg^2 x - \lg x + 1 > 0 \quad \text{і} \quad \lg x(1 - \lg x) > 0.$$

Першу задовольняє будь-яке додатне значення x , тому що дискримінант тричлена в його лівій частині від'ємний. Другу задовольняють значення x , при яких $0 < \lg x < 1$, тобто $1 < x < 10$.

Відповідь: $1 < x < 10$.

Завдання 2.23. Знайти всі значення x , для яких

$$\lg \frac{x+3}{x+4} > \lg \frac{x+5}{x+2}.$$

Спочатку встановимо область допустимих значень x . Повинні виконуватись нерівності $\lg \frac{x+3}{x+4} > 0$, $\lg \frac{x+5}{x+2} > 0$. Перша з них справедлива при $x < -4$ і $x > -3$, а друга – при $x < -5$ і $x > -2$. Отже, область допустимих значень нерівності для $x < -5$ і $x > -2$.

Перетворимо дану нерівність так:

$$\begin{aligned} \lg \frac{x+3}{x+4} - \lg \frac{x+5}{x+2} &> 0; \\ \lg \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x+5} &> 0 \rightarrow \frac{x+2}{x+5} \cdot \frac{x+3}{x+4} > 1 \rightarrow \end{aligned}$$

$$(x + 2)(x + 3) > (x + 5)(x + 4) \rightarrow x < -3,5.$$

Враховуючи ОДЗ, маємо $x < -5$.

Нерівності, що містять змінну в основі логарифма.

Для розв'язування нерівностей вигляду $\log_{f(x)} g(x) > b$ або $\log_{f(x)} g(x) < b$ треба розглянути два випадки для основи $0 < f(x) < 1$ та $f(x) > 1$, тобто розв'язати сукупність двох систем

$$\left[\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < g(x) < f^b(x) \end{cases} \right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > f^b(x) \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} f(x) > 1 \\ g(x) > f^b(x) \end{cases} \right. \quad \text{або} \quad \left[\begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < g(x) < f^b(x) \end{cases} \right.]$$

Або рівносильними їм системами відповідно

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (f(x) - 1)(g(x) - f^b(x)) > 0 \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (f(x) - 1)(g(x) - f^b(x)) < 0 \end{array} \right.$$

Завдання 2.24. Розв'язати нерівність $\log_{x-3} x^2 - 4x + 3 < 0$.

Розв'язок: Розглянемо 2 випадки у залежності від обмеження :

1) $x - 3 > 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3 > 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} x > 4, \\ (x - 1)(x - 3) > 0 \end{array} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 < 1 \end{array} \right. \quad (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) < 0$$

Система розв'язку немає

2) $0 < x - 3 < 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x - 3 < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1 < x < 4, \\ (x - 1)(x - 3) > 0 \end{array} \Leftrightarrow x \in (3; 4). \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 > 1 \end{array} \right. \quad (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) > 0$$

Відповідь: (3;4).

Завдання 2.25. Розв'язати нерівність $\log_{2x-1} 3x - 5 < \log_{2x-1} 15 - 7x$.

Розв'язок: Розглянемо два випадки у залежності від обмеження для основи. Врахуємо також, що ця нерівність є поєднанням двох видів

логарифмічних нерівностей – зі змінною в основі та змінною під знаком логарифму.

$$1) 2x - 1 > 1.$$

$$\begin{cases} 2x - 1 > 1, \\ 3x - 5 > 0 \\ 15 - 7x > 0 \\ (3x - 5) < 15 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > \frac{5}{3} \\ x < \frac{15}{7} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{3}; 2\right)$$

$$2) 0 < 2x - 1 < 1.$$

$$\begin{cases} 0 < 2x - 1 < 1, \\ 3x - 5 > 0 \\ 15 - 7x > 0 \\ (3x - 5) > 15 - 7x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < 1, \\ x > \frac{5}{3} \\ x < \frac{15}{7} \\ x > 2 \end{cases}.$$

Друга система розв'язку немає

$$\text{Відповідь: } \left(\frac{5}{3}; 2\right).$$

Нерівності, що можна розв'язати методом інтервалів.

Універсальний метод інтервалів можна використовувати і для розв'язування логарифмічних нерівностей. У цьому випадку його зручно використовувати, коли нерівність містить композицію лінійного множника та логарифма.

Завдання 2.26. Розв'язати нерівність $(x^2 + 4x) \log_5(x + 2) \geq 0$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $f(x) = (x^2 + 4x) \log_5(x + 2)$.

Очевидно, що ОДЗ $(-2; +\infty)$.

Визначимо нулі функції $f(x)$ з сукупності

$$\begin{cases} (x^2 + 4x) = 0 \\ \log_5(x + 2) = 0 \end{cases}$$

Корені першого рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, однак другий корінь не задовольняє ОДЗ нашої нерівності. Коренем другого рівняння, що є

логарифмічним, є число $x_3 = -1$. Отже, нулями функції $f(x)$ є числа $x = 0, x = -1$. Позначимо їх на числовій осі, та визначимо знак $f(x)$ на кожному з отриманих інтервалів,



Отже, $x \in (-2; 1] \cup [0; +\infty)$

Завдання 2.27. Розв'язати нерівність $(4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3) > 0$.

