

Державний вищий навчальний заклад
«Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника»
Факультет математики та інформатики
Кафедра статистики і вищої математики

ДИПЛОМНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему Використання математичних моделей при розв'язуванні прикладних
задач

Виконала: студентка 6 курсу, групи СОМ(М)-2

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Пукач М. А.

Керівник к. е. н., доц. каф. Никифорчин І. В.

Рецензент _____

(науковий ступінь, вчене звання, посада прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ НАВЧАННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ	6
1.1 Прикладні задачі та їх роль в шкільному курсі математики.....	6
1.2 Основні поняття про математичне моделювання і його роль в навчанні учнів математики	10
1.3 Вивчення текстових задач в школі.....	19
Висновки до розділу 1	30
РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ВМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ.....	31
2.1 Основні типи текстових задач	31
2.2 Лінійне рівняння як математична модель.....	40
2.3 Квадратні рівняння як математична модель	42
2.4 Дробово-раціональне рівняння як математична модель	44
2.5 Системи рівнянь як математична модель	46
2.6 Нерівності як математична модель	50
Висновки до розділу 2	52
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЗАДАЧ НА ТЕМУ «НЕСТАНДАРТНІ ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ».....	54
Висновки до розділу 3	65
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	67
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	70
ДОДАТКИ	77

ВСТУП

Актуальність теми дослідження зумовлена важливістю вдосконалення методів та підходів до формування в учнів умінь застосовувати математичні знання для розв'язування прикладних задач. Математична компетентність є однією з ключових компетентностей, визначених у Законах України «Про освіту» [42], «Про повну загальну середню освіту» [43], Державному стандарті базової середньої освіти [41], які зазначають, що метою повної загальної середньої освіти є всебічний розвиток особистості учня та успішна самореалізація у суспільстві.

У Концепції «Нова українська школа» [44] наголошується на необхідності формування в учнів умінь розв'язувати проблеми, застосовувати знання в реальних життєвих ситуаціях, що потребує посилення прикладної спрямованості навчання математики та впровадження сучасних методик навчання та забезпечення високого рівня математичної грамотності. Саме тому важливо приділяти увагу розв'язуванню текстових задач, які демонструють учням можливості застосування математичних методів до розв'язування реальних практичних проблем. Водночас використання математичного моделювання при розв'язуванні прикладних задач сприяє розвитку в учнів логічного мислення, вміння аналізувати умову задачі, виділяти істотні зв'язки між величинами, переходити від словесного опису ситуації до її математичної моделі.

Попри важливість формування в учнів умінь застосування математичного моделювання, у шкільній практиці цьому питанню приділяється недостатньо уваги. Учні часто стикаються з труднощами при розв'язуванні текстових задач, не можуть самостійно знаходити раціональне розв'язання поставленого завдання, що свідчить про необхідність удосконалення методики навчання розв'язування прикладних задач. Використання математичних моделей у розв'язуванні прикладних задач не лише сприяє підвищенню інтересу до предмету, а й дозволяє учням здобувати практичні навички, сприяє розвитку

критичного мислення, логічного аналізу та творчого підходу до розв'язання проблемних ситуацій.

Концептуальною основою даного дослідження в аспектах захисту дітей-переселенців в діяльності регіональних управлінь соціального захисту населення стали наукові праці вітчизняних дослідників: О. Балтовський та ін. [1], В. Бахрушин [2], Г. Бевз та ін. [6; 3; 5], М. Бурда та ін. [8; 7], С. Великодний [9], В. Волошена [10; 12; 11], О. Грив'юк [15], Г. Іванова [16], О. Істер [18; 17], Г. Катеринюк [24; 23; 19], О. Малихін [27], А. мерзляк та ін. [30; 32], А. Новікова [38; 37], Ю. Поскрипко та О. Данченко [39], С. Раков [45], О. Серман [47], Н. Тарасенкова [49], А. Чінчой [51] та інші.

Попри численні дослідження, частина проблеми використання математичних моделей при розв'язуванні прикладних задач, яка обрана темою даної роботи є на сьогодні ще недостатньо вивченою та висвітленою. Цим обумовлений вибір теми даного дослідження.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та розробити моделі формування в учнів вмінь математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач.

Для досягнення мети визначені наступні **завдання дослідження:**

1. Дослідити роль прикладних задач в шкільному курсі математики.
2. Розкрити сутність основних понять про математичне моделювання і його роль в навчанні учнів математики.
3. Проаналізувати основні типи та підходи до вивчення текстових задач в школі.
4. Здійснити аналіз моделей формування в учнів вмінь математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач.
5. Розробити систему задач на тему «Нестандартні текстові задачі»

Об'єкт дослідження: процес навчання математики.

Предмет дослідження: особливості застосування математичних моделей при розв'язуванні прикладних задач у загальноосвітніх закладах.

Методи дослідження: аналіз науково-методичної літератури, що забезпечив розгляд теоретичних питань із проблеми дослідження, методи аналізу та синтезу, індукції та дедукції, узагальнення отриманої інформації з метою розкриття особливостей використання математичних моделей при розв’язуванні прикладних задач в межах основної школи.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у визначенні в процесі теоретичного дослідження степеня вивчення і висвітлення питань використання математичних моделей при розв’язуванні прикладних задач у шкільному курсі математики та розробки системи задач на тему «Нестандартні текстові задачі» для формування в учнів умінь математичного моделювання.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості застосування результатів роботи для практичної реалізації в діяльності вчителів математики щодо ефективного розв’язання проблем формування в учнів умінь математичного моделювання при розв’язуванні текстових задач та в роботі педагогів і методистів, як засіб удосконалення процесів навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Апробація результатів роботи. Окремі положення та результати дослідження публікувалися у збірнику «Еврика – XXV. Збірник студентських наукових праць. Електронне видання. Івано-Франківськ : Прикарпат. нац. ун-т ім. В. Стефаника, 2024. 365 с.»

Структура дипломної роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел з 52 найменувань та додатків. Основна частина роботи викладена на 69 сторінках. Загальна кількість сторінок в роботі 112.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ НАВЧАННЯ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

1.1 Прикладні задачі та їх роль в шкільному курсі математики

Прикладні задачі відіграють важливу роль у шкільному курсі математики, оскільки вони допомагають учням зрозуміти практичне застосування математичних концепцій та розвивають їх здатність вирішувати реальні проблеми. Ці задачі демонструють зв'язок між абстрактними математичними ідеями та конкретними ситуаціями з повсякденного життя, що робить навчання більш цікавим та мотивуючим для учнів.

В освітній методиці з математики термін «математична задача» використовується для позначення запиту на виконання обчислень, конструкцій, доказів або досліджень, що пов'язані з геометричними фігурами або числовими відносинами, а також для питань, що є аналогічними до таких запитів. Структура будь-якої задачі включає дві основні частини: умову задачі та те, що необхідно визначити або довести. Умова задачі описує вихідні дані, а те, що потрібно знайти, є її цільовою вимогою. Розв'язанням задачі вважається виконання вказаної у ній вимоги [40, с. 4]:

1. *Процес (опис) розв'язування*, який часто представляється у вигляді послідовності логічних кроків або в символічній формі, називають розв'язанням задачі. Для кожної задачі важливо, щоб розв'язання було точним, обґрунтованим, вичерпним і ефективним.

2. *Кінцевий результат – розв'язок задачі*. Під *методом розв'язання* задачі розуміють набір інтелектуальних технік або математичних операцій, які застосовуються для вирішення широкого спектру задач.

3. Способом розв'язування конкретної задачі або групи задач подібного типу вважають комплекс інтелектуальних технік або математичних операцій, використовуваних для розв'язування задачі або групи задач.

