

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему *«Застосування означеного інтеграла при визначенні площі
криволінійної трапеції»*

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)(з)-2

спеціальності 014.04

Середня освіта (Математика)

Паньків Ганни Ігорівни

Керівник:

Заторський Роман Андрійович

Рецензент:

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	1
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ПІЗНАННЯ ТЕМИ «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ».....	4
1.1 Що таке визначений інтеграл та його властивості.....	4
1.2. Обчислення визначеного інтегралу.....	8
1.3. Площа криволінійної трапеції, методика розв’язання.....	10
Висновок до першого розділу	14
РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ З ТЕМИ «ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ».....	15
2.1. Аналіз шкільних підручників	15
2.2 Методичні рекомендації щодо вивчення теми	18
Висновок до другого розділу.....	24
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ДИДАКТИЧНИХ, ПРАКТИЧНИХ ТА НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗАСОБАМИ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ	25
3.1 Створення дидактичних, практичних та методичних матеріалів.....	25
3.2 Створення методів перевірки та контролю знань	28
3.3 Розробка практичних завдань для класного та самостійного виконання	37
Висновок до третього розділу.....	42
ВИСНОВОК.....	43
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	45
ДОДАТОК А	48

ВСТУП

Актуальність дослідження. Пізнавальна діяльність людини починається з пізнання світу, отримання нової інформації, яку в подальшому аналізує по своєму залежно як вона її відчула та сприйняла. Мислення – є важливим елементом виховання особистості. Адже саме розумові особливості людини відрізняють її від інших живих істот. Як говорив відомий французький філософ, математик Декарт: *«Я мислю, отже, існую»* [11].

Важливе значення у формуванні мислення посідає саме математика. Під час розв’язування різноманітних завдань здобувачі освіти розвивають критичне мислення, адже вони підбирають різні способи та методи для вирішення поставлених задач. Також при роботі з математичними рівняннями, прикладами, задачами постає завдання проаналізувати інформацію, скласти алгоритм розв’язання та зробити висновки, що розвиває логічне мислення в учнів.

Шкільний курс алгебри подає багато різноманітних тем для розвитку мислення, логіки, уваги та уяви. Однією з таких – є «Застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції». Ця тема є дуже важливою, адже знаходження площ, які мають форму не правильну форму є прикладом практичного застосування математичних концепцій в реальному житті.

Вивчення означуваного інтеграла та застосування його (при знаходженні площ криволінійної трапеції) формує в здобувачів освіти навички, які необхідні при розв’язанні практичних завдань в різних наукових галузях, а також служить для глибшого розуміння математичних принципів.

Криволінійна трапеція має не рівні сторони, на відмінну від звичної, що робить обчислення її площі більш складнішими. Для ефективного вирішення даного завдання використовують визначений інтеграл, який дає змогу інтегрувати ці функції, які визначають криві. Застосовуючи властивості інтегралів можна з легкістю обчислити площу між заданими кривими, що є дуже корисно на практичному застосуванні.

В наш час, час інформаційних технологій, стрімкого розвитку наукових досягнень та медіа простору, освіта є основним чинником для формування конкурентоспроможності людини. А так як математика є одна з головних наук для розвитку особистості, то методика викладання цієї дисципліни в школі є актуальною темою. Потрібно шукати, підбирати нові підходи до вивчення предмету, які відповідають умовам сучасного освітнього процесу. Дуже часто традиційна методика навчання не надає належного рівня цікавості здобувачів освіти, що в свою чергу не сприяє глибокому розумінню матеріалів. Тому варто впроваджувати інноваційні методи, які активізують навчальний процес та сприяли мотивації здобувачів освіти.

Об'єкт дослідження: процес вивчення математики в школі.

Предмет дослідження: методи навчання теми «Площа криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтегралу» у шкільному курсі алгебри.

Мета дослідження: розкрити методику вивчення визначеного інтегралу при визначенні площ криволінійної трапеції та за допомогою інноваційних технологій розробити дидактичні навчальні матеріали.

Для виконання поставленої мети планується виконати наступні завдання:

1. Розглянути теоретичний матеріал з теми «Площа криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтегралу».
2. Проаналізувати діючі шкільні підручники.
3. Вдосконалити методику викладання означеного інтегралу при обчисленні площ криволінійної трапеції.
4. За допомогою цифрових технологій розробити дидактичні, практичні та навчальні матеріали.

В даній роботі буде проаналізовано різні методи використання означеного інтеграла для знаходження площ криволінійної трапеції та розглянуто конкретні приклади, які показують ці методи на практичному застосуванні. Планується дослідити теоретичний матеріал з даної теми та визначити основні аспекти застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції. В роботі будуть використовуватись як сучасні

методи навчання алгебри в школі так і традиційні, які дадуть змогу для створення інтерактивного простору на уроці. Це дозволить покращити як розуміння та вдосконалення теоретичної сторони математики так і практичної.

Структура роботи: дана робота складається з таких складових: вступ, три розділи, висновки до кожного розділу, загальний висновок, список літератури та додаток А. Загальний обсяг роботи - 55 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ПІЗНАННЯ ТЕМИ «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ»

1.1 Що таке визначений інтеграл та його властивості

Поняття визначеного інтеграла

Нехай $g=f(x)$ – функція, яка задається на проміжку $[a; b]$. Розділимо $[a; b]$ на k частин точками x_n щоб

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots < x_{k-1} < x_k = b$$

Обчислимо $f(\varepsilon_n)$, де $x_{n-1} \leq \varepsilon_n \leq x_n, n = (\overline{1, k}), \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

Знайдемо інтегральну суму $S_k = \sum_{n=1}^k f(\varepsilon_n) \Delta x_n$

Позначимо $\mu = \max \Delta x_n$

Визначення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_k при $\mu \rightarrow 0$ та не залежна від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_n , і не від вибору точки ε_n , то така границя має назву *визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$* та позначається [22]:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{n=1}^k f(\varepsilon_n) \Delta x_n = \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b$ – знак означеного інтегралу;

a, b – межі інтегрування, нижня та верхня;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

$f(x)dx$ – вираз підінтегральний;

dx – диференціал змінної, що інтегрується;

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ - це число, що залежить від типу функції $f(x)$ та відрізка $[a; b]$; визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(l)dl$$

Визначення. Функція, для якої на проміжку $[a; b]$ існує означений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ має назву *інтегрована на цьому відрізку*.

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $g(x) = 0$ для $x \in [c, d]$, то

$$\int_c^d g(x)dx = \int_c^d 0 \times dx = 0$$

2. Якщо $f(x) = 1$ для $x \in [c, d]$, то

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d 1 \times dx = d - c$$

3. За знак інтеграла можна виносити сталий множник, $a = \text{const}$

$$\int_c^d ag(x)dx = a \int_c^d g(x)dx$$

4. Якщо – функції інтегровані на проміжку $[c, d]$, то також на цьому проміжку інтегровані функції

$$\int_c^d (g(x) \pm f(x))dx = \int_c^d g(x)dx \pm \int_c^d f(x)dx$$

5. Лінійність визначеного інтегралу впливає з властивостей 3 – 4

$$\int_c^d (Ag(x) + Bf(x))dx = A \int_c^d g(x)dx + B \int_c^d f(x)dx$$

6. Якщо $c \leq a \leq d$, то

$$\int_c^d g(x)dx = \int_c^a g(x)dx + \int_a^d g(x)dx$$

7. Якщо $c < d$ та функція $g(x)$ на відрізку $[c, d]$ інтегрована, причому $g(x) \geq 0$ для $x \in [c, d]$

$$\int_c^d g(x)dx \geq 0$$

8. Якщо $c < d$, $g(x) \leq f(x)$ для $x \in [c, d]$, функції $g(x)$, $f(x)$ на проміжку $[c, d]$ інтегровані, то

$$\int_c^d g(x) dx \leq \int_c^d f(x) dx$$

9. Якщо $c < d$, функція $g(x)$ інтегрована на проміжку $[c, d]$, то $|g(x)|$ буде інтегрована на цьому проміжку, причому

$$\int_c^d |g(x)| dx \leq \int_c^d |g(x)| dx$$

10. Якщо на проміжку $[c, d]$ функції $g(x)$ інтегровані, то

$$\int_c^d g(x) dx = - \int_d^c g(x) dx$$

11. Оцінка визначеного інтегралу

Якщо $c < d$, функції $g(x)$ яка неперервна на проміжку $[c, d]$, n і m – найбільше і найменше значення $g(x)$ на проміжку $[c, d]$, то

$$m(d - c) \leq \int_c^d g(x) dx \leq n(d - c)$$

12. Теорема (середнє значення)

Якщо функції $g(x)$ яка неперервна на проміжку $[c, d]$, то існує точка $A \in [c, d]$

$$\int_c^d g(x) dx = g(A)(d - c)$$

Геометричний зміст визначеного інтегралу

Криволінійна трапеція – це фігура, що обмежена віссю Ox , графіком функції $y=f(x) \geq 0$ та прямими $x=p$, $x=d$.

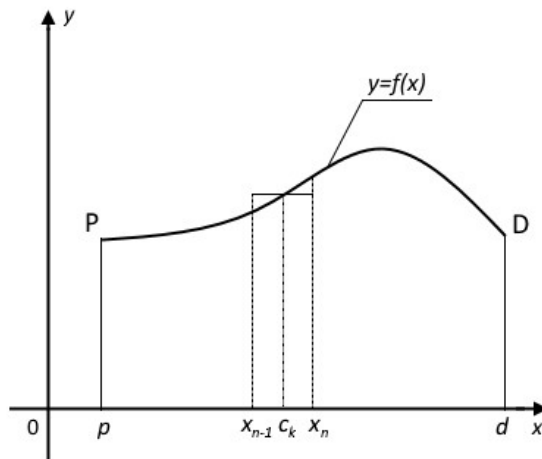


Рис. 1.1 Геометричний зміст визначеного інтеграла

Якщо одна з точок P або D , або ж обидві точки P і D лежать на осі Ox , то криволінійна трапеція вироджена.

Обчислимо площу криволінійної трапеції $PPDd$, враховуючи, що функція $y=f(x) \geq 0$ – функція неперервна.

Поділимо проміжок $[p, d]$ на m часткових проміжків $[x_{n-1}; x_n]$ точками $p = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < \dots < x_{m-1} < x_m = d$.

Далі в кожній точці x_n проведемо ординати графіка функції $y=f(x)$ та розділимо криволінійну трапецію $PPDd$ на частини площею ΔS_n , сума цих площ дорівнює площі цієї криволінійної трапеції, тобто

$$S = \sum_{n=1}^m \Delta S_n$$

Площа ΔS_n кожної частини приблизно дорівнює площі прямокутника, який має основу $[x_{n-1}; x_n]$ та висоту $f(c_n)$, c_n – це будь-яка точка відрізка $[x_{n-1}; x_n]$, тобто $\Delta S_n \approx f(c_n)\Delta x_n$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Якщо всі Δx_n зменшувати до нуля, то похибка буде зменшуватися. Отримаємо:

$$S = \sum_{n=1}^m \Delta S_n \approx \sum_{n=1}^m f(c_n)\Delta x_n \text{ або } S = \lim_{\max \Delta x_n \rightarrow 0} \sum_{n=1}^m f(c_n)\Delta x_n$$

$$S = \int_p^d f(x)dx$$

Таким чином геометричний зміст означуваного інтегралу полягає в тому, що якщо $f(x)$ – неперервна на $[p, d]$ та $f(x) \geq 0$, то $\int_p^d f(x)dx$ рівний площі криволінійної трапеції, що має основу $[p, d]$ та обмежений зверху кривою $y=f(x)$.