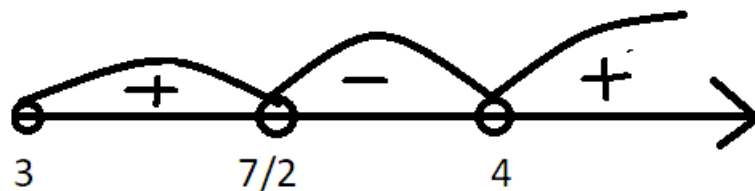
Розв'язування. Розглянемо функцію $f(x) = (4x^2 - 16x + 7) \log_2(x - 3)$.

Очевидно, що ОДЗ $(3; +\infty)$.

Визначимо нулі функції $f(x)$ з сукупності

$$\begin{cases} 4x^2 - 16x + 7 = 4\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \log_2(x - 3) = 0 \end{cases}$$

Корені першого рівняння $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, однак другий корінь не задовольняє ОДЗ нашої нерівності. Коренем другого рівняння, що є логарифмічним, є число $x_3 = 4$. Отже, нулями функції $f(x)$ є числа $x = 4$, $x = \frac{7}{2}$. Позначимо їх на числовій осі, та визначимо знак $f(x)$ на кожному з отриманих інтервалів,



Отже, $x \in \left(3; \frac{7}{2}\right] \cup [4; +\infty)$

2.3. Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей з параметрами

Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей із параметрами потребує дотримання певного алгоритму і врахування умов ОДЗ логарифма та обмежень для його основи.

При розв'язуванні логарифмічних рівнянь з параметрами потрібно звертати увагу на такі аспекти при розв'язуванні:

1) Умова існування логарифмів. Оскільки логарифм визначений лише для додатних чисел, область визначення рівняння є ключовим аспектом. Якщо рівняння має вигляд $\log_a f(x) = g(x)$, то потрібно, щоб $f(x) > 0$ і основа логарифма $a > 0, a \neq 1$

2) Спрощення рівняння. Важливо по можливості звести рівняння за допомогою базових властивостей логарифмів (використання властивостей логарифмів (добуток, частка, піднесення до степеня) чи правил розв'язування логарифмічних рівнянь певного типу ($\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$), за умови, що $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$);

3) Розв'язання рівняння без логарифмів. Після спрощення розв'язуємо рівняння (якщо є параметр k , то розв'язок також буде містити його).

4) Перевірка області визначення. Після отримання розв'язків перевіряємо, чи задовольняють вони початковим умовам для логарифмів.

Завдання 2.28. Розв'яжемо рівняння $\log_2(x + k) = 3$ для параметра k .

Знайдемо ОДЗ логарифма $x + k > 0 \Rightarrow x > -k$. Виконаємо перехід по показникового рівняння : $x + k = 2^3 = 8$ та розв'яжемо його відносно x . Розв'язком рівняння є вираз $x = 8 - k$. Виконаємо перевірку знайденого розв'язку $-k < 8 - k \Rightarrow x > -k$, тобто всі значення k задовольняють умову. Відповідь: $x = 8 - k$ при $x > -k$.

Завдання 2.29. При яких значеннях параметра a рівняння $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ має два корені?

Розв'язок: виконаємо рівносильний перехід до показникового рівняння:

$$9^x - 3^x + 9a^3 = 0.$$

Нехай $3^x = t$, $t > 0$, тоді $t^2 - t + 9a^3 = 0$.

За теоремою Вієта: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1, \\ t_1 t_2 = 9a^3 \end{cases}$

$$\begin{cases} D = 1 - 36a^3 > 0, \\ 9a^3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{\sqrt[3]{36}}$$

Відповідь: $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$

Завдання 2.30. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{x^2}{a}} a + \log_a x = 2$.

Розв'язок: область визначення логарифмічного рівняння $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \sqrt{a} \end{cases}$

Рівняння матиме розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконуватимуться умови, що накладаються на основу логарифмів $a > 0, a \neq 1$. Виконаємо перетворення лівої частини вихідного рівняння

$$\log_{\frac{x^2}{a}} a + \log_{a^2} x = \frac{1}{\log_a \frac{x^2}{a}} + \log_a x = \frac{1}{2 \log_a x - 1} + \log_a x = 2$$

Нехай $t = \log_a x$, отримаємо

$$\frac{1}{2t - 1} + (t - 2) = 0 \rightarrow 1 + (2t^2 - t - 4t + 2) = 0 \rightarrow 2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{3}{2}.$$

Тоді $\log_a x = 1 \rightarrow x = a$ або $\log_a x = \frac{3}{2} \rightarrow x = a^{3/2}$.

Відповідь: якщо $a \leq 0, a = 1$ – рівняння коренів немає;

якщо $a > 0, a \neq 1$, то $x = a, x = a^{3/2}$.

Сформулюємо правила-орієнтири розв'язування логарифмічних нерівностей з параметрами

1) Враховуємо умову існування логарифмів. Як і для рівнянь, необхідно, щоб підлогарифмічний вираз був додатним, а основа логарифма відмінною від 1.

2) Спрощення нерівності. Залежно від основи логарифма нерівність може змінювати знак:

якщо $a > 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$;

якщо $0 < a < 1$, то $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$.

3) Розв'язання нерівності. Після спрощення розв'язуємо нерівність і враховуємо параметр.

4) Перевірка області визначення. Всі знайдені розв'язки повинні відповідати умові існування логарифмів.

Завдання 2.31. Розв'яжемо нерівність $\log_{\frac{1}{2}} x + 2 < k$.

Умова існування логарифма: $x + 2 > 0, x > -2$.