4. Кожна задача може бути розв'язана шляхом безпосередньої дії з використанням числових значень і відносин між ними. Цей метод називається арифметичним підходом. Інший спосіб полягає у складанні рівняння або системи рівнянь на основі умов задачі та використанні їх для отримання розв'язку, що є алгебраїчним підходом до вирішення задач.

У навчальному курсі математики зустрічаються завдання, що включають певні числові величини та їхні взаємозв'язки, представлені через історії чи сценарії, наближені до реального досвіду або повсякденних ситуацій. Ці історії або сценарії викладають кількісні аспекти фактичних явищ чи подій і вимагають віднайти невідоме значення однієї або декількох кількісних величин. Такі завдання називають сюжетними. Через їх подання в неспеціалізованій мові, їх також часто ідентифікують як текстові завдання [40, с. 4].

Текстова (прикладна або сюжетна) задача описує певну ситуацію звичайною мовою, в якій потрібно кількісно охарактеризувати певний елемент цієї ситуації, встановити наявність чи відсутність певних відносин між елементами або визначити тип цих відносин [40, с. 4].

Як зазначає О. Гриб'юк, математика сформувалася з потреби вирішувати практичні завдання, що виникали в житті, і розвивалася через процес розв'язування цих завдань і визначення пріоритетів. Прикладні завдання, на думку цього дослідника, це ті, що виходять за межі математики і розв'язуються за допомогою математичних методів. Вони, як і будь-які інші математичні завдання, виконують важливі освітні функції в процесі вивчення математики, серед яких [15, с. 138]:

1. Навчальна: сприяння формуванню системи математичних знань, вмінь і навичок на різних етапах їх освоєння;
2. Виховна: розвиток наукового світогляду, інтересу до пізнання і самостійності, навичок навчальної праці, моральних якостей особистості;

3. Розвивальна: підтримка розвитку логічного мислення, володіння ефективними методами розумової діяльності.

У процесі навчання математики особливе місце займають задачі, які представляють собою вимоги до виконання певних дій – обчислень, конструювання, доведення або дослідження, пов'язаних з геометричними формами або числовими відношеннями. Зміст цих задач часто розгортається у вигляді історій або сценаріїв, що імітують ситуації із реального життя, ставлячи перед учнями завдання визначити невідомі величини або відносини. Ці завдання не лише стимулюють інтерес до математики, але й розвивають логічне мислення та аналітичні здібності. О. Корольок представляє наступні функції текстових задач у шкільному курсі навчання математики [40, с. 6] (рис. 1.1):



Рис. 1.1. Основні функції прикладних задач у курсі вивчення математики

1. Освітню – забезпечення учнів знаннями, уміннями та навичками з математики.

2. Інформаційну – ознайомлення з прикладами застосування математики у різних сферах, а також із історією математичних відкриттів.

3. Виховну – виховання цілісного світогляду, стимулювання бажання до самостійного пізнання та вдосконалення власних навчальних умінь.

4. Інтегруючу – показано, наприклад, у розв’язуванні текстових задач, які підкреслюють міжпредметні зв’язки.

5. Контрольну – оцінювання рівня освіченості та здібностей до незалежного вивчення математики.

6. Евристичну – навчання використанню евристичних методів та їх аплікації у різноманітних ситуаціях.

Система задач складається з ретельно відібраних і систематично організованих задач, які служать єдиній цілі та взаємопов’язані таким чином, що сприяють досягненню бажаного результату. Основні критерії, яким повинні відповідати прикладні задачі в цій системі, включають їхню релевантність та відповідність освітнім цілям, можливість адаптації до різних рівнів складності, узгодженість з обраною математичною моделлю, наявність контексту в умові задачі та інтегральність необхідної інформації [38, с. 3].

Текстові задачі відіграють ключову роль у демонстрації практичного застосування математики та її зв’язків з реальним світом та повсякденним життям, сприяючи реалізації освітніх та виховних цілей. Вміння учнів розв’язувати задачі безпосередньо впливає не тільки на їхню математичну компетентність на даному етапі навчання, але й на глибоке розуміння курсів алгебри, геометрії, фізики, інформатики та економіки [40, с. 6].

Математичні задачі мають значне значення у стимулюванні розумової активності учнів, виявленні їх творчого потенціалу та розвитку інтересу до математики. Задачі часто стають вихідним пунктом для залучення учнів до математичних досліджень. Принцип навчання через розв’язування задач впливає з самої сутності математики, а розв’язування задач становить найбільш продуктивний метод не лише для активізації математичної діяльності,

але й для освоєння теоретичних знань, практичних навичок, методик та застосувань математики [50, с. 14-15].

Таким чином, розв'язування прикладної задачі полягає у створенні та аналізі відповідної математичної моделі. Цей процес відбувається за допомогою спрощеного евристичного підходу до математичного моделювання, який включає в себе кілька ключових кроків [15, с. 138]:

1. Початковий аналіз досліджуваного об'єкта.
2. Застосування математичних засобів для створення моделі.
3. Вивчення отриманих даних і їх застосування до вивченого об'єкта.

Одночасно О. Гриб'юк зазначає, що кожна задача виконує освітні, розвиваючі та виховні функції, хоча вони не завжди активізуються в навчальному процесі. Більшість задач, представлених учням під час вивчення математики, мають лише освітній аспект, що суперечить вимогам сучасної освіти. Це вказує на потребу вдосконалення методик викладання математики [15, с. 134].

Отже, прикладні задачі є невід'ємною частиною шкільного курсу математики, оскільки вони сприяють розвитку критичного мислення, творчого підходу до розв'язування проблем та допомагають учням усвідомити практичну цінність математики. Включення прикладних задач у навчальний процес підвищує ефективність навчання та готує учнів до успішного застосування математичних знань у реальному житті.

1.2 Основні поняття про математичне моделювання і його роль в навчанні учнів математики

Математичне моделювання є ефективним інструментом для вирішення прикладних задач та має важливе значення в навчанні учнів математики. Воно передбачає створення математичної моделі, яка описує реальну ситуацію або проблему, та використання цієї моделі для аналізу, прогнозування та прийняття

рішень. Математичне моделювання допомагає учням розвивати навички абстрактного мислення, структурування інформації та застосування математичних концепцій до реальних ситуацій.

Термін «моделювання» активно застосовується у таких дисциплінах як філософія, психологія, освіта, а також у різних сферах науки та технологій. Видатними вченими, зокрема Г. Галілеєм, І. Ньютоном, А. Ейнштейном, Н. Бором, М. Фарадеєм, У. Кельвіном, Дж. Максвеллом, Г. Лоренцом, Е. Резерфордом, зроблено значний вклад у розвиток методології моделювання та його застосування на протязі історії людства [10, с. 10].

О. Греб'юк зазначає, що хоча поняття «модель», «моделювання», «математична модель» і «математичне моделювання» зараз широко вживаються, вони містять різноманітні значення. Через їх повсемісну употребу в різних контекстах існує ризик створення неточних уявлень про сутність обговорюваних понять без належних роз'яснень [15, с. 137].

За О. Малихіним, модель представляє собою структуру, яка імітує конфігурацію та функціонування будь-якого предмета дослідження. Слово «модель» у перекладі з латини означає міру, зразок, еталон або схему, яка слугує для пояснення певних явищ або процесів [27, с. 141]. Модель, відтворюючи або імітуючи об'єкт дослідження, може виступати в ролі його замітника, дозволяючи через її аналіз отримати нові дані про вивчений об'єкт, як це зазначає Г. Іванова [16, с. 141].

Отже, модель може бути представлена як реальним, так і концептуальним об'єктом, який під час дослідження слугує заміною для оригінального об'єкта, дозволяючи отримати нові відомості про нього через безпосереднє вивчення моделі, як зазначають Н. Воропай та інші [13, с. 14]. Модель також може бути визначена як умовний образ, який створює уявлення про оригінальний об'єкт, відтворюючи його ключові характеристики у спрощеній або абстрактній формі, як стверджує Г. Катеринюк [21, с. 232].