1.2. Обчислення визначеного інтегралу

Для того щоб обчислити визначений інтеграл, потрібно знайти відповідний невизначений інтеграл, після чого скористатись формулою Ньютона-Лейбніца

Формула Ньютона-Лейбніца

Після знаходження відповідного невизначеного інтегралу (лиш в тому випадку коли це можна зробити) використовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_b^a f(x)dx = F(x)|_b^a = F(a) - F(b)$$

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int_2^4 (x^3 + 10)dx &= \left(\frac{x^4}{4} + 10x \right) \Big|_2^4 = \frac{4^4}{4} + 10 \times 4 - \left(\frac{2^4}{4} + 10 \times 2 \right) \\ &= 64 + 40 - 4 - 20 = 80 \end{aligned}$$

Заміна змінної

Теорема. Нехай $f(x)$ функція неперервна на будь якій точці $x=g(t)$, $t \in [a, b]$ та нехай $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$. Якщо функція $g(t)$ має похідну неперервну, то буде справедлива наступна рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Приклад 2.

$$\int_3^8 \frac{y \times dy}{\sqrt{1+y}}$$

Зробимо заміну : $t = \sqrt{1+y}$ тоді отримаємо $t^2 = 1+y$, $y = t^2 - 1$, $dy = 2t dt$, $t_1 = \sqrt{1+3} = 2$, $t_2 = \sqrt{1+8} = 3$. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{y \times dy}{\sqrt{1+y}} &= \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) \times 2t \times dt}{t} = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \right) \right) \\ &= 2 \left(9 - 3 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ функції неперервні на відрізку $[a, b]$ із власними похідними першого порядку, то має місце наступна формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{y dy}{\sin^2 y}$$

Будемо мати $u = y$, $dv = \frac{dy}{\sin^2 y}$, тоді отримаємо $du = dy$, $v = -ctg(y)$

$$\left(\int \frac{dy}{\sin^2 y} = -ctg(y) \right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{y dy}{\sin^2 y} = -y \times ctg(y) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg(y) dy = - \left(\frac{\pi}{3} ctg \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\pi}{4} ctg \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \left(-\frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln(\sin(y)) \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) -$$

$$-\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

1.3. Площа криволінійної трапеції, методика розв'язання

Для обчислення площі криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y=g(x)$ ($g(x)\geq 0$) й вертикальними прямими $x=c$, $x=d$ та відрізком $[c, d]$ на осі Ox використовуємо формулу:

$$S = \int_c^d g(x) dx$$

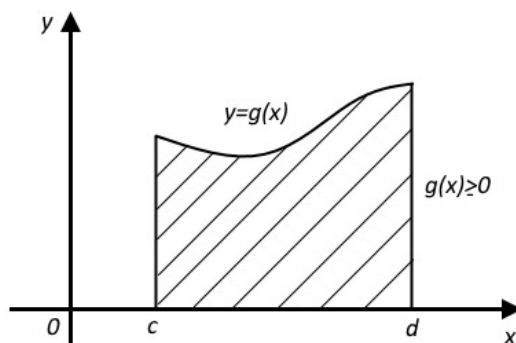


Рис. 1.2 Криволінійна трапеція

Коли в інтегралі $g(x)\leq 0$ (підінтегральна функція), то в такому випадку площа цієї криволінійної трапеції буде обчислюватись за наступною формулою:

$$S = - \int_c^d g(x) dx$$

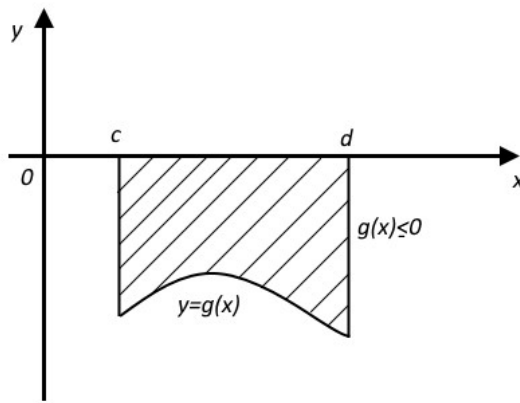


Рис. 1.3 Криволінійна трапеція

Якщо ж криволінійна трапеція обмежена знизу та зверху неперервними кривими на проміжку $[c, d]$ $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $g_1(x) > g_2(x)$ та прямими $x=c$, $x=d$, то тоді площа такої криволінійної трапеції буде обчислюватись за наступною формулою:

$$S = \int_c^d (g_1(x) - g_2(x)) dx$$

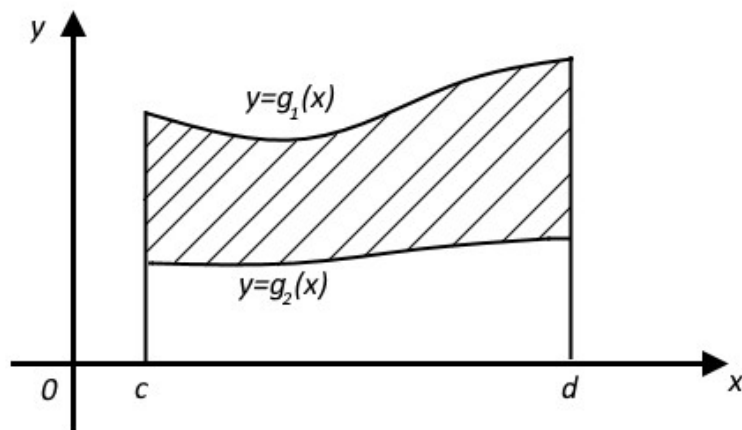


Рис. 1.4 Криволінійна трапеція

Коли функція $y=g(x)$ на проміжку $[c, d]$ міняє свій знак, для прикладу у точках $x=a$, $x=b$, то тоді площа такої криволінійної трапеції буде обчислюватись за формулою:

$$S = \int_c^a g(x)dx - \int_a^b g(x)dx + \int_b^d g(x)dx$$

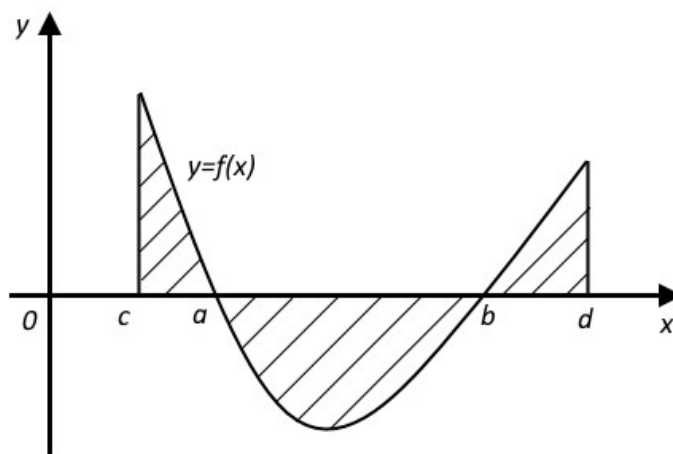


Рис. 1.5 Криволінійна трапеція

Якщо ж крива $y=f(x)$ на проміжку $[a, b]$ задається параметричними рівняннями $y=y(t)$, $x=x(t)$ і причому $b=x(t_2)$, $a=x(t_1)$, а $dx=x'(t)dt$, $t_1 \leq t \leq t_2$ в такому випадку площа криволінійної трапеції буде обчислюватись за такою формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Приклади

Завдання 1. Визначити площу фігури, яка обмежена кривими $y + x = 0$, $y = -x^2 + 2x$.

Для початку знайдемо проміжок на якому знаходиться криволінійна трапеція. Для цього знайдемо точки в яких перетинаються пряма та парабола

$$y = 2x - x^2, y = -x$$

$$2x - x^2 = -x; \quad 3x - x^2 = 0; \quad x(3 - x) = 0; \quad x = 0; \quad 3 - x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 3$$

Далі намалюємо графік функції

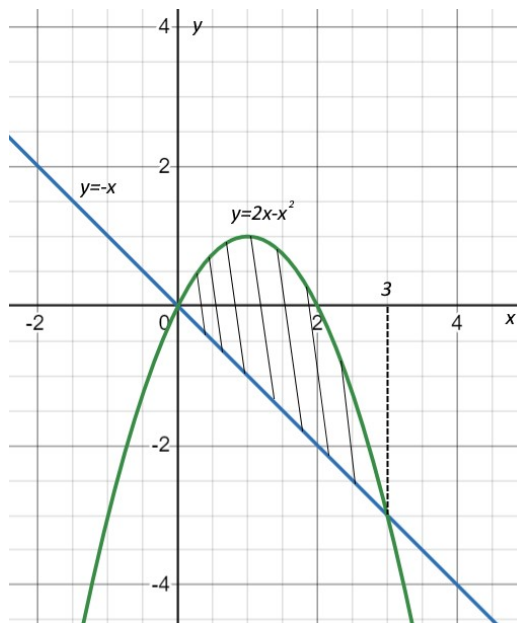


Рис. 1.6 Графік функції

Складаємо інтеграл:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + x) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \left(\frac{3 \times 3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{3}{2} \times 0 - \frac{0}{3} \right) = \frac{9}{2}$$

Завдання 2. Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $y = |\lg(x)|$ та прямими $x=0.1$, $y=0$, $x=10$.

Для початку зобразимо графічно

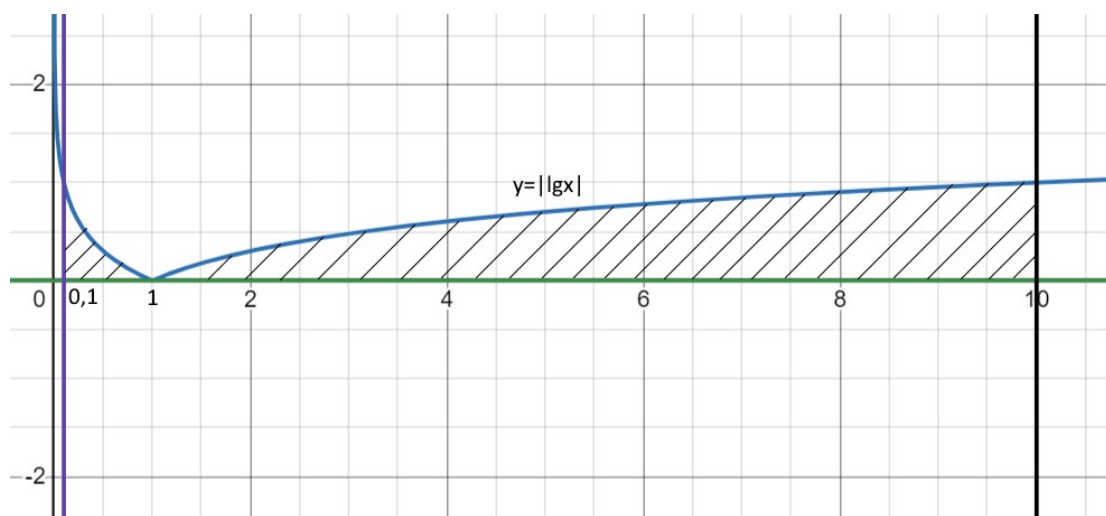


Рис. 1.7 Графік функції

Оскільки $\lg(x) \leq 0, x \in [0.1; 1]$ та $\lg(x) \geq 0, x \in [1; 10]$, то тоді

$$\int_{0.1}^{10} |\lg(x)| dx = \int_{0.1}^1 -\lg(x) dx + \int_1^{10} \lg(x) dx = \int_1^{0.1} \lg(x) dx + \int_1^{10} \lg(x) dx$$

Знайдемо інтеграл $\int \lg(x) dx$. Для цього використовуємо метод інтегрування частинами, виберемо $u = \lg(x)$, $dv = dx$.

$$du = \frac{dx}{x \times \ln(10)}, v = x. \text{ Отже}$$

$$\int \lg(x) dx = x \times \lg(x) - \int x \times \frac{dx}{x \times \ln(10)} = x \times \lg(x) - x \times \lg(e)$$

$$\begin{aligned} S &= (x \times \lg(x) - x \times \lg(e))|_1^{0.1} + (x \times \lg(x) - x \times \lg(e))|_1^{10} = \\ &= 0.1 \times \lg(0.1) - 0.1 \times \lg(e) - \lg(1) + \lg(e) + 10 \times \lg(10) - 10 \times \lg(e) - \\ &\quad - \lg(1) + \lg(e) = -0.1 + 10 - 8.1 \times \lg(e) = 9.9 - 8.1 \times \lg(e) \end{aligned}$$

Висновок до першого розділу

У даному розділі було глибше досліджено тему «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл». Було визначено основні формули для визначення площ криволінійної трапеції, а також головні властивості визначеного інтегралу завдяки якому можна обчислити ці площі. А також поняття, що собою являє визначений інтеграл.