Спрощення нерівності: $x + 2 > \frac{1}{2}^k$.

Розв'язання нерівності: $x > -2 + \frac{1}{2}^k = 2^{-k} - 2$

Перевірка умови: $x > -2$, тому остаточною відповідь — об'єднання знайдених умов.

Відповідь: $x > \max\{-2, 2^{-k} - 2\}$.

Завдання 2.32. Розв'яжемо нерівність $1 + \log_a x > 2 \log_x a$, за умови, що $0 < a < 1$.

Область допустимих значень $x > 0, x \neq 1$.

Перетворимо дану нерівність так:

$$\begin{aligned} 1 + \log_a x &> \frac{2}{\log_a x}; \\ 1 + \log_a x - \frac{2}{\log_a x} &> 0; \\ \frac{\log_a^2 x + \log_a x - 2}{\log_a x} &> 0. \end{aligned}$$

Далі розглянемо окремі випадки: коли чисельник і знаменник додатні, другий – коли вони одночасно від'ємні:

1. $\log_a^2 x + \log_a x - 2 > 0$ і $\log_a x > 0$.

Позначивши $\log_a x = z$, отримаємо $z^2 - z - 2 > 0$ і $z > 0$. Знайдемо розв'язки першої нерівності

$z^2 - z - 2 = (z + 2)(z - 1) > 0 \Leftrightarrow z < -2 \text{ і } z > 1$. Але другій умові $z > 0$ задовольняють тільки ті z , що $z > 1$.

Отже, $\log_a x > 1$, звідки з урахуванням $0 < a < 1$ отримуємо, що $0 < x < a$.

2. $\log_a^2 x + \log_a x - 2 < 0$ і $\log_a x < 0$. Цю систему нерівностей задовольняють значення x , для яких $-2 < \log_a x < 0$. З урахуванням умови $0 < a < 1$, отримуємо $0 < x < a^{-2}$.

Відповідь: $0 < x < a$, і $0 < x < a^{-2}$.

2.4. Системи логарифмічних рівнянь і нерівностей

Для розв'язування систем логарифмічних рівнянь можна використовувати загальновідомі способи розв'язування систем рівнянь: спосіб підстановки і спосіб додавання, метод заміни змінної. Також будемо використовувати метод логарифмування і заміну змінної.

Завдання 2.33. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Потенціюємо перше рівняння. Одержуємо систему

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$$

Розв'язавши яку, одержимо $x_1 = 3, y_1 = \frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = 3$.

Завдання 2.34. Розв'язати систему рівнянь при $a > 0, b > 0$

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{cases}$$

Невідомі x, y мають бути додатні. Потенціюючи, одержуємо

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \frac{x}{y} = b^4 \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки

$$x_1 = ab^2, y_1 = \frac{a}{b^2}; \quad x_2 = -ab^2, y_2 = -\frac{a}{b^2}.$$

Проте другий розв'язок непридатний, тому що при додатних значеннях a і b значення x і y від'ємні. Отже, дана система має єдиний розв'язок

$$x = ab^2, y = \frac{a}{b^2};$$

Завдання 2.35. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 512, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 2. \end{cases}$$

Оскільки $2^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2^9$, одержимо $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$. З іншого боку, $\lg \sqrt{xy} = \lg 10 + \lg 2 = \lg 20$, тобто $\sqrt{xy} = 20$. Таким чином, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$$

Розв'язавши яку ми отримаємо $x_1 = 16, y_1 = 25; x_2 = 25, y_2 = 16$.

Завдання 2.36. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_x \log_2 \log_x y = 2 \\ \log_y 9 = 1 \end{cases}.$$

З другого рівняння знаходимо $y = 9$. Тоді $\log_x \log_2 \log_x y = \log_x(\log_2 \log_x 9) = 2$, звідки $\log_2 \log_x 9 = 1$. Звідси

$$\log_x 9 = 2; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm 3.$$

Відкидаючи $x = -3$, одержуємо $x = 3, y = 9$.

Для розв'язування логарифмічних нерівностей з однією змінною використовують той факт, що розв'язком системи нерівностей є перетин розв'язків системи. Для розв'язування нерівностей використовують прийоми розв'язання, описані для них вище.

Завдання 2.37. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2^{x-1} \geq 8, \\ \log_3(x+2) < 2. \end{cases}$$

Розв'язання: маємо $\begin{cases} x - 1 \geq 3, \\ 0 < x + 2 < 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -2 < x < 7, \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4, 7).$

Завдання 2.38. Розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 3^{x-1} \geq \frac{1}{27}, \\ \log_{0,15}(x^2 - 12) < \log_{0,15}(-x). \end{cases}$$

Розв'язання: маємо $\begin{cases} x - 1 \geq -3, \\ x^2 - 12 > 0 \\ x < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 12 > -x \Leftrightarrow (x + 4)(x - 3) > 0 \\ x \geq -2 \\ x < 0, \\ x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty). \\ x \in (-\infty; -4) \cup (3; +\infty) \end{cases}$

Система розв'язків не має.

Система логарифмічних рівнянь з двома невідомими зводиться до розв'язування системи нерівностей з двома невідомими, частіше лінійних.