В. Мацкул зауважує, що моделі можна поділити на дві основні категорії: матеріальні та ідеальні [13, с. 15-16; 2, с. 7]:

1. Матеріальні моделі включають фізичні моделі, які поділяють з оригінальним об'єктом однакові фізичні властивості, та предметно-математичні моделі, що базуються на ідеї, що об'єкти різної фізичної природи можуть бути описані з допомогою однакових математичних відносин, дозволяючи один об'єкт використовувати як модель для вивчення іншого.

2. Ідеальні (абстрактні) моделі об'єднують моделі з різним рівнем формалізації дійсності, створені за допомогою логічного мислення та уяви. Ці моделі варіюються від мовних і графічних до знакових, математичних і алгоритмічних, і можуть включати рівняння, формули, схеми, плани тощо, що представляють різні реальні процеси та об'єкти.

Математична модель за визначенням сучасних українських вчених (О. Балтовський, Г. Форос, О. Сіфоров, Г. Катеринюк) представляє собою набір математичних виразів (формул, рівнянь, нерівностей, логічних визначень, операторів тощо), які відтворюють ключові характеристики досліджуваного об'єкта чи явища в рамках обраної теоретичної фізичної моделі, а також деталізують його взаємодію з оточенням у визначених просторово-часових рамках [1, с. 16; 24, с. 36].

Математичне моделювання виступає як ключовий метод сучасних наукових досліджень. Цей процес охоплює створення моделі, її аналітичне дослідження та застосування отриманих висновків до реальної системи, яка підлягає вивченню [21, с. 232]. Моделювання має двояке трактування: як процедуру створення, аналізу та застосування моделей, так і як методологію наукового дослідження [13, с. 14], при цьому становлячи передовий напрямок, що активно розвивається з впровадженням новітніх комп'ютерних технологій та інформаційних систем [13, с. 9].

Зміст математичної моделі визначається як набір математичних відносин, у тому числі рівнянь та нерівностей, що відтворюють ключові аспекти та принципи процесу, об'єкта або системи, які підлягають дослідженню

[25, с. 9]. Процес перетворення реальних ситуацій з їх вербального опису на математичну мову полягає у формуванні математичної моделі цих явищ» [4, с.142].

Метод математичного моделювання сприяє поглибленому розумінню математичних концептів, розвитку креативного мислення, вміння логічно розмірковувати та висловлювати свої ідеї, а також покращує розуміння суті математичних понять. Це дозволяє ефективно застосовувати математичні знання для рішення прикладних проблем, аналізувати отримані результати та формулювати обґрунтовані висновки [22, с. 245].

Сучасні українські вчені (О. Балтовський, Г. Форос та О. Сіфоров) вважають, що початковий етап постановки завдання з математичного моделювання задає детальний план роботи, який можна умовно розділити на три фази: створення моделі, вибір методики та програмування. На початковому етапі визначається або розробляється математичний еквівалент об'єкта, що адекватно представляє його особливості, правила поведінки, та внутрішні зв'язки. Такий підхід дозволяє використання теоретичних методів для дослідження математичної моделі (або її частин), що, в свою чергу, надає важливі первинні дані про об'єкт [1, с. 4].

Основа методології математичного моделювання виходить з ідеї заміни реального об'єкта на його математичну модель, що дозволяє детально аналізувати модель замість безпосереднього об'єкта. Цей підхід уможливорює ефективне вивчення характеристик та поведінки об'єкта у різноманітних гіпотетичних сценаріях без ризику, швидко та з мінімальними затратами, що є ключовою перевагою теоретичного аналізу [1, с. 4]. При цьому, створення математичної моделі часто вимагає введення додаткових припущень або гіпотез [1, с. 18].

Важливою метою сучасної освіти є розвиток у учнів практичних навичок та компетентностей. Отже, розширення застосування прикладних аспектів навчального курсу математики та вдосконалення здібностей учнів до

математичного моделювання стають перспективними областями в галузі освітньої теорії та методик [12, с. 37].

В даному контексті, Ю. Поскрипко та О. Данченко, опираючись на праці Л. Спенсера та С. Спенсера [52], виділяють п'ять ключових факторів, що сприяють розвитку компетентності: мотивація, яка впливає на вибір поведінкової стратегії у певних ситуаціях, психофізіологічні характеристики та риси характеру, самосвідомість – особистісні переконання та цінності, професійні знання та інформація, а також спеціалізовані знання, навички та вміння, необхідні для певної діяльності [39, с. 118].

Також концепцію «competence» часто ілюструють за допомогою моделі «KSAO», що включає Знання (Knowledge), Навички (Skills), Вміння (Abilities) та Інші (Other) особливості – категорію, що охоплює важливі аспекти здібностей, необхідних для ефективного виконання завдань у певній області або при роботі з непередбачуваними ситуаціями, враховуючи особистий досвід [39, с. 118].

Математична компетентність визначається як здатність розвивати та застосовувати математичне мислення до вирішення різноманітних проблем, як формальних, так і неформальних. Ця компетентність охоплює готовність та спроможність використовувати різні математичні підходи (логічне та просторове мислення) та методи представлення (формули, моделі, графіки та діаграми) [46, с. 20].

За визначенням С. Ракова, математична компетентність охоплює здатність ідентифікувати та використовувати математичні інструменти у повсякденному житті, осмислювати принципи та методи математичного моделювання, створювати та аналізувати математичні моделі, тлумачити результати досліджень і оцінювати точність отриманих даних [45].

М. Головань підкреслює, що під математичною компетентністю розуміють не лише специфічні математичні навички, а й широкий спектр універсальних здібностей, включаючи математичне мислення, аргументування, вирішення проблем, моделювання, використання математичних мов і

технологій, а також комунікаційні навички. Математична компетентність проявляється в усвідомленні учнем значення математики для пізнання світу, вмінні розв'язувати прикладні завдання, оцінювати застосування математичних методів у конкретних випадках, формувати математичні моделі реальних ситуацій, вирішувати їх із застосуванням математичних засобів та тлумачити результати. Важливими аспектами є також логічне мислення, обґрунтування своїх дій, знання математичної термінології, вміння працювати з символічною та графічною інформацією, аналізувати та оцінювати результати [14, с. 36].

За Г. Катеринюк та В. Волошиною здатність до створення математичних моделей визначається як ключовий аспект математичної компетентності учнів [19; 20; 12]. Етапи процесу математичного моделювання включають [12, с. 38]:

1. Ретельний аналіз вихідної інформації та ідентифікацію ключових характеристик досліджуваного об'єкта.
2. Формулювання дослідницької проблеми з використанням природничих та математичних термінів.
3. Розробка гіпотез.
4. Створення та валідація формальної моделі.
5. Аналіз моделі з використанням математичних методів.
6. Виведення та тлумачення теоретичних висновків.
7. Оцінка обмежень для практичного використання результатів.

Також автори вказують на формування міжпредметних компетентностей під час вивчення основ математичного моделювання, до яких відносять моделювання, алгоритмізацію та прогнозування [12, с. 38].