Завдяки цьому теоретичному матеріалу, можна обчислювати різні площі криволінійних трапецій та розуміти глибше їх практичне застосування.

РОЗДІЛ 2. РОЗРОБКА ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ З ТЕМИ «ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ

2.1. Аналіз шкільних підручників

В шкільному курсі алгебри тема «Знаходження площ криволінійної трапеції» вивчається в 11 класі. Дана тема вивчається в розділі «Інтеграл та його застосування». Згідно тематичного планування для 11 класу рівень стандарту на виклад курсу «Алгебра» виділяється 70 годин 2 рази на тиждень, з яких на вивчення «Застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції» дається 5 годин. На профільний рівень виділяється 210 годин 6 годин на тиждень з них 10 годин вивчення «Площі криволінійної трапеції» [17].

Розглянемо детальніше, як викладається матеріал в таких шкільних підручниках:

1. Бевз Г.П., Бевз В. Г. «Математика. Аналіз і початки аналізу та геометрія 11 клас (Рівень стандарту)».
2. Мерзляк А. Г., Номіровський А. Д., Полонський В. Б. «Математика. Аналіз і початки аналізу та геометрія 11 клас (Рівень стандарту)».
3. Істер О. С., Єргіна О. В. «Алгебра і початки аналізу 11 клас (Профільний рівень)».
4. Мерзляк А. Г., Номіровський А. Д., Полонський В. Б. «Алгебра і початки аналізу 11 клас (Профільний рівень)».

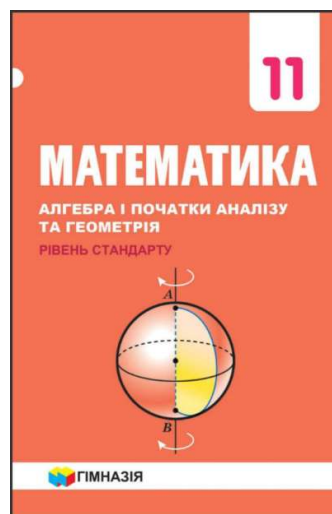
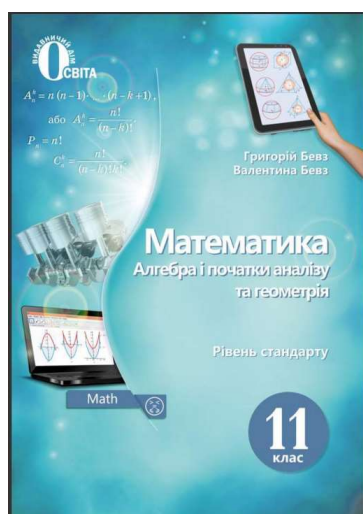


Рис. 2.1 Підручники 11 клас (рівень стандарту)

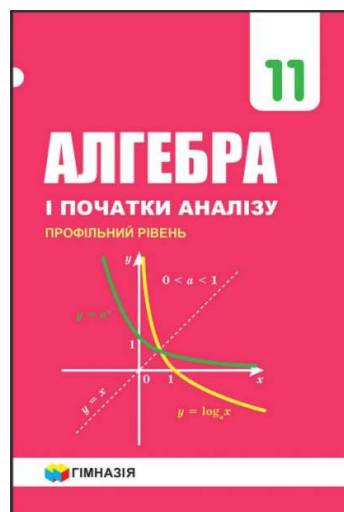
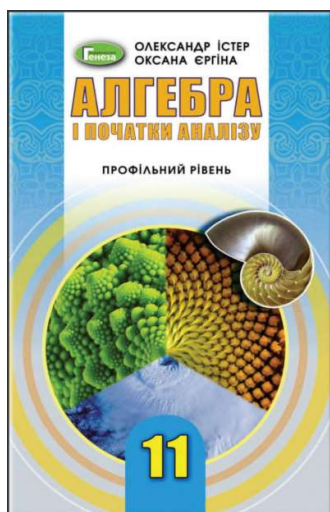


Рис. 2.2 Підручники 11 клас (профільний рівень)

В підручнику Григорія та Валентини Бевз тема «Застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції» подається в розділі 2 «Інтеграл та його застосування» в параграфі 6 «Площа підграфіка» та 7 «Визначений інтеграл». Спершу в параграфі 6 подаються площі, які обмежені однією кривою та осями координат або визначені на певному проміжку. Теоретичний матеріал чітко та лаконічно подається та доповнюється ілюстраціями. Після чого дається коротка «Перевірка себе» наскільки добре був засвоєний матеріал. Далі подаються практичні завдання, а також один приклад покрокового знаходження площі. В кінці є вправи для повторення. В параграфі 7 подаються площі криволінійних трапецій, які перетинаються декількома

кривими. Теоретичний матеріал подається коротко та стисло без допоміжних ілюстрацій. Після чого розглядається покроковий приклад на конкретній задачі.

В підручнику Аркадія Мерзляка, Дмитра Номіровського та Віталія Полонського дану тему висвітлюють в розділі 2 «Інтеграл і його застосування» в параграфі 11 «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл». Теорія подається дуже коротко, для знаходження площ, які обмежені тільки однією кривою та які знаходяться вище осі Ox . Також розглянута формула Ньютона-Лейбніца. Підручник оснащений ілюстраціями, що робить матеріал цікавішим та змістовнішим. Подається розв'язаний приклад з покроковою інструкцією розв'язання. Практичних завдань на знаходження площ небагато, але є як усні так і письмові. Для тих хто хоче знати більше після параграфу подається невелика стаття «Розумом він перевершив рід людський», де подається дуже цікава інформація про Ньютона та Лейбніца та їхні досягнення в інтегралі.

В підручнику Олександра Істера та Оксани Єргіної (Профільний рівень) тема «Площа криволінійної трапеції» розглядається в розділі 2 «Інтеграл та його застосування» в параграфі 15 «Обчислення площ плоских фігур та інші застосування інтеграла». Теоретичний матеріал подається чітку та змістовно, який оснащений ілюстраціями. Наведено багато випадків на знаходження площі криволінійної трапеції. Також наведено декілька прикладів покрокового розв'язання задачі по темі. Подано багато різноманітних завдань та завдань із зірочкою.

В підручнику Аркадія Мерзляка, Дмитра Номіровського та Віталія Полонського (профільний рівень) «Площу криволінійної трапеції» розглядають в розділі 2 «Інтеграл та його застосування» в параграфі 11 «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл». Теоретичний матеріал подається змістовно, після кожної теореми подається розв'язаний покроковий приклад на цю теорему. Підручник оснащений яскравими ілюстраціями. Подається багато різноманітних вправ (усних та письмових), а також завдання на повторення.

Під час аналізу підручників було виявлено, що всі підручники оснащені ілюстративним матеріалом. У книгах стандартного рівня подається коротка та

не повна інформація, натомість в профільному рівні все подається чітко та змістовно, а також розширений матеріал, хоча в жодному з підручників немає доведень. Також немає питань для повторення, які знадобляться для вивчення даної теми.

2.2 Методичні рекомендації щодо вивчення теми

Методика викладання – це така наука, яка вивчає засоби, способи та організацію освітнього процесу, що має на меті кращого та ефективнішого засвоєння знань здобувачів освіти, а також умінь та навичок. В свою чергу вона включає [5]:

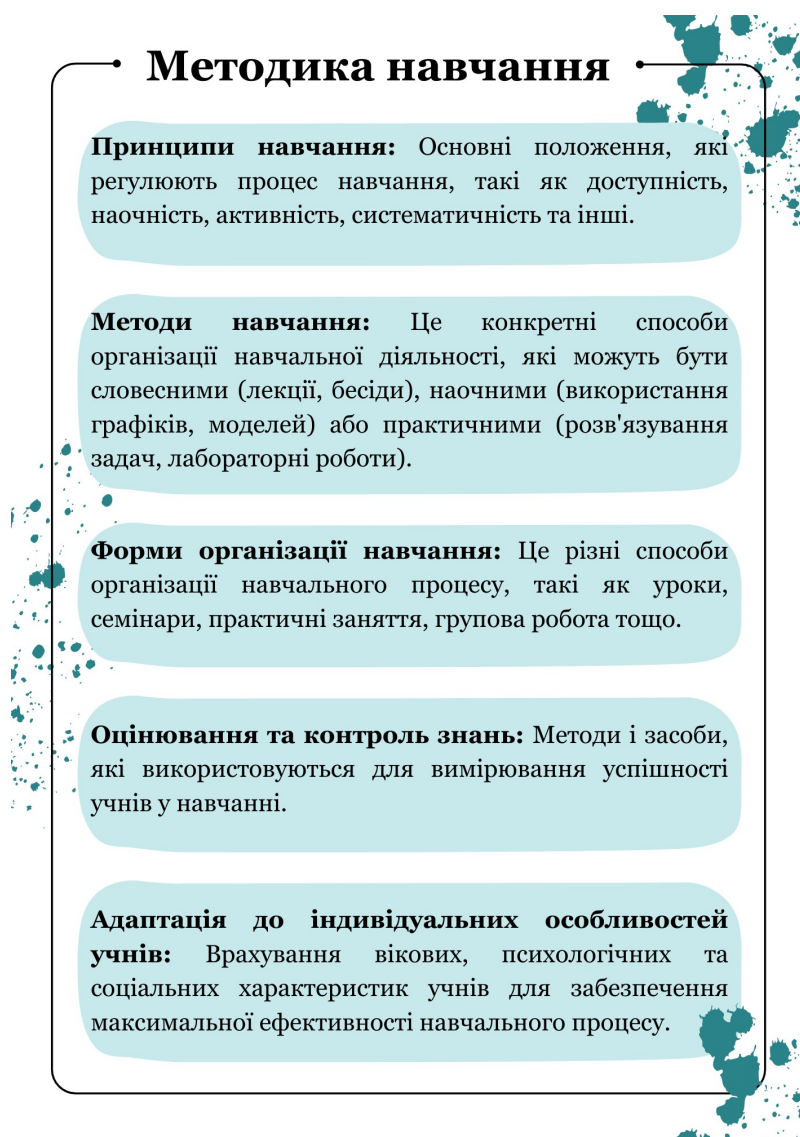


Рис. 2.3 Методика навчання

З кожним днем освіта прогресує, що у свою чергу також змінюються методи навчання. Для того щоб досягти успіху вчителю потрібного кожного дня розвиватись та вивчати щось нове, а також гарно володіти різними методичними прийомами та технікою викладання. В кожного методу є свої плюси та мінуси, де можуть виникати якісь труднощі які педагог має знати, для того щоб здобувачі освіти ефективно навчались та запам'ятовували новий матеріал.

До кожного уроку варто ретельно підготовлюватись. Оскільки довкола нас оточують інноваційні технології, то варто їх використовувати їх на своїх заняття, показувати учням, що навчання може бути цікавим, сучасним, насиченим та яскравим. Для цього слід урізноманітнювати шкільні будні використовуючи логічні та цікаві завдання, презентації, ілюстрації, відео, інтерактивні вправи, квести тощо.

Вивчення математичної науки в школі ґрунтується на різноманітних методах, інструментах та підходах, що допомагають сформувати математичні знання, уміння та навички здобувачів освіти. Розглянемо деякі основні підходи:

Підходи до навчання математики

- 1. Дослідницький підхід:**
 - Стимулює учнів до самостійного пошуку рішень, експериментування та формулювання власних висновків.
- 2. Проблемно-орієнтований підхід:**
 - Зосереджується на розв'язанні практичних задач, що дозволяє учням застосовувати теоретичні знання на практиці.
- 3. Інтегрований підхід:**
 - Поєднує математику з іншими предметами (наприклад, фізикою, економікою), що допомагає зрозуміти її застосування в різних сферах.