Завдання 2.39. Розв'язати систему нерівностей з двома змінними

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0, \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожену нерівність системи окремо та розв'язок системи нерівностей будемо шукати як перетин розв'язків кожної з логарифмічних нерівностей

$$\log_{2-x}(2-y) > 0:$$

$$5) \ 2 - x > 1,$$

У такому випадку маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2 - x > 1 \\ 2 - y > 0, \\ 2 - y > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

$$6) \ 0 < 2 - x < 1$$

$$\begin{cases} 0 < 2 - x < 1 \\ 2 - y > 0, \\ 2 - y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 1 < y < 2 \end{cases}$$

Об'єднанням двох систем є система, що описує множину точок

$$\text{площини} \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \\ y \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \end{cases}$$

$$\log_{4-y}(2x-2) > 0:$$

$$1) \ 4 - y > 1,$$

У такому випадку маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 4 - y > 1 \\ 2x - 2 > 0, \\ 2x - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 3 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$2) \ 0 < 4 - y < 1$$

$$\begin{cases} 0 < 4 - y < 1 \\ 2x - 2 > 0, \\ 2x - 2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < y < -4 \\ 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Об'єднанням двох систем є система, що описує множину точок

$$\text{площини} \begin{cases} y \in (-\infty; 3) \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

Розв'язком системи двох нерівностей є перетин множин розв'язків нерівностей

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1) \\ y \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \\ y \in (-\infty; 3) \\ x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} y \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \\ x \in (-\infty; 1) \end{cases}.$$

2.5. Факультативне заняття «Завдання підвищеної складності з використанням логарифмів».

Логарифми – тема, що допоможе структурувати знання про рівносильні і нерівносильні перетворення, навички роботи з розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. Завжди можна знайти аспект, що пов'язаний з

вивченням логарифмів, який може бути розглянутий у межах позакласної або факультативної роботи.

Наведемо план факультативного заняття, де буде використано завдання для підготовки до ЗНО / НМТ попередніх років, що стосуються логарифмів, у тому числі й завдання підвищеної складності.

План-конспект факультативу «Завдання підвищеної складності з використанням логарифмів».

Мета заняття: закріплення поняття логарифма, його властивостей та їх застосування у розв'язуванні рівнянь та нерівностей шляхом розв'язання відповідних завдань з ЗНО / НМТ попередніх років.

Хід заняття

Актуалізація опорних знань (10 хв)

1. Для закріплення основних властивостей логарифмів (у т.ч. визначення логарифмічної функції, основні властивості та правила) рекомендовано виконання тесту освітнього порталу за посиланням [19].

2. Нагадайте методи розв'язування логарифмічних нерівностей (див. додаток А)

Практична частина (30 хв.)

Приклад 1: Розв'язати нерівність

$$\log_2 (x - 1)^2 > 2 \log_2 (x - 1).$$

Область допустимих значень нерівності $x > 1$. За властивостями логарифмічних нерівностей, маємо, що

$$\log_2 (x - 1)^2 = 2 \log_2 |x - 1| = 2 \log_2 (x - 1)$$

на вказаній області визначення.

Тоді, отримуємо нерівність $2 \log_2 (x - 1) < 2 \log_2 (x - 1)$, що виконується для будь-якого x з області визначення нерівності.

Відповідь: $x > 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2$.

ОДЗ рівняння $x > 0$. Зведемо усі логарифми до спільної основи 9, отримаємо

$$5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = \frac{5 \log_9 x}{\log_9 \frac{x}{9}} + \frac{\log_9 x^3}{\log_9 \frac{9}{x}} + \frac{8 \log_9 x^2}{\log_9 (9x^2)} = 2.$$

На заданій ОДЗ маємо, що $\log_9 x^2 = 2 \log_9 x$, $\log_9 x^3 = 3 \log_9 x$,

$$\frac{5 \log_9 x}{\log_9 x - 1} + \frac{3 \log_9 x}{1 - \log_9 x} + \frac{16 \log_9 x}{1 + 2 \log_9 x} = 2.$$

Нехай, $\log_9 x = t$, маємо рівняння

$$\frac{5t}{t-1} + \frac{3t}{1-t} + \frac{16t}{1+2t} - 2 = 0$$

Маємо,

$$\begin{aligned} \left(\frac{5t}{t-1} + \frac{3t}{1-t} \right) + \frac{16t}{1+2t} &= \frac{2t}{t-1} + \frac{16t}{1+2t} - 2 = 0. \\ \frac{2t(1+2t) + 16t(t-1) - 2(1+2t)(t-1)}{(t-1)(1+2t)} &= \frac{16t^2 - 12t + 2}{(t-1)(1+2t)} \\ &= \frac{16 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right)}{(t-1)(1+2t)} = 0. \end{aligned}$$

Повертаємося до заміни:

$$\begin{cases} \log_9 x = \frac{1}{2} \\ \log_9 x = \frac{1}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{9} \\ x = \sqrt[4]{9} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \sqrt[2]{3} \end{cases}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(\sqrt{x})^{\log_4 \sqrt{x}-2} = (2)^{3(\log_4 \sqrt{x}-2)}$.

Див. завдання 2.19.

Відповідь: 4; 4096.

Приклад 4: Розв'язати нерівність $\log_3 (x + 7) < 4$.

Область допустимих значень нерівності $x > -7$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_3 (x + 7) - 4 < 0.$$

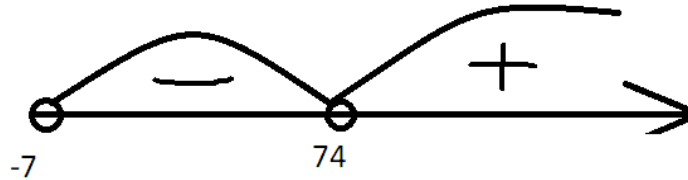
Позначимо,

$$f(x) = \log_3 (x + 7) - 4.$$

Область допустимих значень функції $x > -7$.