У процесі опанування знаннями та навичками з природничих наук моделювання слугує втіленням продуктивної інтелектуальної активності учнів, перетворюючись на конкретні результати та інструменти цієї діяльності, особливо при розв'язанні задач. Використання різноманітних моделей закладає основу для розвитку відповідних умінь серед школярів [11, с. 3]. (рис. 1.2):



Рис. 1.2. Роль застосування моделювання у навчанні математики

У контексті математичної освіти у загальноосвітніх школах навичка математичного моделювання визначається як предметно-специфічна, тобто така, що необхідна для глибокого розуміння конкретного навчального предмета. Фундаментом для розвитку цієї здібності є достатній обсяг знань з математичних дисциплін та вміння аналізувати математичні структури. Серед критеріїв успішного вироблення навички математичного моделювання виділяються наступні [38, с. 3]:

1. Визначення мети навчальної діяльності, яка має бути зрозумілою для учня та відповідати його навчальним мотивам;
2. Врахування вікових та психологічних характеристик учнів при виборі навчальних методів;

3. Підготовка учнів до освоєння необхідних знань і навичок, а також умов їх застосування в реальному житті;
4. Врахування обмежень, в межах яких учень може застосовувати здобуті уміння;
5. Залучення учнів до активної навчальної діяльності, а не лише до пасивного сприйняття інформації.

За С. Великодним, через свою унікальність математичне моделювання інтегрує майже всі техніки викладання, сприяючи розвитку готовності учнів застосовувати математичні знання. Тому цей метод слід вважати ключовим у навчальному процесі і виділяти як окрему сферу знань у програмі з математики [9, с. 26].

Дослідники, такі як А. Новікова та А. Чінчой, наголошують на важливості урахування психологічних характеристик учнів та контенту навчального матеріалу під час розвитку умінь і навичок математичного моделювання. Вони рекомендують залучення інтерактивних методів навчання та звертати увагу на використання наочних засобів та інформаційно-комунікаційних технологій [37; 51; 23]. А. Пуанкаре підкреслював, що для математика критично важливою є інтуїція, здатність передбачити або знайти правильний напрямок у пошуку розв'язку, коли логіка не надає відповіді [46, с. 21].

В. Волошина зазначає, що хоча метод математичного моделювання широко застосовується в багатьох дисциплінах, формування необхідних умінь здійснюється в основному під час уроків математики. Вже в кінці минулого століття вчені, які розробляли методики математичного моделювання для застосування в різних сферах, дійшли до висновку про необхідність включення елементів математичного моделювання у програми загальноосвітніх шкіл [10, с. 5-6].

У Державному стандарті базової середньої освіти навички моделювання класифіковані як один з ключових освітніх навичок: математична компетентність включає здатність розширювати та використовувати математичні засади та методології для вирішення різноманітних завдань у

повсякденному контексті; моделювання різних процесів та сценаріїв із використанням математичних інструментів; усвідомлення значення математичної компетентності для індивідуального та соціального добробуту [41].

Методична система охоплює [12, с. 38]:

1. Цілі та завдання, спрямовані на засвоєння та розвиток знань та навичок у сфері математичного моделювання.
2. Зміст навчальної програми, пов'язаний із математичним моделюванням, та його організація.
3. Найбільш дієві стратегії та методики викладання, які підтримують розвиток навичок математичного моделювання серед учнів.
4. Оптимальні форми організації навчального процесу.
5. Доцільні дидактичні матеріали та ресурси для навчання.

Цілі навчання методу математичного моделювання учнів [12, с. 38] (рис. 1.3):

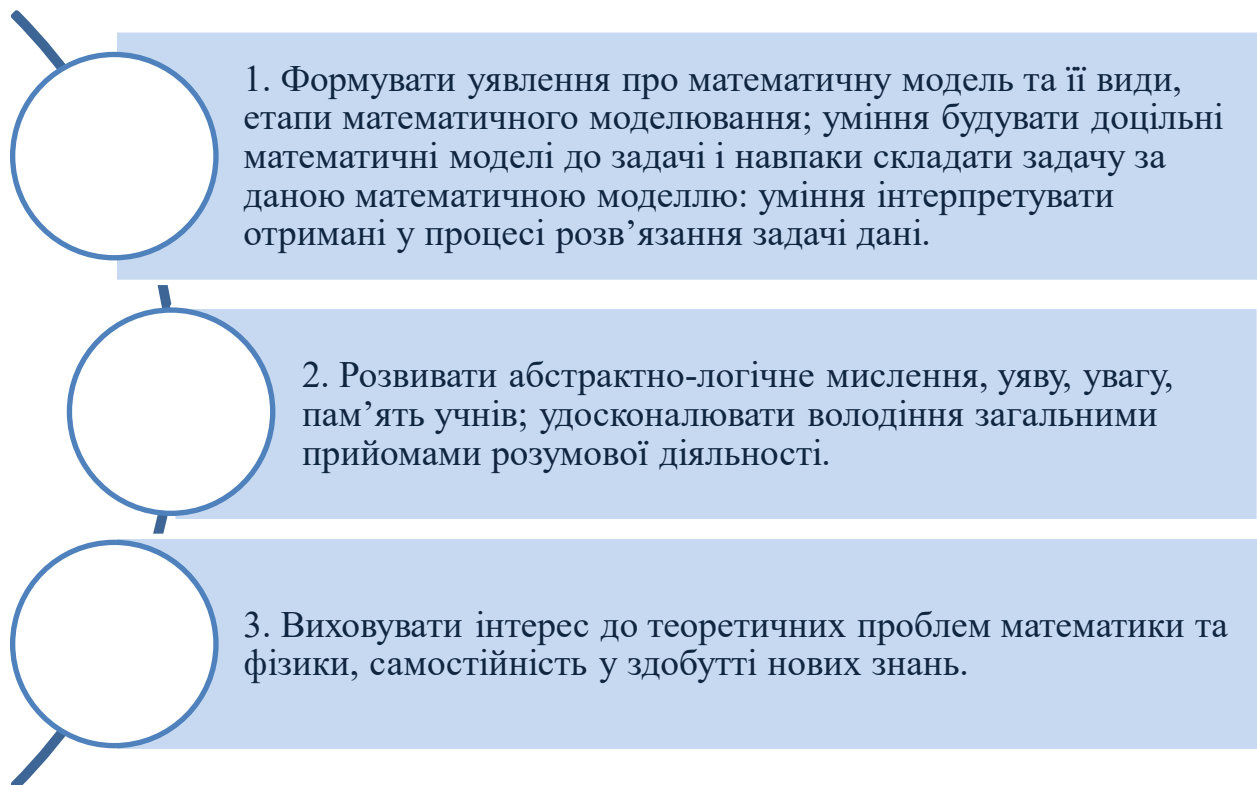


Рис. 1.3. Цілі навчання учнів методу математичного моделювання

Впровадження в навчальний курс математики інтегрованої методики, що заснована на математичному моделюванні з використанням міжпредметного підходу, ефективно сприяє розвитку творчих здібностей учнів, дозволяючи їм успішно формувати необхідні уміння та навички через реалізацію інтегрованих зв'язків у їхній діяльності [15, с. 138].

Систематичне використання математичного моделювання на протязі всього курсу математики повинно стати ефективним інструментом для розвитку в учнів звички щоденного застосування математичних знань. Завдання, які використовуються для викладання моделювання, мають відображати реальний досвід учнів, враховувати їх інтереси та бути актуальними, цікавими та сучасними [24, с. 6].

Отже, математичне моделювання відіграє ключову роль у навчанні учнів математики, оскільки воно сприяє розвитку їх аналітичних здібностей, творчого підходу до розв'язування проблем та вміння застосовувати математичні знання в практичних ситуаціях. Включення задач на математичне моделювання в шкільний курс математики допомагає учням усвідомити значення математики в реальному світі та підготувати їх до успішного використання математичних моделей у майбутній професійній діяльності.

1.3 Вивчення текстових задач в школі

Текстові задачі займають важливе місце в шкільному курсі математики, оскільки вони допомагають учням розвивати навички читання, розуміння та аналізу інформації, представленої в словесній формі. Ці задачі часто описують реальні життєві ситуації, що робить процес навчання більш цікавим та мотивуючим для учнів. Вивчення текстових задач сприяє розвитку логічного мислення, вміння виділяти ключові дані та будувати математичні моделі для розв'язування проблем.