Рис. 2.4 Основні підходи до навчання математики

Методи навчання

1. Традиційний метод:

- Викладання матеріалу в класі, використання пояснень та демонстрацій вчителя.

2. Метод проектів:

- Учні працюють над конкретними проектами, які вимагають застосування математичних знань.

3. Групова робота:

- Співпраця учнів у малих групах для розв'язання завдань, обговорення ідей та обміну думками.

4. Ігровий метод:

- Використання ігор для навчання, що робить процес більш цікавим і мотивуючим.

5. Кейс-метод:

- Аналіз конкретних ситуацій або проблем, що дозволяє учням застосовувати математику в реальному житті.

Рис. 2.5 Основні методи навчання

Інструменти навчання

1. Підручники та робочі зошити:

- Основні джерела інформації, що містять теоретичний матеріал та практичні завдання.

2. Візуальні засоби:

- Графіки, діаграми, таблиці, що допомагають візуалізувати математичні концепції.

3. Технології (ІКТ):

- Використання комп'ютерних програм, онлайн-платформ, інтерактивних дошок для навчання та перевірки знань.

4. Математичні ігри та додатки:

- Використання мобільних додатків та онлайн-ігор для тренування навичок у веселій формі.

5. Лабораторні роботи та практичні заняття:

- Дослідження математичних концепцій через практичні експерименти та вправи.

Рис. 2.6 Основні інструменти навчання

Одним із важливих елементів на уроці є мотивація. Коли здобувачі освіти мотивовані вивчати дану тему, то їм буде цікавіше вивчати її, що в результаті дасть кращий ефект навчання. Для прикладу можна використати наступні мотивації:

1. *Розказати, де дана тема зустрічається в реальному житті*

Багато учнів вважають, якщо це не зустрічається в реальному житті, то цього не обов'язково знати. Але всі науки, в тому числі і математика, так чи інакше оточує нас. Для прикладу можна пояснити, що площа криволінійної трапеції зустрічається в природі – форми водоспадів, берегової лінії, листків тощо. Це наштовхне думку здобувачів освіти на значущість практичної сторони теми.

Дизайн та архітектура. Криволінійна трапеція, така унікальна, що її можна побачити не тільки в природі, а й в архітектурі. Для спорядження різноманітних споруд, будівель використовують криві, що в подальшому вимагають розрахунків їхніх площ.

2. *Візуалізація та наочність*

Для прикладу, можна показати спочатку графіки фігур (площі, яких здобувачі освіти вміють знаходити) після чого зобразити криву та поставити питання, «як ви вважаєте чи можна знайти площу такої фігури?». Після чого показати, як ця площа обчислюється за допомогою визначеного інтеграла.

3. *Інтерактивні заняття*

Тут можна використовувати, як роботу в групах так колективну, тобто обговорення. Для прикладу запропонувати обговорити, чи є важливою тема «Знаходження площі криволінійної трапеції за допомогою визначеного інтеграла», де вона використовується в реальному житті та практиці. Це допоможе здобувачам освіти слухати думки інших, дискутувати, працювати над спільним питанням та обмінюватись ідеями з іншими.

4. *Історичні факти та приклади людей, які досягли успіху в цьому*

Уроки слід насичувати цікавими фактами, історією з математики та відомих людей, життєвими пригодами. Це зробить заняття цікавішим. Часто

здобувачі освіти полюбують послухати всілякі захоплюючі розповіді. Для прикладу можна розповісти про відомих математиків(Лейбніца та Ньютона), що зробили великий внесок для розвитку інтегрального числення, та як ці розробки використовуються в сучасному світі.

Сьогодні існує багато різноманітних методів навчання, якими можна урізноманітнити своє заняття. Всі вони поділяються на:



Рис. 2.7 Класифікація методів навчання

В сьогоднішній час, потрібно вміти комунікувати з іншими, грамотно спілкуватись, висловлювати свою думку, а також вміти слухати думки інших. Для цього слід на заняттях давати спірні питання (Як ви вважаєте чи можна визначити площу криволінійної трапеції не використовуючи визначеного інтеграла?) після чого дати можливість учням висловити свої припущення.

На заняттях можна використовувати наступні методи:

1. Метод «Круглого столу». Для цього, для прикладу потрібно здобувачам освіти озвучити послідовність дій обчислення площ криволінійної трапеції (можна і з помилками) після чого обговорити з учнями правильність цих дій або ж можливо хтось запропонує власний підхід.

2. Метод «Метаплану». Цей метод використовується для аналізу перевірки знань. Для початку вчитель робить перевірку знань дивиться та

аналізує помилки, що допускають найбільше здобувачі освіти. Після чого виписує їх й показує класу. Потім здобувачі освіти мають визначити ці помилки, де вони допущені та мають спробувати виправити їх.

Також для ефективнішого навчання можна використовувати інтерактивні методи навчання:

1. Групові проекти

- Приклад: Учні можуть працювати в групах над проектом, в якому вони досліджують реальні застосування математичних концепцій (наприклад криволінійна трапеція в природі). Кожна група може представити свої результати класу

2. Інтерактивні дошки

- Приклад: Використання інтерактивних дошок для розв'язання задач в режимі реального часу. Учні можуть виходити до дошки, щоб розв'язувати рівняння або малювати графіки, а решта класу може обговорювати та коментувати їхні дії.

3. Віртуальні лабораторії

- Приклад: Використання онлайн-платформ, таких як GeoGebra або Desmos, де учні можуть експериментувати з математичними концепціями, змінюючи параметри графіків та спостерігати за їх змінами та як змінюються їх площі.

4. Квести та ігри

- Приклад: Створення математичного квесту, де учні повинні виконувати різні завдання та розв'язувати головоломки, щоб перейти до наступного етапу. Це може бути як у класі, так і у формі онлайн-ігри.

5. Вікторини та опитування

- Приклад: Використання платформ, таких як Kahoot або Quizizz, для проведення вікторин на знання математики. Учні можуть змагатися один з одним у режимі реального часу.

Рис. 2.8 Приклади інтерактивних методів навчання

6. Ситуаційне навчання

- Приклад: Створення сценаріїв з реального життя, де учні повинні застосовувати математичні знання для вирішення проблем (наприклад, визначити кількість матеріалів, які знадобляться для побудови мосту).

7. Фліп-клас

- Приклад: Учні можуть отримувати новий матеріал через відео або онлайн-уроки вдома, а під час класу працювати над практичними завданнями та проектами, отримуючи підтримку від вчителя та однокласників.

8. Рольові ігри

- Приклад: Учні можуть взяти на себе ролі різних математиків або історичних постатей у математиці і презентувати їх внесок у науку, обговорюючи їхні відкриття та ідеї.

9. Обговорення в малих групах

- Приклад: Розділіть клас на малі групи для обговорення певних математичних проблем або концепцій. Після обговорення кожна група може представити свої думки класу.

10. Математичні ігри та головоломки

- Приклад: Використання настільних ігор або онлайн-ресурсів для розв'язання математичних головоломок, що допомагає учням розвивати логічне мислення та навички вирішення проблем.

Рис. 2.9 Приклади інтерактивних методів навчання

Висновок до другого розділу

В даному розділі проаналізовано шкільні підручники як стандартного рівня так і профільного. Було виявлено, що в стандартному рівні матеріал подається коротко та поверхнево, а в профільному навпаки автори чітко та змістовно передають матеріал. Також досліджено основні методика вивчення теми «Використання визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції». Завдяки цим методам можна зробити свої заняття цікавішими, яскравішими завдяки чому навчальний процес буде ефективнішим.

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ДИДАКТИЧНИХ, ПРАКТИЧНИХ ТА НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ЗАСОБАМИ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

3.1 Створення дидактичних, практичних та методичних матеріалів

Дидактичні наочні матеріали – це особливий тип наочного навчального посібника, переважно зображується у вигляді роздаткового матеріалу, презентації, наочного відео, ментальної карти, інтерактивної вправи тощо. Завдяки зростанню інновацій дидактичні матеріали набули великої популярності. Для урізноманітнення уроків слід використовувати їх. Дидактичні матеріали слід розробляти так щоб вони були інформативними, яскравими, цікавими, сучасними, корисними тощо [7].

Сьогодні із запровадження дистанційного навчання все більше роблять інтерактивні матеріали за допомогою онлайн цифрових інструментів. Також чи малої популярності набувають онлайн підручники. В ньому можна подати коротку теоретичну інформацію з будь-якої теми для того щоб у здобувачів освіти вона була завжди під рукою. Адже користуватись такою книгою можна з будь якого пристрою. Для прикладу такий підручник можна розробити за допомогою платформи Ourboox (<https://www.ourboox.com/>).

Посилання на підручник - <https://www.ourboox.com/bp/1620224/>





Desmos (<https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>) – онлайн платформа, завдяки якій можна зображати графіки функцій.



Word Art (<https://wordart.com/>) – цифрова онлайн платформа для створення хмари слів.



Website Planet (<https://www.websiteplanet.com/uk/webtools/free-qr-code-generator/>) – це онлайн генератор QR – коду.



Canva (<https://www.canva.com/>) – онлайн сервіс графічного дизайну завдяки якому можна розробляти плакати, презентації, листівки, газети, тощо.



Padlet (<https://uk.padlet.com/dashboard>) – це віртуальна онлайн дошка завдяки якій можна розташовувати зображення, відео, текстові нотатки тощо.



Генератор «Кросворд»
(<https://childdevelop.com.ua/generator/letters/cross.html>) – це онлайн середовище для розробки кросвордів.



Coggle (<https://coggle.it/?authuser=0>) – це онлайн сервіс для створення ментальних карт.



Це лиш незначна частина цифрових інструментів для розробки наочних, дидактичних матеріалів. Як завдяки цьому можна урізноманітнити свій урок наведено в додатку А.

3.2 Створення методів перевірки та контролю знань

Великою складовою будь-якого навчання є саме перевірка знань. Щоб краще зрозуміти як здобувачі освіти засвоїли матеріал потрібно проводити контроль знань. В кожного своя здатність запам'ятовувати матеріал. Для когось

це дається легко, а для когось навпаки важко. В кожного своя здатність запам'ятовувати: хтось сприймає краще на слух, а інший на зір. Тому варто проводити перевірку знань, щоб збагнути, які методи навчання більш ефективні для здобувачів освіти.

Сьогодні існує багато методів контролю знань для ефективної перевірки знань здобувачів освіти, які дають можливості підібрати саме ті, які найкраще та найякісніше підійдуть для кожного класу.