Нулі функції $f(x) = 0$, $\log_3(x + 7) - 4 = 0$, $x + 7 = 3^4 = 81$. Отже, $x = 81 - 7 = 74$, що є нулем нашої функції на її ОДЗ.

Позначимо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак функції $f(x)$ на кожному з отриманих проміжків.



Розв'язками нерівності є той проміжок, де $f(x) < 0$.

Відповідь: $x \in (-7, 74)$

Приклад 5. (ЗНО, 2017 р.) Розв'язати нерівність

$$\sqrt{\log_x \frac{x^3}{3}} \geq \log_x \frac{x}{3}.$$

ОДЗ $x > 0, x \neq 1$. Позбавимось від ірраціональності – піднесемо обидві частини нерівності до квадрату, отримаємо

$$\log_x \frac{x^3}{3} \geq \left(\log_x \frac{x}{3}\right)^2.$$

Розглянемо окремо обидві частини нерівності

$$\log_x \frac{x^3}{3} = \log_x x^3 - \log_x 3 = 3 - \log_x 3,$$

$$\left(\log_x \frac{x}{3}\right)^2 = (\log_x x - \log_x 3)^2 = (1 - \log_x 3)^2 = 1 - 2\log_x 3 + (\log_x 3)^2$$

Отже, маємо

$$3 - \log_x 3 - 1 + 2\log_x 3 - (\log_x 3)^2 \geq 0.$$

$$2 + \log_x 3 - (\log_x 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\log_x 3)^2 - \log_x 3 - 2 \leq 0.$$

Нехай $\log_x 3 = t$, маємо $t^2 - t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 1) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [-1; 2]$

Отже, $-1 < \log_x 3 < 2$. Знайдемо розв'язок останньої системи при різних основах

$$1) \quad \text{Коли основа логарифма } 0 < x < 1, \text{ то } -1 < \log_x 3 < 2 \Leftrightarrow \log_x x^{-1} < \log_x 3 < \log_x x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 3 > x^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\sqrt{3}; \frac{1}{3}\right)$$

$$2) \quad x > 1, -1 < \log_x 3 < 2, \text{ то } -1 < \log_x 3 < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 3 < x^2$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\sqrt{3}; +\infty)$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left(-\sqrt{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$$

Приклад 6. Знайдіть область визначення нерівності та її розв'язки. Зобразіть останні.

$$\log_{x^2+y^2}(x-y) > 1$$

Це завдання поєднує у собі знання з теорії множин, теорії логарифмічних рівнянь та геометрії.

Розглянемо два можливі варіанти – у залежності від основи логарифма

$$1) \quad 0 < x^2 + y^2 < 1 \rightarrow x^2 + y^2 < 1.$$

Тоді ОДЗ нерівності для таких обмежень основи буде такою

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ y < x \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи буде область насиченого блакитного кольору на рис. 2.1.

$$2) \quad x^2 + y^2 > 1$$

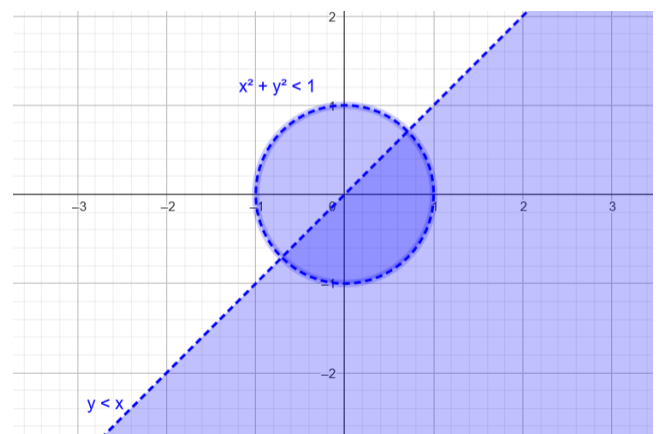


Рис 2.1. ОДЗ для основи $x^2 + y^2 < 1$

Тоді ОДЗ нерівності для таких обмежень основи буде такою

$$3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ y < x \end{cases}.$$

Розв'язком цієї системи буде область насиченого червоного кольору на рис. 2.2.

Тоді областю визначення нашої нерівності буде об'єднання насичених множин, або частина площини, що знаходиться нижче

бісектриси 1 та 3 координатних кутів, за виключенням кола з центром у початку координат радіусу 1 (див. рис. 2.3).