У навчальному курсі математики значна увага приділяється роботі з текстовими задачами, які виконують двояку роль: з одного боку, є обов'язковою частиною програми, що вимагає засвоєння, а з іншого – слугують ефективним засобом освітнього процесу, спрямованого на навчання, розвиток та виховання учнів [40, с. 4].

О. Ткаченко висловлює думку, що традиційні підходи до навчання розв'язування текстових задач часто спрямовані на роботу з учнем середнього рівня та не враховують ключові положення та ідеї Державного стандарту базової загальної освіти в Україні, включаючи диференційований підхід та адаптацію навчального процесу під можливості кожного учня. Однією з головних мет цих сучасних освітніх стратегій є стимулювання когнітивного розвитку учнів, при цьому особливий акцент робиться на розвиток мислення. Мета полягає в навчанні учнів аналізувати та порівнювати, виділяти подібності та відмінності між об'єктами порівняння [50].

Вважаємо необхідним проаналізувати програмний курс математики для основної школи та зміст підручників з математики для виявлення основних підходів та методів, які рекомендують українські науковці та методисти щодо вивчення курсу математики та розв'язання текстових задач у контексті даного дослідження.

Розглянемо Модельні програми 7-9 класи НУШ. Математика.

Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.) (НУШ 2023 р.) [33] є важливим матеріалом для аналізу в контексті вивчення текстових задач в основній школі. Проаналізувавши цю програму, можна виділити наступні ключові моменти стосовно теми дослідження:

1. Програма побудована на засадах компетентнісного підходу. Серед ключових компетентностей, які мають розвиватися при вивченні алгебри, виділено математичну компетентність, яка передбачає вміння учнів складати й розв'язувати математичні та практичні задачі.

2. Важливим завданням навчання алгебри є вироблення вмінь виокремлювати проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів, моделювати процес і результат розв'язання задач. Це безпосередньо стосується роботи з текстовими задачами.

3. Зміст програми має практичну спрямованість. Весь курс пронизує розв'язування задач практичного змісту, пропонується використовувати різні види моделювання прикладних задач (вербальне, схематичне, табличне, графічне, символічне).

4. У програмі передбачені такі види навчальної діяльності як розв'язування задач, зокрема практичного змісту, що передбачають застосування вивчених математичних понять і методів, а також складання власних задач учнями.

5. Розв'язування текстових задач розглядається як математичний метод і застосовується при вивченні багатьох тем: рівнянь, систем рівнянь, функцій, нерівностей тощо. Текстові задачі виступають як засіб формування і закріплення нових математичних знань.

6. Підкреслюється важливість алгебраїчного методу розв'язування текстових задач. Учні мають навчитися переводити умову задачі на математичну мову у вигляді рівнянь, систем рівнянь, нерівностей тощо.

Таким чином, у цій модельній програмі приділена значна увага формуванню вмінь розв'язувати текстові задачі як важливої складової математичної компетентності. Розв'язування практичних задач розглядається як мета і як засіб навчання алгебри.

Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.) (НУШ 2023 р.) [34]. Можливо виокремити такі ключові моменти щодо вивчення текстових задач:

1. Програма передбачає розв'язування сюжетних (текстових) задач протягом усього курсу алгебри 7-9 класів. Зокрема, розв'язування сюжетних задач з використанням лінійних рівнянь та їх систем у 7 класі, квадратних рівнянь у 8 класі, систем рівнянь з двома змінними у 9 класі.

2. Значну увагу приділено математичному моделюванню - складанню рівнянь і їх систем за умовою сюжетної задачі. Математичними моделями задач виступають лінійні рівняння та їх системи, квадратні рівняння, системи рівнянь з двома змінними. Тобто учні вчаться перекладати умову задачі на математичну мову.

3. Сюжетні задачі мають практичну спрямованість, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями: рухом, роботою, сумішами і сплавами, відсотками, фінансовими розрахунками тощо. Вони покликані показати учням застосування алгебри в реальному житті.

4. Передбачено розв'язування задач різними способами, аналіз і інтерпретацію результатів з урахуванням умови задачі. Це розвиває критичне мислення та показує прикладну спрямованість алгебри.

5. У програмі відзначено можливості для інтеграції алгебри з іншими освітніми галузями під час розв'язування практико-орієнтованих сюжетних задач. Це дозволяє здійснювати міжпредметні зв'язки.

Отже, модельна програма О.С. Істер, як і попередньо проаналізовані програми, відводить важливу роль текстовим задачам у курсі алгебри 7-9 класу. Задачі носять прикладний характер, їх математичними моделями слугують різні види рівнянь та систем. Розв'язування задач допомагає розкрити міжпредметні зв'язки та практичну значущість алгебри.

Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авт. Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.) (НУШ 2023) [36]. Проаналізувавши зміст програми, можемо відзначити наступні ключові моменти щодо вивчення текстових задач:

1. Програма передбачає розв'язування сюжетних (текстових) задач протягом усього курсу математики 7-9 класів. Зокрема, розв'язування сюжетних задач з використанням лінійних рівнянь та їх систем у 7 класі, квадратних рівнянь у 8 класі, дробово-раціональних рівнянь та їх систем у 9 класі.

2. Значну увагу приділено математичному моделюванню - складанню рівнянь і їх систем за умовою сюжетної задачі. Математичними моделями задач виступають лінійні рівняння та їх системи, квадратні рівняння, дробово-раціональні рівняння. Тобто учні вчаться перекладати умову задачі на математичну мову.

3. Сюжетні задачі мають практичну спрямованість, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями. Зокрема, у 8-9 класах з'являються задачі фінансового змісту на відсотки, кредити, вклади тощо.

4. Розв'язування сюжетних задач тісно пов'язане з функціональною лінією курсу. Учні мають скласти математичну модель задачі у вигляді рівняння, системи рівнянь чи функції.

5. Передбачено розв'язування задач кількома способами, дослідження кількості розв'язків, перевірку, аналіз і інтерпретацію результатів з урахуванням умови задачі. Це розвиває математичне мислення і показує прикладну спрямованість математики.

6. У програмі запропоновано можливості для інтеграції математики з іншими освітніми галузями під час розв'язування практико-орієнтованих сюжетних задач.

Отже, дана модельна програма (авт. М. Васишин та ін.) приділяє велику увагу розв'язуванню сюжетних задач протягом усього курсу математики 7-9 класів. Задачі носять практичний характер, математичними моделями виступають різні види рівнянь. Через текстові задачі реалізуються внутрішньопредметні і міжпредметні зв'язки математики.

Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.) (НУШ 2023) [35]. Проаналізувавши надану модельну навчальну програму з геометрії для 7-9 класів у контексті вивчення текстових задач в основній школі можливо виділити основні підходи, які пропонуються програмою:

1. Програма наголошує на важливості застосування діяльнісного підходу до навчання геометрії, який передбачає постійне залучення учнів до

розв'язування математичних і практичних задач. Це сприяє розвитку вмінь моделювати, розв'язувати та критично оцінювати процес і результат розв'язання.

2. Серед загальних завдань математичної освіти для реалізації компетентнісного підходу програма виділяє розвиток умінь: виокремлювати проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; складати й розв'язувати текстові задачі, фабули яких стосуються різних галузей; використовувати математичні методи у життєвих ситуаціях.

3. У змісті програми передбачається розв'язування задач практичного змісту, основними функціями яких є ілюстрація застосування геометричних знань, розвиток логічного мислення учнів. Увесь курс пронизує розв'язування задач практичного змісту.

4. Програма рекомендує розширити коло прикладних задач, використовувати різні види моделювання прикладних задач (вербальне, схематичне, табличне, графічне, символічне). Також варто пропонувати учням не тільки розв'язувати тренувальні вправи, але й виконувати завдання за умовами сюжетних задач, застосовувати різні види моделювання.