Рис. 3.3 Методи контролю знань

Теорія – це один із елементів навчання. Особливо у математиці, потрібно знати формули, хоча б основні з яких потім можна вивести всі інші. Адже незнаючи теорії неможливо буде знайти відповідь навіть на найпростіші запитання. Тому варто перевіряти знання з теорії, щоб зрозуміти, що потрібно довчити або ж вивчити. Часті перевірки чи повторення теорії дадуть змогу не забувати її, адже з часом все забувається, якщо не згадувати це. Ефективними перевітками теоретичних знань є для прикладу метод «мозковий штурм», тести, математичні диктанти, усне опитування тощо. Якщо ж перед уроком виділити час на перевірку теоретичного матеріалу, який знадобиться на уроці, то буде легше працювати на уроці та матеріал на довше відкладеться у пам'яті. Одним із прикладів мозкового штурму з теми «Площа криволінійної трапеції» може бути:

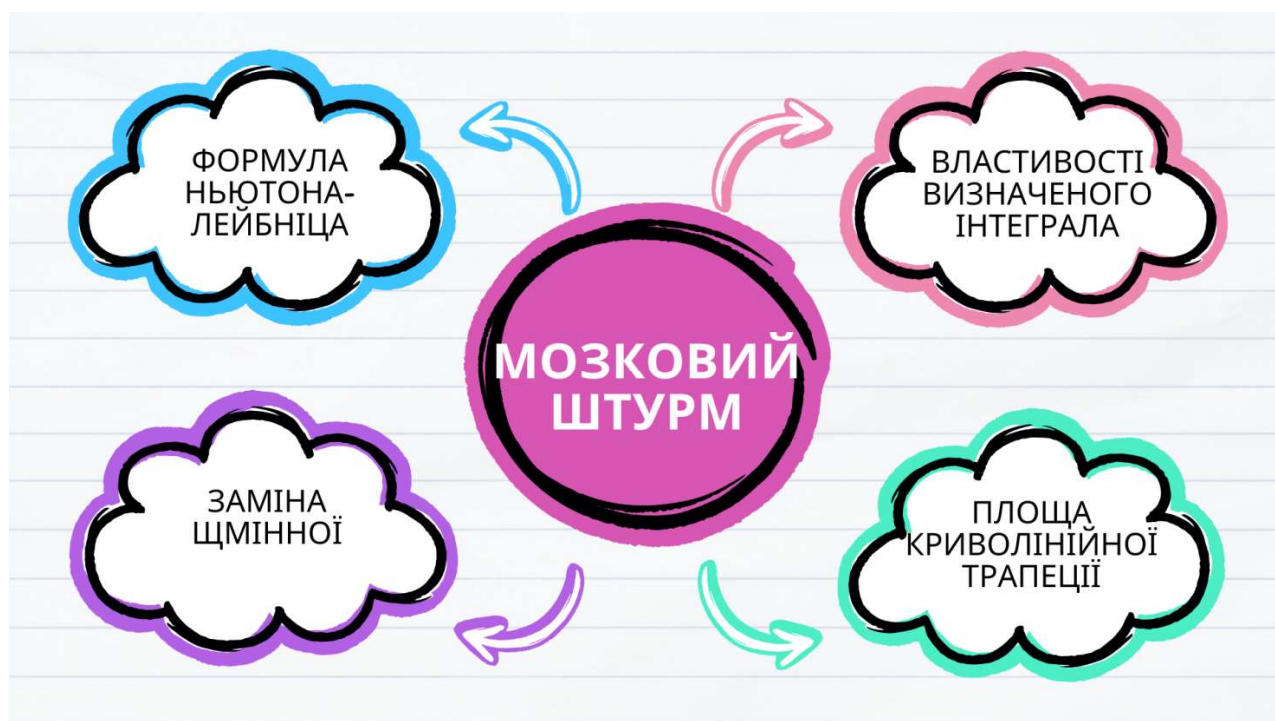


Рис. 3.4 Мозковий штурм

Досить ефективною перевіркою знань є саме тестування, завдяки якому можна перевірити не тільки теоретичні знання учнів, а й практичні. В них можна поєднувати перевірку цих знань. Із запровадженням дистанційним навчанням тести можна проводити онлайн, де здобувачі освіти можуть одразу

побачити свої результати, а також існують програми в яких тестування можна проводити в обмеженні часу. Одним із найпопулярніших онлайн сервісів для розробки тестових завдань є Google форма. На цій платформі можна створювати різного типу завдань. Прикладом такого тестування може слугувати наступний тест:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSePoHiuXg3Fw-r8EXMS8bcZ91rd-NNhFkv0_0_ASmgFGIIa8A/viewform?usp=sf_link



Площа криволінійної трапеції
Всім успіхів в написанні тесту!!!

anapnk25@gmail.com [Змінити обліковий запис](#)

Спільно не використовується

Зірочка (*) указує, що запитання обов'язкове

Вкажіть свою електронну адресу *

Ваша відповідь

Вкажіть своє прізвище та ім'я *

Ваша відповідь

Що таке криволінійна трапеція? 1 бал

Ваша відповідь

Вкажіть формулу Ньютона-Лейбніса 1 бал

Варіант 1

Варіант 2

Варіант 3

Рис. 3.5 Фрагмент тестів

Чому дорівнює площа заданої криволінійної трапеції? 1 бал

$$S = \int_c^d -g(x)dx$$

☐ Варіант 1

$$S = \int_d^c -g(x)dx$$

☐ Варіант 2

$$S = -\int_c^d g(x)dx$$

$$S = -\int_d^c g(x)dx$$

Що означають позначення у визначеному інтегралі? 4 бали

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k f(\xi_n) \Delta x_n = \int_a^b f(x) dx$$

	a, b	f(x)	dx	f(x)dx
Підінтегральна функція	☐	☐	☐	☐
Підінтегральний вираз	☐	☐	☐	☐
Диференціал змінної, що інтегрується	☐	☐	☐	☐
Межі інтегрування	☐	☐	☐	☐

Обчислити площу фігури, що обмежена кривою $y=|g(x)|$ та прямими $x=0, I$, $y=0$, $x=I$. 3 бали

Ваша відповідь: _____

Рис. 3.6 Фрагмент тестів

Також важливим елементом навчання є практика. Володіючи добре навчальним матеріалом, можна розв'язувати різноманітні завдання. Тому педагогу потрібно розуміти, як здобувачі освіти застосовують теорію на практиці. Для цього потрібно проводити самостійні роботи, а після закінчення теми контрольну роботу. Розробляючи їх, потрібно враховувати всі вивчені моменти та викласти їх у завдання. Контрольна робота має бути змістовною, лаконічною, з чітко поставленими задачами.

Приклад розробленої контрольної та самостійної роботи:

Варіант 1

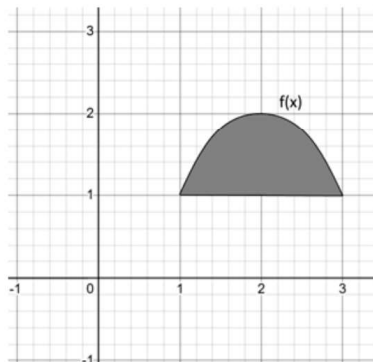
Завдання 1. Вказати формулу за якою обчислюється площа заштрихованої фігури

А) $S = \int_1^2 (f(x) - 1) dx$

Б) $S = \int_1^3 (f(x) + 1) dx$

В) $S = \int_1^3 (1 - f(x)) dx$

Г) $S = \int_1^3 (f(x) - 1) dx$



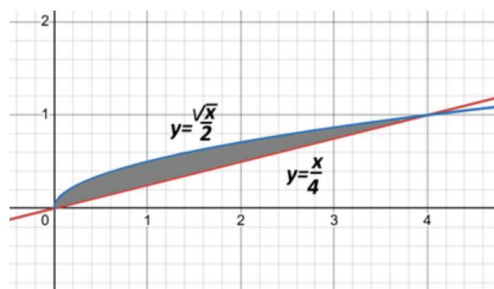
Завдання 2. Вказати формулу за якою обчислюється площа заштрихованої фігури

А) $S = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{2} dx$

Б) $S = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x}{4} \right) dx$

В) $S = \int_0^4 \left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx$

Г) $S = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x}{4} \right) dx$



Завдання 3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Завдання 4. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$.

Завдання 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = \sin(x)$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

Рис. 3.7 Самостійна робота «Варіант 1»

Варіант 2

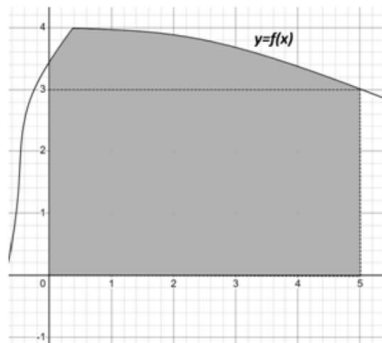
Завдання 1. Вказати формулу за якою обчислюється площа заштрихованої фігури

А) $S = \int_0^5 f(x) dx$

Б) $S = \int_0^4 f(x) dx$

В) $S = \int_0^3 f(x) dx$

Г) $S = \int_3^5 f(x) dx$



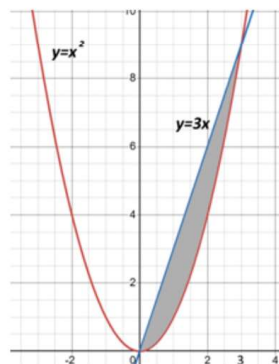
Завдання 2. Вказати формулу за якою обчислюється площа заштрихованої фігури

А) $S = \int_0^3 3x dx$

Б) $S = \int_0^9 (3x - x^2) dx$

В) $S = \int_0^3 (3x - x^2) dx$

Г) $S = \int_0^9 (x^2 - 3x) dx$



Завдання 3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$.

Завдання 4. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^3$ та прямими $y = 0$, $x = 2$.

Завдання 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

Рис. 3.8 Самостійна робота «Варіант 2»

Варіант 1

Завдання 1. Яка функція є первісною для функції $f(x) = 4x^5$, $f(x) = 3\cos 3x$

Завдання 2. Установіть відповідність між функцією $f(x)$ (1-4) та первісною $F(x)$ для цієї функції (А-Д)

1. $f(x) = 20 + 8x^3$

А) $F(x) = \frac{8}{3}x^3 + 5x^4$

2. $f(x) = 20x^3 + 8x$

Б) $F(x) = 5x^4 + 4x^2$

3. $f(x) = 8x^2 + 20x^3$

В) $F(x) = 20x + 2x^4$

4. $f(x) = 20x^3 + 8$

Г) $F(x) = 8x + 5x^4$

Д) $F(x) = \frac{8}{3}x^3 + 20x^2$

Завдання 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt{x^2}}\right) dx$

Завдання 4. Визначити площу криволінійної трапеції обмеженою параболою $y = 5 - x^2$ і прямою $y = 3 - x$.

Завдання 5. Обчислити площу заштрихованої фігури

Рис. 3.9 Контрольна робота «Варіант 1»

Варіант 2

Завдання 1. Яка функція є первісною для функції $f(x) = 6x^3$, $f(x) = 5\sin(5x)$

Завдання 2. Установіть відповідність між функцією $f(x)$ (1-4) та первісною $F(x)$ для цієї функції (А-Д)

1. $f(x) = 14x + 9x^2$

А) $F(x) = 2x^7 + 3x^3$

2. $f(x) = 14x^3 + 9$

Б) $F(x) = 7x^2 + 3x^3$

3. $f(x) = 14x^6 + 9x^2$

В) $F(x) = 14 + 9x$

4. $f(x) = 14x^6 + 9x$

Г) $F(x) = 2x^7 + 4,5x^2$

Д) $F(x) = 3,5x^4 + 9x$

Завдання 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^5 \left(5x - \frac{1}{10\sqrt{x^2}}\right) dx$

Завдання 4. Визначити площу криволінійної трапеції обмеженої лініями $y = 2 + x^2$, $y = 4 + x$.

Завдання 5. Обчислити площу заштрихованої фігури

Рис. 3.10 Контрольна робота «Варіант 2»

Варіант 3

Завдання 1. Яка функція є первісною для функції $f(x) = 8x^3$,
 $f(x) = -7\sin(7x)$

Завдання 2. Установіть відповідність між функцією $f(x)$ (1-4) та первісною $F(x)$ для цієї функції (А-Д)

1. $f(x) = 6x + 15x^2$

А) $F(x) = 3x^5 + 2x^3$

2. $f(x) = 15x^4 + 6x^2$

Б) $F(x) = 15x^2 + 3x$

3. $f(x) = 15 + 6x^3$

В) $F(x) = 3x^2 + 5x^3$

4. $f(x) = 6 + 15x^2$

Г) $F(x) = 6x + 5x^3$

Д) $F(x) = 1,5x^4 + 15x$

Завдання 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$

Завдання 4. Визначити площу криволінійної трапеції обмеженої лініями
 $y = 2 + x^2, y = 4 - x$.