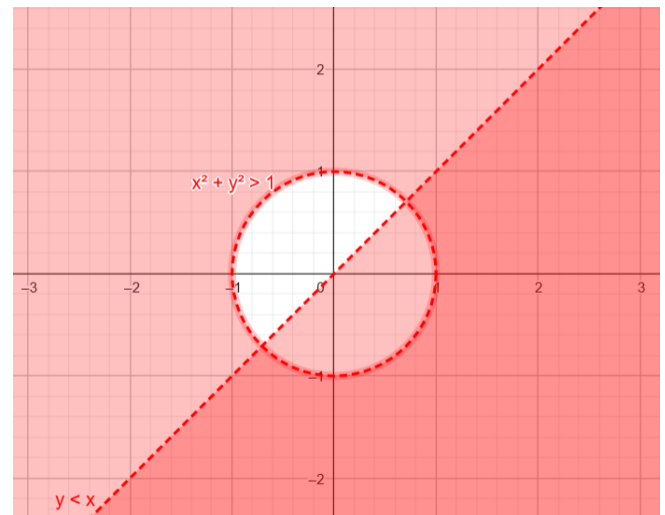


Рис. 2.2. ОДЗ для основи

$$x^2 + y^2 > 1$$

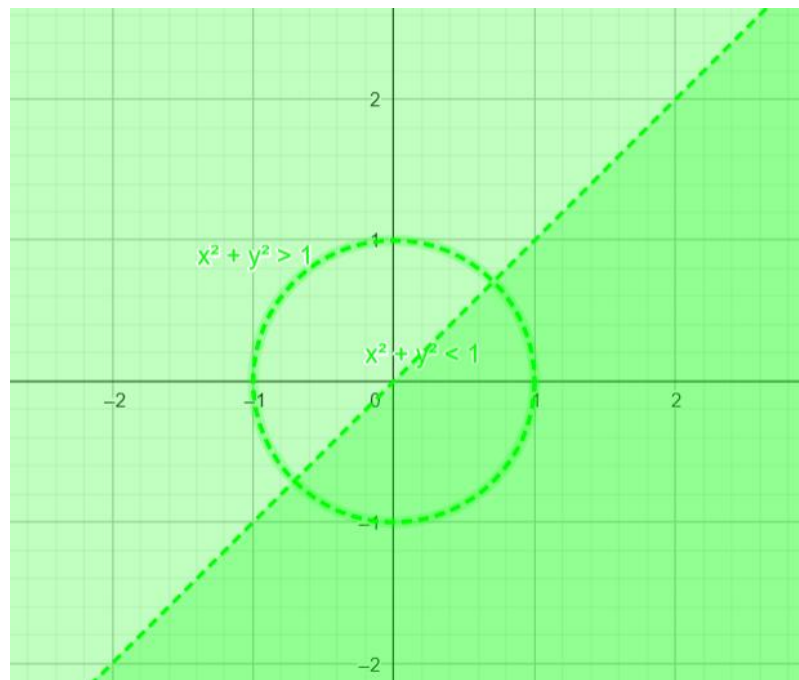


Рис 2.3. ОДЗ нерівності

Знайдемо розв'язки заданої нерівності, напишемо їх у залежності від основи.

1) На області, що відповідає рис. 2.1., маємо

$$(x - y) < x^2 + y^2 \quad \text{або}$$

$$x^2 - x + y^2 + y > 0$$

Виділимо повний квадрат останньої нерівності, отримаємо

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Тоді на заданій ОДЗ маємо, множиною розв'язків нерівності є внутрішня частина круга з центром в початку координат радіусу 1, що міститься під прямою $y = x$ без круга радіуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ з центром в точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

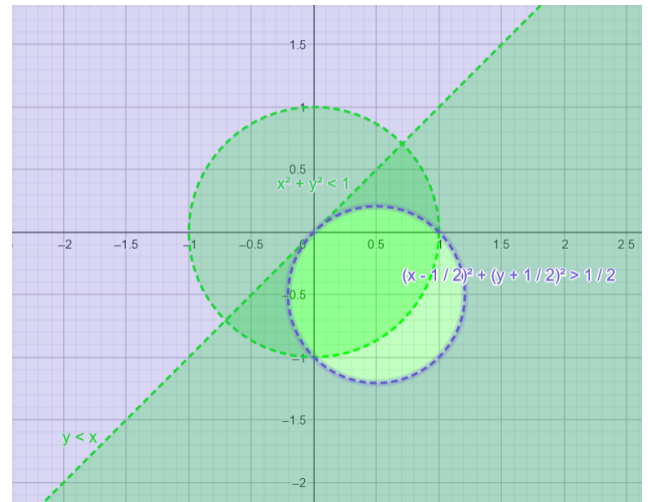


Рис.2.4. Область, що задовольняє нерівності, коли основа логарифма менша 1.

2) Аналогічно, на області, що відповідає рис. 2.2. розглянемо нашу нерівність, отримаємо $x^2 - x + y^2 + y < 0$, яке визначає внутрішню частину круга радіуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ з центром в точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$x^2 + y^2 > 1$$