5. Стосовно ціннісних орієнтацій, навчання має орієнтувати освітній процес на формування в учнів системи цінностей. Зокрема, варто розглядати задачі валеологічного, екологічного, фінансово-економічного, національно-патріотичного змісту тощо. Корисним також є складання таких задач учнями.

Отже, модельна програма з геометрії для 7-9 класів (авт.. М. Бурда та ін.) приділяє значну увагу застосуванню математичних моделей при розв'язуванні текстових задач, розвитку відповідних умінь учнів, використанню прикладних задач з різних галузей.

Таким чином за аналізом модельних програм НУШ за 2023 р. можливо зробити узагальнення та виділити основні тенденції навчання курсу алгебри та геометрії в основній школі:

1. Текстові задачі є наскрізною лінією і важливою складовою курсу математики в 7-9 класах. Вони розглядаються в темах, пов'язаних з рівняннями,

системами рівнянь, функціями, нерівностями тощо. Задачі виступають як засіб формування нових знань, їх закріплення та застосування.

2. У 7 класі учні починають систематично працювати з цілими виразами, рівняннями та функціями. Вони вчаться розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та їх системи, застосовувати рівняння до розв'язування текстових задач. Вивчаються лінійна функція, її графік та властивості. Також учні ознайомлюються з поняттям ймовірності випадкової події. На цьому етапі закладаються основи для подальшої роботи з текстовими задачами із застосуванням рівнянь та функцій.

3. У 8 класі відбувається розширення поняття числа до ірраціональних чисел, вивчаються квадратні корені та дійсні числа. Учні опановують розв'язування квадратних рівнянь та нерівностей, ознайомлюються з квадратичною функцією. Розглядаються системи рівнянь, у тому числі з двома змінними, де одне рівняння може бути другого степеня. Всі ці поняття застосовуються до розв'язування більш складних текстових задач. Також вивчаються елементи комбінаторики та статистики.

4. У 9 класі учні продовжують роботу з функціями, рівняннями та нерівностями, поглиблюючи свої знання та вміння їх застосовувати. Вивчаються нерівності з однією змінною, квадратичні нерівності. Важливим етапом є засвоєння поняття числової послідовності, арифметичної та геометричної прогресій. Ці нові математичні об'єкти дозволяють розв'язувати більш широке коло текстових задач. Крім того, дев'ятикласники повторюють і систематизують матеріал за весь курс алгебри основної школи, що сприяє формуванню цілісного уявлення про засвоєні поняття та їх застосування.

5. Основним методом розв'язування сюжетних задач в курсі алгебри є алгебраїчний метод, суть якого полягає у переведенні умови задачі на математичну мову у вигляді рівняння, системи рівнянь або нерівності. Цьому методу приділяється велика увага.

6. Програми пропонують використовувати різні види моделювання задач: вербальне, схематичне, табличне, графічне, символічне. Це допомагає учням краще зрозуміти умову задачі, побачити зв'язки між даними.

7. Більшість сюжетних задач мають практичний характер, показують зв'язок математики з реальним життям. Вони стосуються руху, спільної роботи, відсотків, фінансових розрахунків тощо. Через задачі показується практична значущість математики.

8. Геометричні задачі теж часто формуються як задачі практичного змісту. Їх розв'язування демонструє застосування геометричних знань на практиці, розвиває логічне і просторове мислення.

9. Програми орієнтують на розвиток в учнів умінь доводити твердження, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, моделювати ситуації, розв'язувати та складати задачі. Все це є компонентами математичної компетентності.

10. Варто відзначити виховний потенціал текстових задач через задачі екологічного, фінансового, патріотичного змісту тощо школярі засвоюють відповідні цінності.

Таким чином, текстові задачі відіграють велику роль у курсі математики 7-9 класів, вони є цілями, засобами, мотивацією навчання, сприяють формуванню математичної та ключових компетентностей.

Аналіз підручників з алгебри та геометрії для 7-9 класів основної школи показав, що в більш ранніх виданнях з геометрії 2015-2020 років [31; 32; 7; 48] не було виявлено згадок про необхідність та пояснень щодо застосування математичного моделювання для розв'язання текстових задач. Проте, починаючи з видань 2021 року, у деяких підручниках з геометрії з'являються відомості про використання математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач.

Одночасно у підручниках з алгебри, які були проаналізовані дуже широко представлено навчання математики та вирішення математичних задач засобами математичного моделювання [28; 26; 30; 5; 49; 18; 3; 29; 17].

Зокрема, у підручнику Бурда М., Тарасенкова Н. «Геометрія» (2021) [8], учням пропонується представити відповідь задачі у вигляді креативного рішення, наприклад, у вигляді паперового трикутника. Це свідчить про те, що автори підручника звертають увагу на важливість розвитку в учнів умінь моделювати геометричні об'єкти та ситуації.

Водночас, у підручнику Бевз Г., Бевз В. «Геометрія: Підручник для 8 класу» [6] міститься значна кількість змістовної інформації щодо застосування математичного моделювання в процесі вирішення текстових задач з геометрії. Автори підручника приділяють увагу формуванню в учнів умінь створювати математичні моделі геометричних задач, досліджувати їх та інтерпретувати отримані результати.

Автори наголошують на тому, що прямокутні трикутники часто використовуються як моделі реальних ситуацій, які існують у навколишньому світі. Вони пропонують учням досліджувати різні способи виконання завдань та готувати портфоліо з умовами задач, способами їх розв'язання та реальними моделями.

Зокрема, автори наводять приклад зменшеної моделі автомобіля, яка схожа на справжній автомобіль, але менша за розмірами. При цьому розміри моделі та реального автомобіля пропорційні. Аналогічно, якщо довжина моделі літака в 100 разів менша від довжини справжнього літака, то і довжина крила моделі має бути в 100 разів меншою від довжини крила справжнього літака.

Автори підручника звертають увагу учнів на важливість застосування математичного моделювання для дослідження та розв'язання практичних задач. Вони пропонують учням самостійно створювати математичні моделі реальних об'єктів і ситуацій, що сприяє розвитку в учнів умінь використовувати математику для дослідження навколишнього світу та усвідомленню ними практичної значущості геометрії.

В. Волошена відзначає, що в рамках традиційного викладання математики учні зазвичай стикаються з задачами, які вже сформульовано в термінології цієї науки. Це призводить до ситуації, коли, незважаючи на

навички розв'язування складних теоретичних задач, учні можуть зіткнутися з труднощами при спробах застосувати ці знання до вирішення простих практичних завдань через невміння переформулювати їх на математичну мову [12, с. 38].

Тим не менш, науковець підкреслює, що здатність застосовувати методи математичного моделювання є критичною для ефективної участі в житті сучасного суспільства. У ході роботи з прикладними завданнями учні набувають досвіду в математичному моделюванні, що допомагає їм освоїти ключові математичні концепції, усвідомити зв'язок між теорією та практикою та зрозуміти важливість навчання математиці [12, с. 38].

Враховуючи когнітивні та психічні особливості підлітків, які включають процеси сприйняття, обробки інформації, мислення, пам'яті, уваги, уяви та мовлення, А. Новіков надає рекомендації щодо навчання учнів різних вікових груп методам математичного моделювання [37, с. 18-19]:

На першому рівні (10 – 11 років) наголошується на застосуванні навчальних підходів, які спонукають до пізнавальної активності: важливо розвинути у дітей розуміння математичних моделей та навички їх конструювання. Ефективним буде застосування інтерактивних завдань із зображенням різних сценаріїв, до яких учні мають підібрати відповідні математичні моделі.

На другому рівні (12 – 13 років) доцільно використовувати групову роботу (наприклад, метод «навчаючи вчусь», проєктну діяльність) та ігрові форми уроків (конкурси, вікторини). На цьому етапі учні мають опанувати етапи математичного моделювання та вміти конструювати моделі для конкретних задач, таких як «Квадратична функція у архітектурі» або «Лінійна функція як модель прогнозування доходу», аналізуючи застосування теоретичних знань на практиці.