Завдання 5. Обчислити площу заштрихованої фігури

Рис. 3.11 Контрольна робота «Варіант 3»

Варіант 4

Завдання 1. Яка функція є первісною для функції $f(x) = 8x^5$,
 $f(x) = -4\cos(4x)$

Завдання 2. Установіть відповідність між функцією $f(x)$ (1-4) та первісною $F(x)$ для цієї функції (А-Д)

1. $f(x) = 18x + 6x^2$

А) $F(x) = 18 + 6x^2$

2. $f(x) = 18x^2 + 6x$

Б) $F(x) = 6x^3 + 3x^2$

3. $f(x) = 18 + 6x^2$

В) $F(x) = 3x^6 + 3x^2$

4. $f(x) = 18x^5 + 6x$

Г) $F(x) = 18x + 6x^3$

Д) $F(x) = 9x^2 + 2x^3$

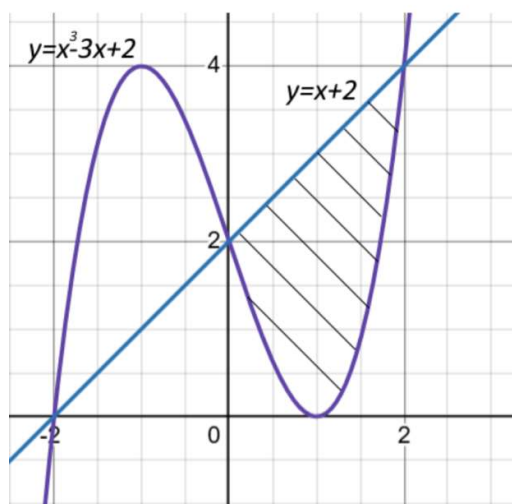
Завдання 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$

Завдання 4. Визначити площу криволінійної трапеції обмеженої лініями
 $y = -4 - x^2, y = 4 + x$.

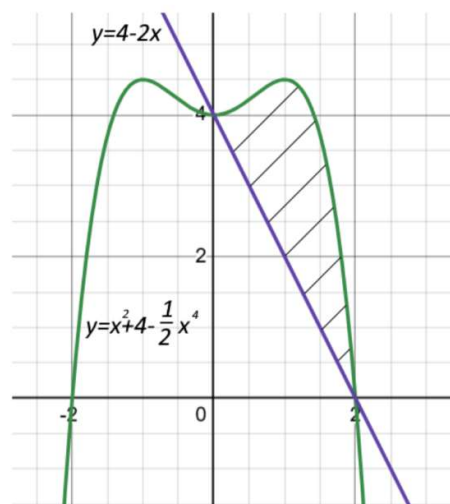
Завдання 5. Обчислити площу заштрихованої фігури

Рис. 3.12 Контрольна робота «Варіант 4»

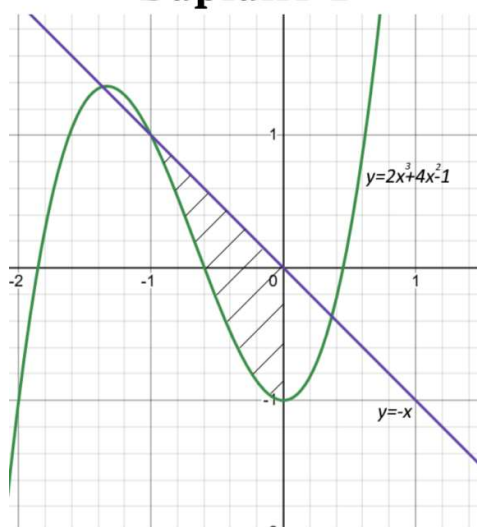
Завдання 5



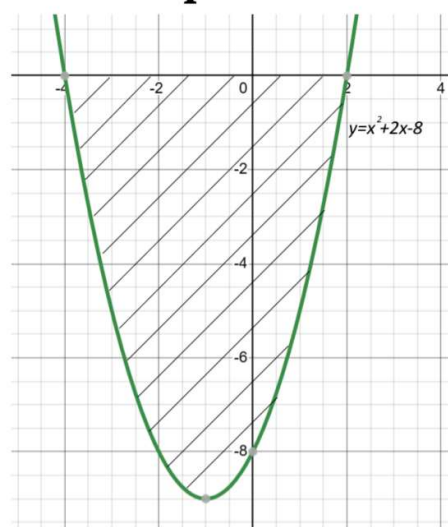
Варіант 1



Варіант 2



Варіант 3



Варіант 4

Рис. 3.13 Малюнки до завдання 5

3.3 Розробка практичних завдань для класного та самостійного виконання

Розібравши та вивчивши теорію потрібно вміти використовувати її на практиці для цього слід виконувати різноманітні завдання. Чим більше завдань буде виконано тим краще засвоїться матеріал. Для початку слід розв'язувати різного типу завдань на уроці, дослідити кожний крок розв'язування, а потім подібні завдання давати для самостійного опрацювання. Під час виконання завдань розвивається увага, мислення, пам'ять.

Створюючи завдання слід враховувати рівень знань здобувачів освіти (ці знання можна перевірити завдяки перевірці знань), а також варто враховувати вікові особливості учнів. Завдання мають бути грамотно підібрані та змістовні із чітко поставленою задачею.

Для початку слід виконувати простіші завдання, адже важкі не всім під силу. Якщо спочатку щось не вийде, то у здобувачів освіти може пропасти натхнення продовжувати далі, адже може промайнути думка, що нічого не виходить і не вийде. Тому краще поступово підвищувати складність завдань. Для тих хто швидше та краще виконує завдання, можна давати додаткові завдання, над якими можливо варто логічно подумати та за це дати додаткові бали для мотивації. Розберемо деякі приклади завдань з теми «Застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції».

Завдання 1. Обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена параболою $g(x) = x^2 - 3x$, $f(x) = -x^2 + 10x - 6$

Розв'язання:

Для початку знайдемо точки перетину цих двох функцій для цього прирівняємо ці дві функції.

$$x^2 - 3x = -x^2 + 10x - 6$$

$$2x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$2x^2 - x - 12x + 6 = 0$$

$$x(2x - 1) - 6(2x - 1) = 0$$

$$(x - 6)(2x - 1) = 0$$

$$x_1 = 6; \quad x_2 = 0,5$$

Зобразимо графіки цих функцій.

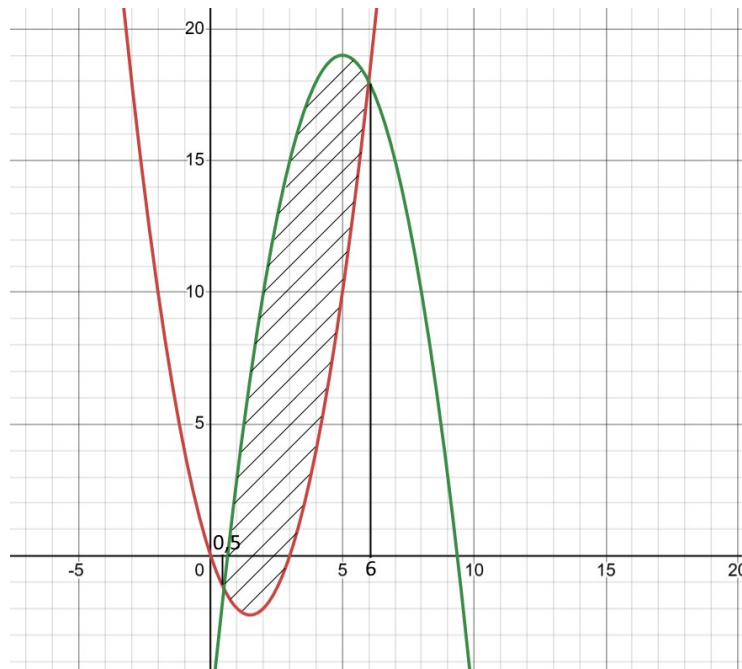


Рис. 3.14 Графік перетину парабол

Площу заштрихованої фігури потрібно знайти. Оскільки графік функції $f(x)$ знаходиться вище, то від нього потрібно відняти графік функції $g(x)$. Тоді шукану площу знаходимо за такою формулою:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{0,5}^6 (f(x) - g(x)) dx = \int_{0,5}^6 (-x^2 + 10x - 6 - (x^2 - 3x)) dx = \\
 &= \int_{0,5}^6 (-x^2 + 10x - 6 - x^2 + 3x) dx = \int_{0,5}^6 (-2x^2 + 13x - 6) dx = - \int_{0,5}^6 (2x^2) dx + \\
 &+ \int_{0,5}^6 (13x) dx - \int_{0,5}^6 (6) dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{13x^2}{2} - 6x \right) \Big|_{0,5}^6 = -\frac{2 \times 6^3}{3} + \frac{13 \times 6^2}{2} - \\
 &- 6 \times 6 - \left(-\frac{2 \times 0,5^3}{3} + \frac{13 \times 0,5^2}{2} - 6 \times 0,5 \right) = -144 + 234 - 36 + \frac{1}{12} - \frac{13}{8} + \\
 &+ 3 = 57 - \frac{37}{24} = \frac{1331}{24}
 \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1331}{24}$ кв. один.

Завдання 2. Знайти площу криволінійної трапеції, що обмежена кривими $y = (x - 2)^2$, $y = 2\sqrt{8 - x}$, $x = 2$, $x = 8$, $y = 0$.

Розв'язання:

Для початку зобразимо графіки цих функцій.

Згідно графіку функції $y = (x - 2)^2$, $y = 2\sqrt{8 - x}$ перетинаються в точці $(4; 0)$.

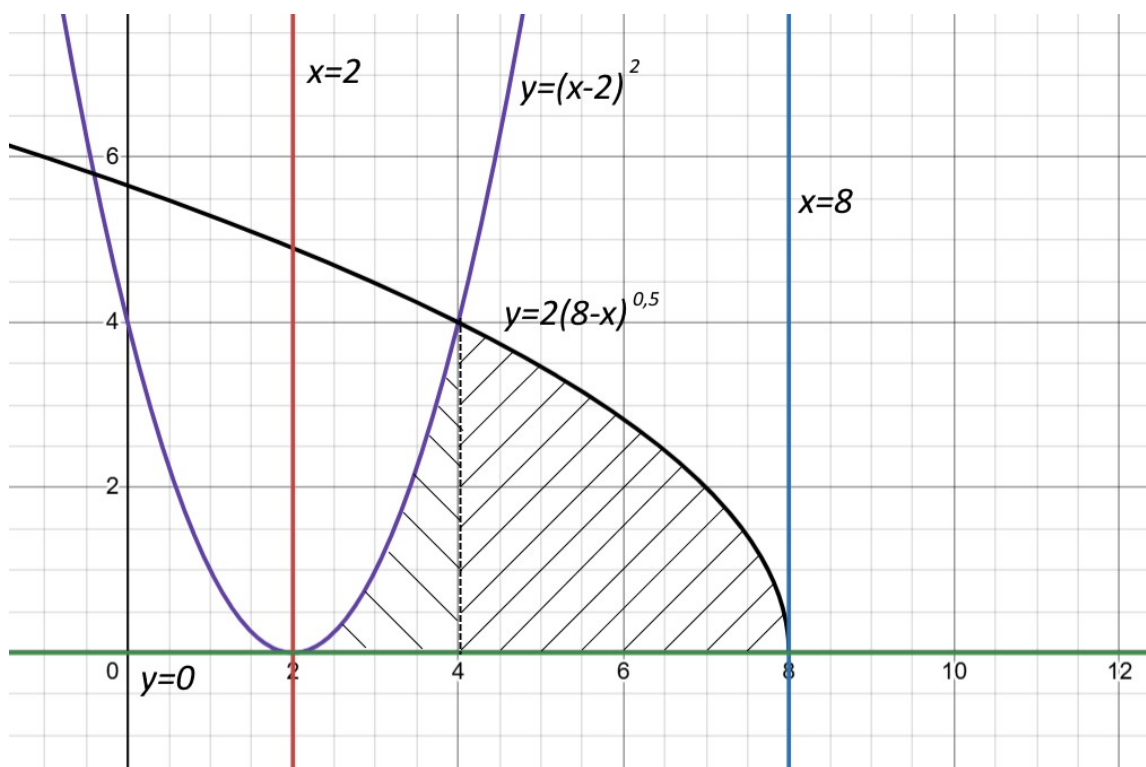


Рис. 3.15 Графік перетину функцій

Оскільки криволінійна трапеція складається з двох частин, тому площа цієї фігури буде складатись із суми площ двох частин.