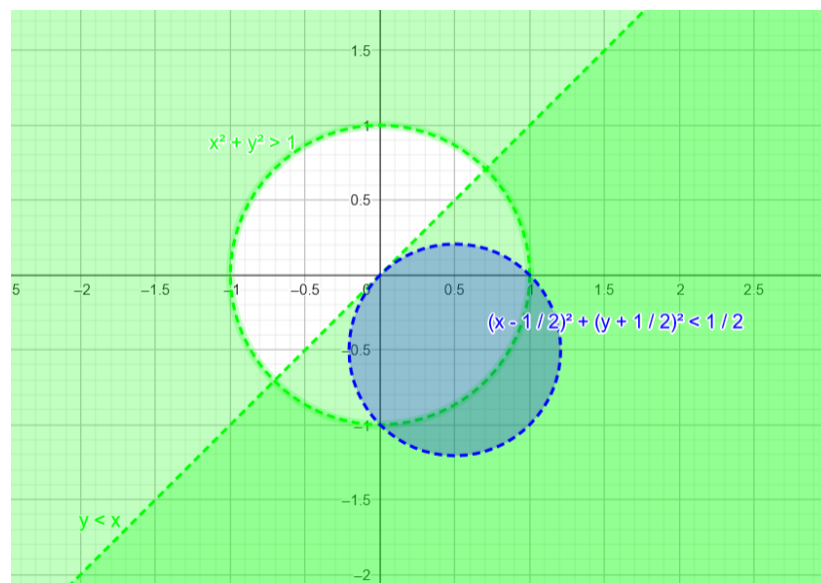


Рис. 2.5. Область, що задовольняє нерівності, коли основа логарифма більша за 1

Тоді на заданій ОДЗ маємо, множиною розв'язків нерівності є внутрішня частина круга з центром в початку координат радіусу 1, що міститься під прямою $y = x$ без круга радіуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ з центром в точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Зовнішня частина круга з центром в початку координат радіусу 1 у перетині з внутрішньою частиною круга з центром в $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ і радіусом $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - «нижня луночка».

Множина розв'язків логарифмічної нерівності є об'єднанням знайдених областей на рис 2.4. та 2.5.

Рефлексія (2 хв).

Обговорення результатів: Розбір типових помилок та правильних рішень.

Підсумок (3 хв)

Підведення підсумків: Короткий огляд пройденого матеріалу.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Вивчення логарифмічних рівнянь у шкільному курсі математики профільної школи сприяє формуванню глибокого розуміння основних методів алгебраїчного аналізу. Наведена у розділі класифікація логарифмічних рівнянь дозволяє учням розмежовувати різні типи рівнянь з метою вибору оптимального способу розв'язання. Навчання розв'язуванню цих рівнянь розширює обчислювальні та логічні навички учнів.

Вивчення логарифмічних нерівностей підкреслює важливість аналізу області допустимих значень і використання властивостей логарифмів для обґрунтованого розв'язання. Класифікація логарифмічних нерівностей за складністю та типом сприяє кращому розумінню учнями методів, що використовуються для їх розв'язання, таких як метод інтервалів та графічні підходи. Такий підхід дозволяє учням чітко бачити кроки до правильного результату.

Рівняння і нерівності з параметрами становлять важливий елемент профільного рівня, оскільки вони вимагають від учнів уміння аналізувати залежності між змінними та параметрами. Учні навчаються застосовувати методи розв'язання з урахуванням можливих значень параметрів, що сприяє розвитку аналітичного мислення і допомагає застосувати отримані знання в прикладних задачах.

Вивчення систем рівнянь і нерівностей із логарифмами поглиблює знання учнів у темі та дає їм змогу практично застосовувати отримані раніше навички для розв'язання складних задач.

Факультативне заняття, що присвячене задачам підвищеної складності, які містять логарифми, допомагає учням відчувати себе впевненіше в розв'язанні нестандартних задач, розвивати логіку, креативність і здатність застосовувати логарифмічні знання в нових ситуаціях. Розв'язання таких задач дає учням змогу поглибити розуміння теми, краще підготуватися до ЗНО / НМТ.

ВИСНОВКИ

Аналіз особливостей поняття логарифму показує, що введення логарифмів у шкільному курсі часто сприймається учнями як складна тема через складність концепції оберненої функції. Базові властивості логарифмів, такі як логарифм добутку, частки та степеня, є основою для подальших розв'язків логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Вивчення логарифмічної функції та її властивостей дозволяє учням краще зрозуміти функціональні залежності у математиці, особливо через графічне представлення. Часто в учнів можуть бути складнощі у побудові графіків логарифмічних функцій. Додаткові інтерактивні інструменти або цифрові ресурси можуть полегшити навчання, зробивши графічні дослідження більш наочними та зрозумілими.

Аналіз навчальних програм та рекомендованих підручників для українських закладів загальної середньої освіти показує, що тема логарифмів розглядається у профільній школі. Вона може бути розкрита по-різному у залежності від профілів навчання учнів. Однак у програмах спостерігається певна обмеженість у прикладах застосування логарифмів на практиці, що може знижувати інтерес учнів до теми.

Класифікація логарифмічних рівнянь і нерівностей показує, що учні часто зіштовхуються з труднощами у виборі методів розв'язання. Це може бути пов'язано з недостатнім досвідом застосування різних підходів, таких як використання властивостей логарифмів, метод інтервалів чи заміна змінних.

Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами є складним завданням для учнів через необхідність аналізувати залежності між змінними та параметрами. Оскільки такі завдання часто включають складні обчислення і потребують розуміння поведінки функції при зміні параметрів, виникають складнощі з інтуїтивним сприйняттям результатів.

Факультативні заняття, що розкривають розв'язання задач підвищеної складності, що містять логарифмічні вирази, дають можливість учням

поглибити свої знання і підготуватися до різних математичних змагань чи ЗНО / НМТ.