На третьому рівні (14 – 15 років) створюються умови для самостійного творчого вияву учнів. Ефективними будуть форми роботи, що передбачають написання науково-дослідницьких робіт та створення прикладних задач. Учні

цієї вікової групи систематизують свої знання про різні види математичних моделей та етапи їх моделювання, використовуючи ІКТ для їхньої розробки. Наприклад, можна організувати дослідницьку діяльність школярів спрямовану на створення інтерактивних плакатів за допомогою веб-інструментів або ведення тематичних блогів, а також розробку математичних моделей для аналізу динамічних процесів з використанням програмного забезпечення.

Для підвищення ефективності навчального процесу рекомендується застосовувати не тільки стандартні класні заняття, а й включати різноманітні методи та форми організації освітньої діяльності, такі як лекції, обговорення, дебати, рольові ігри, індивідуальні зустрічі, практичні та наукові роботи як в груповому, так і в індивідуальному форматі, проектування [12, с. 39]:

1. На заняттях ефективним буде застосування лекційної форми подачі матеріалу та проведення практичних та семінарських робіт.

2. Слід звернути увагу на креативні та дослідницькі методи навчання, такі як аналіз реальних кейсів, командна робота, створення та презентація проектів.

3. Заняття мають інтегрувати сучасні ІТ, що може включати використання комп'ютерів для підсумків вивчення кожної теми курсу.

4. Проведення лабораторних практикумів після завершення вивчення основних розділів допоможе узагальнити та повторити матеріал.

5. Як завершення елективного курсу учні можуть представити результати особистих досягнень, індивідуальні творчі роботи або групові проекти.

6. Для оцінювання результатів навчальної діяльності учнів доцільно організувати «круглі столи», презентації творчих робіт та проектів.

Таким чином, вивчення текстових задач у школі є важливим компонентом математичної освіти, оскільки воно допомагає учням розвивати навички читання, розуміння та аналізу інформації, а також застосовувати математичні знання до реальних життєвих ситуацій. Включення різноманітних текстових задач у шкільний курс математики сприяє розвитку критичного мислення, творчого підходу до розв'язування проблем та підготовці учнів до успішного використання математики в повсякденному житті.

Висновки до розділу 1

1. На основі результатів теоретичного дослідження можна зробити такі висновки: прикладні (текстові, сюжетні) задачі – це опис ситуації на звичайній мові, в якій потрібно знайти шукану величину, встановити наявність або відсутність певного співвідношення між величинами чи визначити вид цього співвідношення. Вони відіграють важливу роль у шкільному курсі математики, виконуючи навчальну, виховну, розвивальну, контролюючу функції. Розв’язування прикладних задач сприяє формуванню в учнів умінь застосовувати математичні знання на практиці, бачити значущість математики в реальному житті.

2. Математичне моделювання – це процес дослідження реальної системи, який включає створення математичної моделі цієї системи, вивчення моделі та перенесення одержаних результатів на реальну систему. Математична модель є сукупністю математичних об’єктів (чисел, змінних, векторів, множин тощо) і відношень між ними, яка адекватно описує властивості системи, що моделюється. У роботі також розкрито поняття змісту математичної моделі, методу математичного моделювання, компетентності та математичної компетентності, здатність до якої проявляється в умінні будувати математичні моделі.

3. Аналіз модельних навчальних програм з математики для 5-9 класів (2023 р.) показав, що текстові задачі є наскрізною змістовою лінією курсу. Вони використовуються як засіб формування і закріплення нових знань, відпрацювання вмінь і навичок, застосування математики в реальних ситуаціях. Вивчення текстових задач у 7-9 класах тісно пов’язане з формуванням таких предметних компетентностей, як уміння будувати і досліджувати математичні моделі. Основним методом розв’язування текстових задач є алгебраїчний (переклад умови задачі на мову рівнянь, систем рівнянь, нерівностей). У деяких проаналізованих підручниках, зокрема з алгебри значна увага приділяється задачам практичного змісту і застосуванню математичного моделювання.

РОЗДІЛ 2. МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ВМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ

2.1 Основні типи текстових задач

Текстові задачі в шкільному курсі математики можна класифікувати за різними критеріями, такими як тематика, рівень складності, методи розв'язування тощо. Розуміння основних типів текстових задач допомагає учням краще орієнтуватися в процесі їх розв'язування та застосовувати відповідні математичні моделі.

У шкільному курсі математики розглядаються різні типи текстових задач, які можна класифікувати за певними ознаками. Основними типами текстових задач є [40, с. 7] (рис. 2.1):

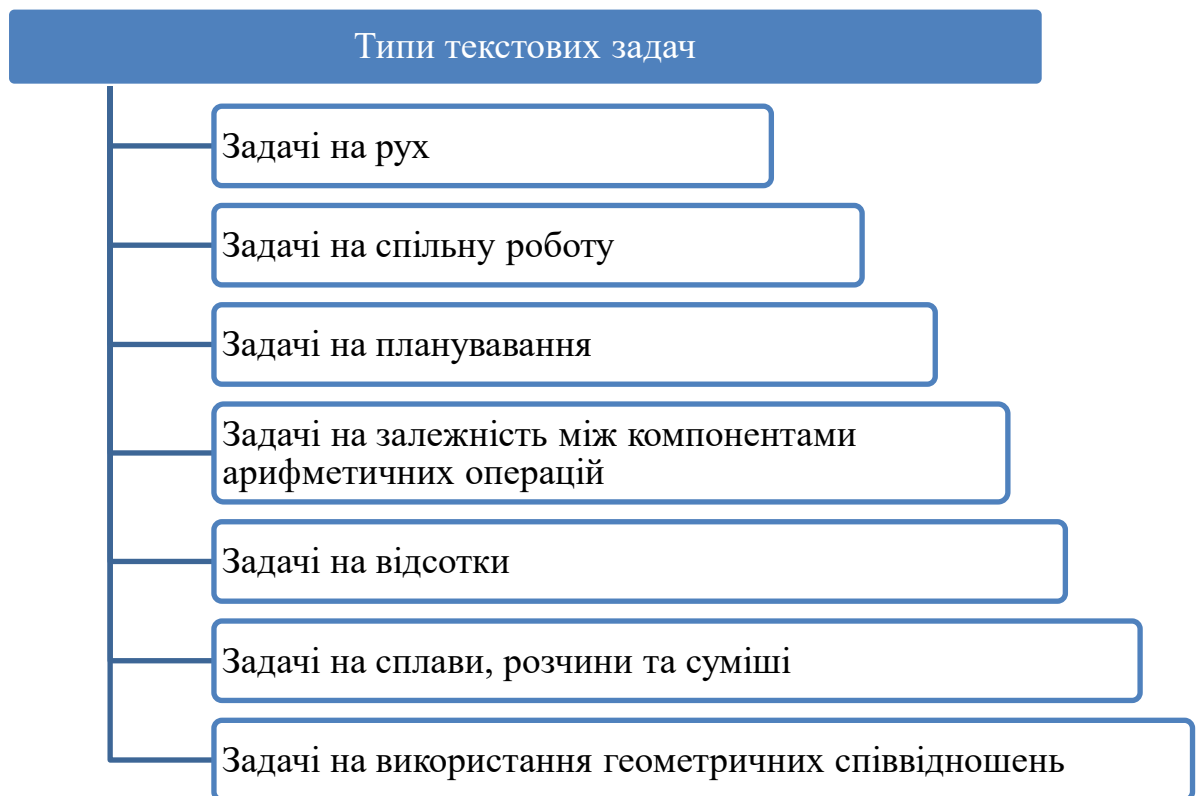


Рис. 2.1 Типи текстових задач

Розглянемо детальніше ці типи задач:

1. *Задачі на рух*

Задачі на рух є одними з найпоширеніших типів текстових задач у шкільному курсі математики. Вони описують рух об'єктів (пішоходів, транспортних засобів тощо) та взаємодію між ними. Основними величинами, які розглядаються в задачах на рух, є швидкість, час та відстань. Ці величини пов'язані між собою формулою: $\text{відстань} = \text{швидкість} \times \text{час}$

Задачі на рух можуть включати в себе:

- рух об'єктів в одному напрямку;
- назустріч один одному або в протилежних напрямках;
- по колу або з зупинками на шляху;
- задачі на рух по воді (за течією та проти течії);
- знаходження середньої швидкості руху тощо.