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 = \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx + \\
 &+ 2 \int_4^8 \sqrt{8 - x} dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_2^4 - 2 \int_4^8 \sqrt{8 - x} d(8 - x) = \\
 &= \frac{4^3}{3} - 2 \times 4^2 + 4 \times 4 - \left(\frac{2^3}{3} - 2 \times 2^2 + 4 \times 2 \right) - \left(2 \times \frac{2(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \right) \Big|_4^8 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{64}{3} - 32 + 16 - \frac{8}{3} + 8 - 8 - \left(\frac{4(8-8)\sqrt{8-8}}{3} \right) + \frac{4(8-4)\sqrt{8-4}}{3} = \\
&= \frac{8}{3} - 0 + \frac{32}{3} = \frac{40}{3}
\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{40}{3}$ кв.один – площа криволінійної трапеції.

Збірник завдань

Завдання 1. Обчислити площу криволінійної трапеції, що обмежена параболою та лінією:

- a) $y = x^2 + 1 - 2x$ та $y = x + 4$
- b) $y = x^2 - 5x + 6$ та $y = x + 6$
- c) $y = 7x^2$ та $y = 14x$
- d) $y = x^2 - 3$ та $y = x - 3$
- e) $y = 2x^2 + 4x - 8$ та $y = 2x - 4$
- f) $y = x^2 + 1 - 2x$ та $y = x + 4$
- g) $y = 3x^2 - 1$ та $y = 9 - x$
- h) $y = 5x^2 + 6x$ та $y = x$
- i) $y = -x^2 + 4x - 2$ та $y = x - 2$
- j) $y = -8x^2 + 6$ та $y = x - 1$
- k) $y = -5x^2$ та $y = 15x$

Завдання 2. Обчислити площу криволінійної трапеції, що обмежена параболою:

- a) $y = x^2 - 2x + 2$ та $y = -x^2 + 4x + 2$
- b) $y = -x^2 + 5x + 2$ та $y = x^2 - 3x + 2$
- c) $y = 3x^2 + 6$ та $y = 7 - x^2$
- d) $y = 5x^2$ та $y = -3x^2 + 8x$
- e) $y = 2x^2 + 2x - 6$ та $y = -x^2 + 9x$
- f) $y = -3x^2 + 9x + 6$ та $y = x^2 + 6x - 4$
- g) $y = x^2 - 2x + 2$ та $y = -x^2 + 4x + 2$
- h) $y = 5x^2$ та $y = 6 - x^2$

- i) $y = 7x^2 - 6x$ та $y = 2 - x^2$
- j) $y = -x^2$ та $y = x^2 + 4x - 6$
- k) $y = x^2 + 5x - 10$ та $y = -x^2 - 7x + 5$

Завдання 3. Обчислити площу криволінійної трапеції, яка обмежена:

- a) $xy = 8$ та $y = 9 - x$
- b) $y = 2 \cos(x)$; $y = \sin(x)$; $x = \pi$; $x = \frac{\pi}{2}$
- c) $y = x + 5$; $y = 3x + 1$; $x = 0$; $x = 2$
- d) $y = \cos(x)$; $y = 3 \cos(x)$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$
- e) $y = \frac{x^3}{3} + 2x$; $x = 1$; $y = 0$
- f) $y = 3 \sin(2x)$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = 0$; $y = 0$
- g) $y = x^3$; $y = 27$; $x = 0$
- h) $y = \sqrt{2x}$; $y = \frac{x}{2}$
- i) $y = 4x - 6$; $y = 0$; $y = \sqrt{x + 2}$
- j) $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$; $x = 5$; $y = 0$
- k) $y = x^3 + 2$; $y = x + 2$

Висновок до третього розділу

В цьому розділі було створено низку дидактичних, практичних та наочних матеріалів за допомогою інноваційних технологій. За допомогою яких можна урізноманітнити свої заняття, зробити їх цікавішими та яскравішими. В результаті чого буде ефективніше навчання, здобувачі освіти будуть краще запам'ятовувати матеріал. Використовуючи різні методи та форми візуалізації навчального матеріалу можна створити інтерактивне навчальне середовище, що допомагає розвивати творчість та критичне мислення. Створено методику перевірки та контролю знань здобувачів освіти. Під час розробки завдань було виявлено, що слід враховувати не тільки навчальні цілі, а ще особистісні якості кожного учня та рівень їхньої підготовки.

ВИСНОВОК

В процесі написання даної кваліфікаційної роботи було глибше поринуто в світ математики та визначено основні теоретичні аспекти теми «Застосування визначеного інтеграла при визначенні площ криволінійної трапеції». Методика викладання та сучасні технології тісно пов'язані між собою. До підготовки кожного уроку слід ретельно готуватись, підбирати лаконічно кожний метод, враховувати особистісні й вікові особливості кожного здобувача освіти, адже всі люди унікальні.

Всі поставлені перед собою завдання були виконані, а саме: визначено основні теоретичні пізнання теми; проаналізовано навчальний тематичний план та шкільні підручники, та було помічено, що в підручника стандартного рівня ця тема розглядається поверхнево; визначили й вдосконалили методику навчання даної теми; створені дидактичні матеріали за допомогою різних інноваційних платформ; розроблені практичні завдання для класного та самостійного опрацювання; визначені методи перевірки та контролю знань.

Під час проходження практики було проведено урок з алгебри на основі даних розробок в учнів 11 класу на тему «Площа криволінійна трапеція». Під час якого було виявлено, що все нове та невідоме для здобувачів освіти є цікавим, а особливо коли це пов'язано із сучасними технологіями. Під час проведення уроку було використано різні дидактичні матеріали (інтерактивні вправи, презентація, онлайн дошка, побудова графіків онлайн тощо). У висновку здобувачі освіти гарно засвоїли матеріал, із задоволенням виконували різноманітні вправи, а також залишились тільки із позитивними емоції після проведення уроку.

Використання таких інноваційних програм та графіків дозволяє здобувачам освіти ліпше уявляти процес знаходження площ криволінійної трапеції, що розвиває уяву, критичне мислення, сприяє кращому розумінню матеріалу та покращує мотивацію до навчального процесу.

Також важливим етапом у навчанні є зворотній зв'язок, тобто регулярна перевірка та оцінювання набутих знань. Щоб вчитель та здобувач освіти

розуміли на якому етапі знаходяться знання учня, що потрібно довчити, повторити та зосередити більшу увагу для корекції навчального процесу.

Дослідження в даній роботі можуть бути корисними не тільки на викладачів математики, а також для методистів, розробників освітніх програм та навчальних установ. Під час підготовки до уроку, можна вибрати із запропонованих методів, дидактичних матеріалів, практичних та наочних завдань для покращення свого заняття.

Завдяки розробкам в даній кваліфікаційній роботі можна зробити наступні рекомендації:

1. Під час проведення занять слід використовувати різні методики викладання та спостерігати чи ефективні вони для певного класу.

2. Детально готувати до проведення кожного заняття, використовуючи у своїй практиці різні практичні, дидактичні та наочні матеріали, не забувати про світ інноваційних технологій.

3. Проводити перевірку та контроль знань систематично використовуючи різні види діяльності після чого давати зворотній зв'язок здобувачам освіти

4. Завдання варто розробляти та підбирати грамотно, змістовно враховуючи їх складність та вміння учнів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аргірова Т. О. Інтерактивні технології: кооперативна форма організації діяльності учнів на уроках математики. Математика в школах України. 2010. - 2–7 с.
2. Аман І.С. Інтернет-сервіс мультимедійних дидактичних вправ LearningApps / І.С.Аман [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://internet-servisi.blogspot.com/p/learning-apps.html>.
3. Бевз Г. П. Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / К: - Видавничий дім «Освіта», 2019. – 272 с.
4. Боднарчук О. І., Єльнікова О. І. Критерії і показники якості навчальної діяльності: енциклопедія освіти. Юрінком Інтер, 2008. - 435 с.
5. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Глобін О. І.: Навчання математики в старшій школі на профільному рівні (Методичні рекомендації) [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/712224/1/Metod%20recomend.pdf>.
6. Гібалова Н.В., Карапузова Н. Д., Ржеко В. А. Математика : навч. посіб. Полтав. нац. пед. ун-т ім. В.Г. Короленка. Вид. 2-е, перероб. П.: АСМІ, 2017. – 360 с.
7. Дичківська І. М. Інноваційні педагогічні технології. К.: Академвидав. 2015. – 304 с.
8. Дубасенюк О. А., Антонова О. Є. Методика викладання педагогіки: Навчальний посібник: Вид. 2-ге, доп. – Ж.: ЖДУ ім. І. Франка, 2012. – 375 с.
9. Збаровська Л. М. Методичний посібник: Розвиток творчих здібностей учнів та їх життєвих компетенцій засобами сучасних технологій / Збаровська Лілія Миколаївна. – Нетішин, 2020. – 62с.
10. Істер О. С. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Київ: - Генеза, 2019. – 416 с.

11. Канеман Деніел Мислення швидке й повільне / пер. з англ. Максим Яковлев. — 5-те вид. — К. : Наш Формат, 2021. — 480 с.
12. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики: теорія і практика: підручник/ Вид 2-ге, перероб. Х.: Принт-Лідер, 2012. — 254 с.
13. Королук О.М., Прус А.В. Методика навчання математики в старшій школі. Модуль 1: Стереометрія : навчально-методичний посібник. — Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. — 61 с. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <http://surl.li/ufskol>.
14. Кулик М. Г., Кушлик-Дивульська О. І., Степаненко Н. В., Ярема Н. П. Навчальний посібник: «Вища математика: Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» для студентів технічних спеціальностей / Вид. — К.: НТУУ «КПІ». — 2016. — 278 с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/e8f0fe59-a412-4952-8682-deb34fb3969e/content> .
15. Кучерова Г.М., Ягоднікова В.В. Інтерактивні вправи та ігри. — Х.: Вид. група "Основа", 2012. — 144 с.
16. Кушлик-Дивульська О. І. Конспект лекцій кредитного модуля «Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальні рівняння» (Вища математика-2) / Вид. К., 2015. — 241с. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/10581834-2be8-4229-a8c7-58d6541ff1e3/content> .
17. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів: веб-сайт. URL: <https://mon.gov.ua/ua>.
18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Номіровський Д. А. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Вид. Х.: Гімназія, 2019. — 352 с.
19. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Номіровський Д. А. Математика: алгебра та початки аналізу та геометрія: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Вид. Х.: Гімназія, 2019. — 208 с.

20. Новітній повний довідник школяра: 5-12 класи. Природничо-наукові дисципліни. – Х.: ТОРСІНГ ПЛЮС, 2011. – 576 с.

21. Павліщев В. І., Бойко Л. Й., Горбатов М. І. Вища математика. Невизначений інтеграл (у прикладах і задачах) навч. посіб. / Вид. М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д.: НГУ, 2015. – 71 с. URL: <http://surl.li/tcwttt> .

22. Першина Ю.І., Пріщенко О.П., Черемська Н.В., Черногор Т.Т. Невизначений та визначений інтеграли : навч.-метод. посіб. / Харків : Видавництво «Друкарня Мадрид», 2022. – 188 с. URL: https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2022/11/posibnyk_neviz-viz-integrali.pdf .

23. Прищак М. Д., Залюбівська О. Б. Педагогіка, психологія та методика викладання у вищій школі: курс лекцій. В.: ВНТУ, 2019. – 150 с.