У кваліфікаційній роботі не розглянуто інтерактивні ресурси для роботи з логарифмами. У подальшому можна провести аналіз використання цифрових навчальних інструментів, таких як графічні калькулятори або освітні платформи, з метою їхнього використання в освітньому процесі

Вивчення логарифмів також може мати прикладне застосування після школи, зокрема у фінансах, економіці, інформатиці та природничих науках. Аналогічну до логарифмів поведінку мають індекси, що виникають при розв'язуванні двочленних конгруенцій з однією невідомою. Властивості індексів та операція індексування є повним аналогом властивостей логарифма та операції логарифмування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гриневич Т. Логарифмічна функція, її графік і властивості : метод. рек. педагогам для практ. спрямування. 59 с. URL: <https://nmc-pto.rv.ua/DOK/TG/TG3/Log-funkcii.pdf>.
2. Довідник з елементарної математики / Г. Бевз та ін.; ред. П. Фільчаков. 2-ге вид. Київ : Наук. думка, 1975. 656 с.
3. Іванко Т. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. *Математика в школах України*. 2007. № 7. С. 16–21.
4. Інститут модернізації змісту освіти. Електронні версії підручників. 11 клас. <https://bit.ly/3NYYuv5>
5. Істер О. С., Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти / Істер О., Єргіна О. – К.: Генеза 2019. – 416 с.
6. Істер О.С./ Алгебра і початки аналізу, початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу, профільний рівень : підруч. для 11 кл. Київ : Генеза, 2020. 384 с.
7. Істер О.С. Методи розв'язування задач з математики. Теорія. Приклади. Вправи. Книга 2 . Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2014. 576 с.
8. Кушнір В.А. Технологія розв'язування та конструювання логарифмічних рівнянь та нерівностей з позиції їх перетворень. *Математика в рідній школі*. 2016. № 5. с.39-46.
9. Мерзляк А. Г., Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. – Х.: Гімназія 2019. – 352 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної

середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.

11. Навчальні програми для 10-11 класів (Профільний рівень, Поглиблений рівень) URL : <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

12. Нелін Є. П. Алгебра. 11 : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Х. : Гімназія, 2011. — 448 с. : іл.

13. Нелін Є. П., Алгебра і початки аналізу (профільний рівень), підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова — Х.: Ранок 2019. — 240 с.

14. Нестандартні та олімпіадні задачі з алгебри та аналізу : практикум для підготов. студентів 1-го курсу / С. Боднарчук та ін. Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2020. 183 с.

15. Синичків (Лаврів) І. Показникові та логарифмічні рівняння та нерівності: методика розв'язування : магістерська робота. Львів, 2021. 93 с.

16. Самойленко Л., методика навчання логарифмічних рівнянь та нерівностей, 14 с.

URL:

<https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/download/1649/pdf>

17. Повзло Н. М. Розв'язування логарифмічних нерівностей *Математика в школах України*. 2006. №11. с. 7-17.

18. GeoGebra. Безкоштовні цифрові інструменти для класних занять, побудови графіків, геометрії, спільної дошки тощо. <https://www.geogebra.org/calculator>

19. Лядецька О. Тест: ЗНО логарифм. *Всеосвіта Національна освітня платформа*. URL: <https://vseosvita.ua/test/zno-loharyfm-810307.html..>

20. Фильчаков П. Справочник по элементарной математике. Киев : Наук. думка, 1972. 743 с.

 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ Таблиця 12	
Нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$	
Орієнтир	Приклад
$a > 1$ (функція $y = \log_a t$ зростає)	
Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ	$\log_2 (x-5) > 3$. Розв'язання. ОДЗ: $x-5 > 0$, тобто $x > 5$. $\log_2 (x-5) > \log_2 2^3$. Функція $y = \log_2 t$ є зростаючою, отже, $x-5 > 2^3$, $x > 13$. Враховуючи ОДЗ, маємо $x > 13$. Відповідь: $(13; +\infty)$
$0 < a < 1$ (функція $y = \log_a t$ спадає)	
Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ	$\log_{0.5} (x-5) > 3$. Розв'язання. ОДЗ: $x-5 > 0$, тобто $x > 5$. $\log_{0.5} (x-5) > \log_{0.5} (0.5)^3$. Функція $y = \log_{0.5} t$ є спадною, отже, $x-5 < (0.5)^3$, $x < 5,125$. Враховуючи ОДЗ, маємо $5 < x < 5,125$. Відповідь: $(5; 5,125)$
Більш складні логарифмічні нерівності	
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду за схемою: 1. Враховуємо ОДЗ заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ). 2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності	$\lg^2 (100x) - \lg x > 4$. Розв'язання. ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям: $(\lg 100 + \lg x)^2 - \lg x > 4$, $(2 + \lg x)^2 - \lg x > 4$. Заміна $\lg x = t$ дає нерівність $(2+t)^2 - t > 4$, тобто $t^2 + 3t > 0$, розв'язки якої $t < -3$ або $t > 0$. Обернена заміна дає: $\lg x < -3$ або $\lg x > 0$. Тоді $\lg x < \lg 10^{-3}$ або $\lg x > \lg 1$. Враховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $x < 10^{-3}$ або $x \geq 1$. Після врахування ОДЗ маємо: $0 < x < 10^{-3}$ або $x \geq 1$. Відповідь: $(0; 0,001) \cup [1; +\infty)$
II. Застосовується загальний метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \geq 0$ і використовується схема: 1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.	$\log_x (x+6) > 2$. Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $\log_x (x+6) - 2 > 0$. Позначимо $f(x) = \log_x (x+6) - 2$ 1. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1 \\ x+6 > 0. \end{cases}$ Тобто $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 2. Нулі функції: $f(x) = 0$, $\log_x (x+6) - 2 = 0$ Тоді $\log_x (x+6) = 2$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $x+6 = x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тобто $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. До ОДЗ входить тільки $x = 3$, отже, $f(x)$ має тільки одиний нуль функції $x = 3$. 3. Позначимо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) > 0$. Відповідь: $x \in (1; 3)$