24. Сторчай В.Ф. Готуємося до олімпіади. Невизначені, визначені та невласні інтеграли: навч. посіб. / М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2021. – 125 с. URL: <http://surl.li/zqccsi> .

25. Цехмістро І. І., Черемська Н. В., Черногор Т. Т. Методичні рекомендації до проведення практичних занять за темою «Визначений інтеграл та його застосування» для студентів усіх спеціальностей / Харків: НТУ «ХПІ», 2018. – 70 с. URL: <https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2019/02/Metodychka-opred-yntegr.pdf> .

26. Цивенко Я. І. Використання інтерактивних технологій навчання на уроках математики, методичні рекомендації. М.: 55 с.

ДОДАТОК А

Конспект уроку

Тема: Площа криволінійної трапеції

Мета:

Навчальна: поглибити знання з теми площа криволінійної трапеції.

Розвивальна: розвивати в учнів логічне мислення, абстрактне мислення, увагу та пам'ять.

Виховна: виховувати в учнів культуру мовлення, вміння висловлювати свої думки, почуття поваги до думки інших.

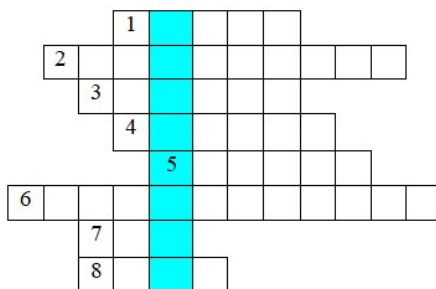
ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент

Доброго дня любі друзі! Сьогодні на нашому факультативному занятті ми поглибимо знання вивчені на уроці, а саме площа криволінійної трапеції

II. Актуалізація опорних знань

Заповнити кросворд



Завдання:

1. $\int_0^1 (8x + 2) dx$.

2. $\int_{-1}^7 \sqrt[3]{x+1} dx$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 8 \sin 2x dx$.

4. $\int_2^3 (3x^2 - 4x) dx$.

5. Множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата набуває всіх значень з області визначення функції $y = f(x)$, а друга координата – це відповідні значення функції в точці x .

6. $\int_0^2 \frac{3x^3 + 2x^2 + x}{x} dx$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx$.

8. $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx$.

Рис. 1 Кросворд

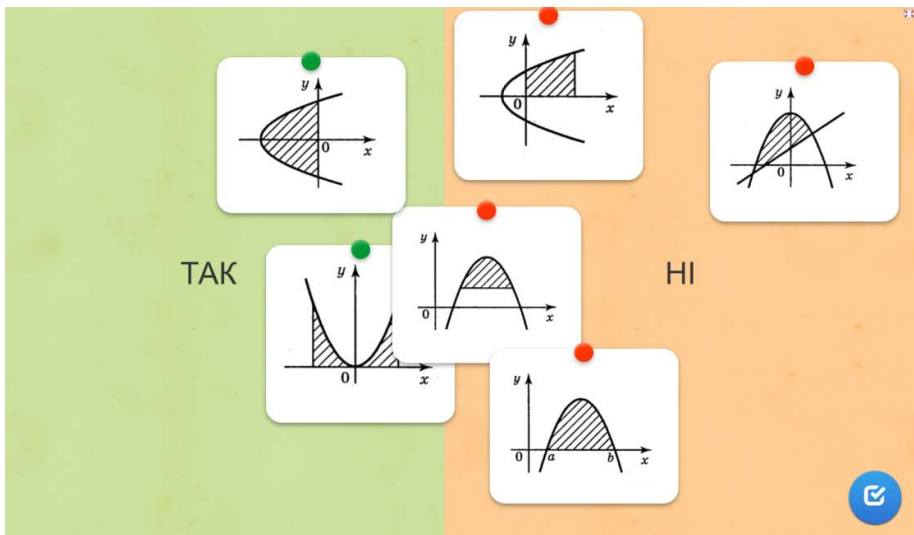


Рис. 4 Інтерактивна вправа «Визначити криволінійну трапецію»

Завдання 2. Побудувати криволінійну трапецію та знайти її площу

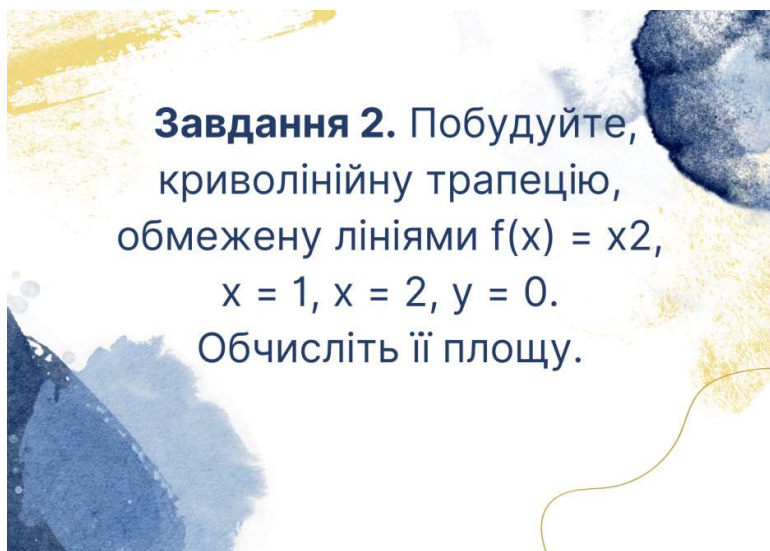


Рис. 5 Завдання знайти площу криволінійної трапеції

Завдання 3. Обчислити площу

Знайдіть площу фігури, обмежену лініями
 $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = -2$

$$S = \int_{-2}^1 (x^2 + 2) dx$$

$$S = \left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2}^1$$

$$S = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right)$$

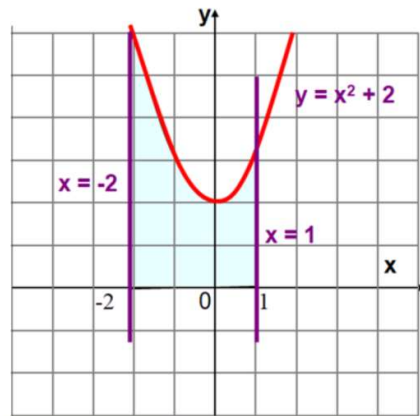


Рис. 6 Завдання обчислити площу

V. Усвідомлення та узагальнення вивченого

Виконання інтерактивної вправи на платформі Learningapps
*«Установити відповідність між криволінійними трапеціями та формулами
 для обчислення їх площ»*

<https://learningapps.org/watch?v=poa29eksj24>



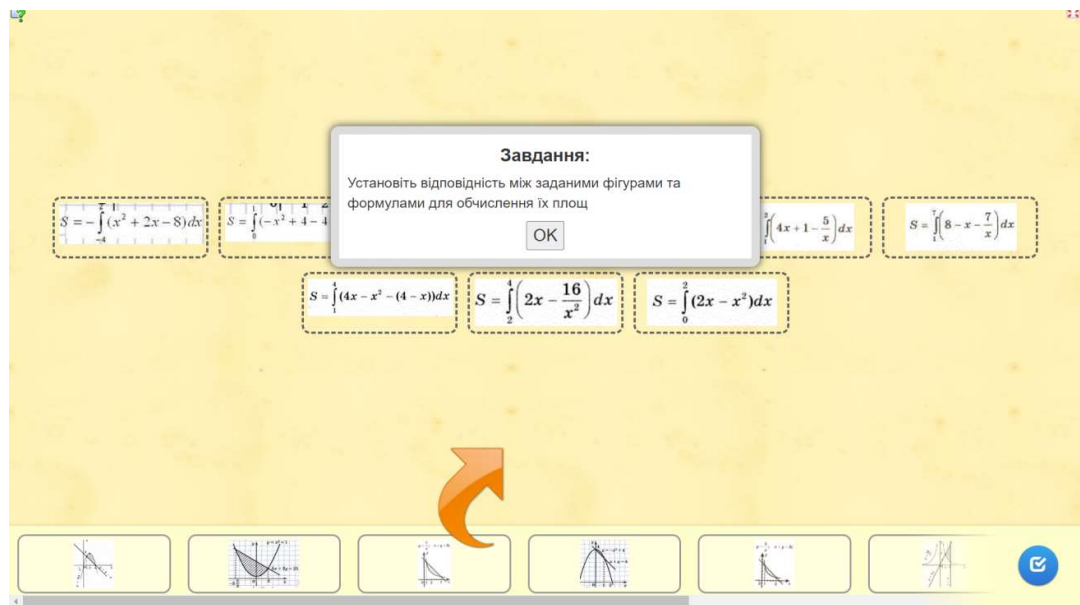


Рис. 7 Інтерактивна вправа

VI. Оголошення домашнього завдання

VII. Підсумок уроку

Рефлексія

На дошці Padlet потрібно написати свої враження від уроку (що сподобалось/не сподобалось, що найбільше запам'яталось, що можливо було не зрозуміло тощо).

<https://padlet.com/annapnk25/padlet-6qf7k0k7cw4e8jjh>



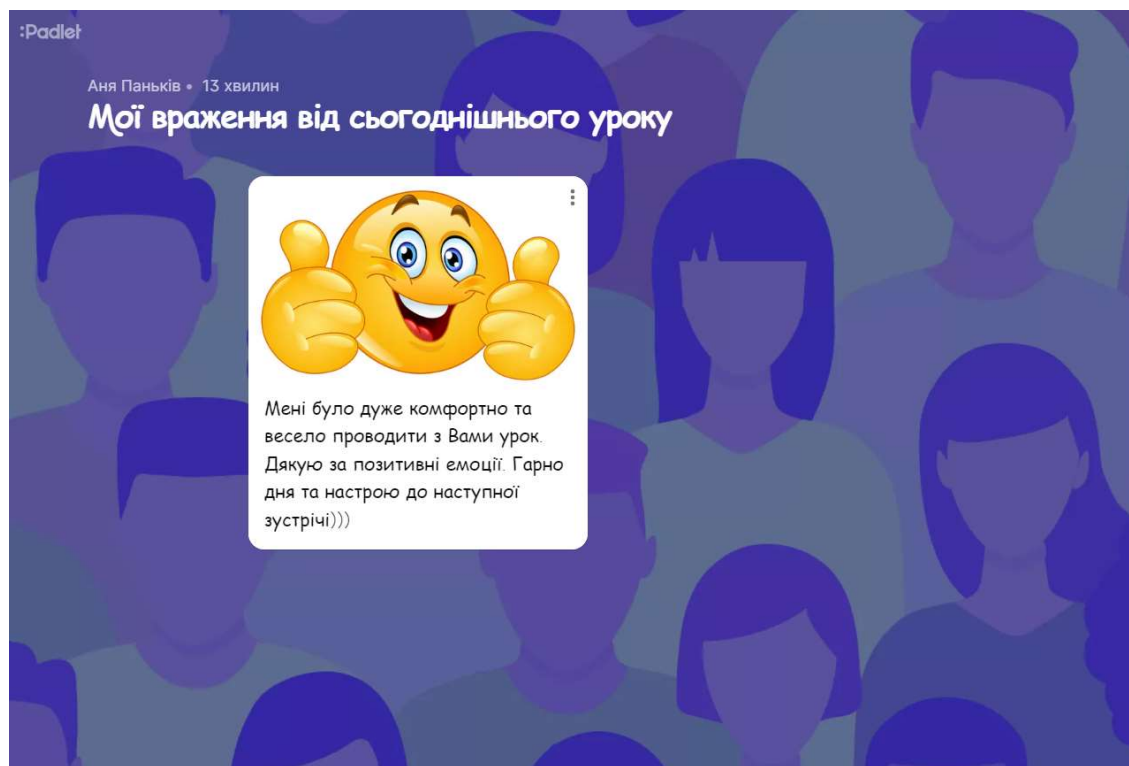


Рис. 8 Дошка Padlet