Для розв'язування задач на рух необхідно вміти аналізувати умову задачі, виділяти ключові дані та взаємозв'язки між ними, а також складати рівняння або системи рівнянь, що описують рух об'єктів.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на рух для 8-класів:

Задача 1. Відстань між двома містами становить 360 км. З першого міста в напрямку другого виїхав автомобіль зі швидкістю 80 км/год. Через 2 години після цього з другого міста назустріч йому виїхав інший автомобіль зі швидкістю 60 км/год. Через скільки годин після виїзду другого автомобіля вони зустрінуться?

Задача 2. Моторний човен пливе по озеру зі швидкістю 20 км/год. Через 3 години після початку руху він повертає назад і пливе зі швидкістю 15 км/год. Знайдіть відстань від початкової точки до місця, де човен розвернувся, якщо вся подорож тривала 7 годин.

2. *Задачі на спільну роботу*

Задачі на спільну роботу описують виконання певного обсягу роботи кількома виконавцями (людьми, механізмами тощо). Основними величинами в

таких задачах є продуктивність (швидкість виконання роботи) кожного виконавця та час, витрачений на виконання роботи.

У задачах на спільну роботу розглядаються ситуації, коли виконавці працюють разом або по черзі. Також можуть бути задачі, в яких потрібно визначити, за який час буде виконана робота, якщо змінюється кількість виконавців або їх продуктивність.

Для розв'язування задач на спільну роботу використовуються рівняння або системи рівнянь, що описують залежність між продуктивністю, часом та обсягом виконаної роботи. Також можуть застосовуватися формули для знаходження частини виконаної роботи кожним виконавцем.

Розв'язування задач на спільну роботу розвиває в учнів навички аналізу умови задачі, виділення ключових даних та побудови математичних моделей, що описують реальні ситуації.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі спільну роботу для 8-класів:

Задача 3. Бригада з трьох робітників може виконати замовлення за 12 днів. Після того, як вони працювали разом протягом 4 днів, один робітник захворів і решту роботи довелося виконувати двом робітникам. Скільки днів знадобилося двом робітникам, щоб завершити виконання замовлення?

Задача 4. Два насоси можуть наповнити басейн за 6 годин, працюючи разом. Перший насос, працюючи окремо, може наповнити басейн за 4 години швидше, ніж другий насос. За скільки годин кожен насос окремо може наповнити басейн?

Задачі 1-4 вимагають від учнів застосування знань з алгебри, зокрема складання рівнянь та систем рівнянь, а також навичок аналізу умови задачі та інтерпретації результатів.

3. Задачі на планування

Задачі на планування передбачають розподіл певних ресурсів (людей, коштів, матеріалів тощо) для виконання певної роботи або досягнення

поставленої мети. Такі задачі часто зустрічаються в реальному житті, наприклад, при плануванні виробництва, будівництва, організації заходів тощо.

У задачах на планування потрібно враховувати наявні ресурси, продуктивність виконавців, часові обмеження та інші фактори. Метою розв'язування таких задач є знаходження оптимального або раціонального способу використання ресурсів для досягнення найкращого результату.

Для розв'язування задач на планування використовуються різні математичні моделі, такі як лінійні рівняння, системи рівнянь, нерівності, цілочисельне програмування тощо. Також можуть застосовуватися методи оптимізації та теорії графів.

Розв'язування задач на планування розвиває в учнів навички аналізу складних ситуацій, побудови математичних моделей та прийняття рішень в умовах обмежених ресурсів.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на планування для 8-класів:

Задача 5. У шкільній бібліотеці є 200 книжок з математики та 150 книжок з фізики. Книжки з математики потрібно розмістити на 5 полицях, а книжки з фізики - на 3 полицях. На кожній полиці має бути однакова кількість книжок. Скільки книжок з математики та фізики буде на кожній полиці?

Задача 6. Для проведення шкільного фестивалю потрібно розмістити 120 учнів у 3 автобуси та 4 мікроавтобуси. В кожному автобусі має бути на 10 учнів більше, ніж у мікроавтобусі. Скільки учнів має бути в кожному автобусі та мікроавтобусі?

4. Задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій

Задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій базуються на властивостях чотирьох основних арифметичних дій: додавання, віднімання, множення та ділення. Вони допомагають учням краще зрозуміти взаємозв'язки між компонентами цих операцій та розвивають навички обчислювального мислення.

У таких задачах зазвичай відомі деякі компоненти арифметичної операції (наприклад, сума та один з доданків, або добуток та один з множників), і потрібно знайти невідомий компонент. Для розв'язування задач на залежність між компонентами арифметичних операцій використовуються властивості цих операцій та рівняння.

Наприклад, якщо відомі сума двох чисел та одне з цих чисел, то для знаходження другого числа потрібно від суми відняти відоме число. Або, якщо відомі добуток двох чисел та одне з цих чисел, то для знаходження другого числа потрібно добуток поділити на відоме число.

Розв'язування задач на залежність між компонентами арифметичних операцій сприяє розвитку в учнів логічного мислення, навичок аналізу умови задачі та застосування властивостей арифметичних операцій для знаходження невідомих величин.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на залежність між компонентами арифметичних операцій для 8-класів:

Задача 7. Сума двох чисел дорівнює 72. Якщо більше число зменшити на 8, а менше число збільшити на 3, то їх сума дорівнюватиме 67. Знайдіть ці числа.

Задача 8. Добуток двох чисел дорівнює 180. Якщо перше число збільшити на 2, а друге число зменшити на 3, то їх добуток дорівнюватиме 154. Знайдіть ці числа.

Задачі 5-8 мають сприяти розвитку в учнів навичок планування, розподілу ресурсів та розуміння залежностей між компонентами арифметичних операцій. Для їх розв'язання учням необхідно вміти проаналізувати умову задачі, скласти рівняння або систему рівнянь та інтерпретувати отримані результати.

5. Задачі на відсотки

Задачі на відсотки є дуже поширеними в повсякденному житті та часто зустрічаються в шкільному курсі математики. Вони пов'язані з розрахунками

частини від цілого, знаходженням цілого за його частиною або визначенням процентного відношення однієї величини до іншої.

Основними типами задач на відсотки є:

1. Знаходження відсотка від числа.
2. Знаходження числа за його відсотком.
3. Знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Для розв'язування задач на відсотки використовуються пропорції, рівняння або спеціальні формули. Наприклад, для знаходження відсотка від числа можна використати формулу:

$$(\text{Відсоток} \times \text{Число}) \div 100$$

Розв'язування задач на відсотки розвиває в учнів навички роботи з частками, десятковими дробами та пропорціями. Також вони сприяють формуванню фінансової грамотності, оскільки відсотки широко використовуються в банківській справі, економіці та повсякденному житті.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на відсотки для 8-класів:

Задача 9. Ціну на комп'ютер знизили на 15%, після чого він став коштувати 17 000 грн. Яка була початкова ціна комп'ютера?

Задача 10. У школі навчається 800 учнів: 60% з них займаються спортом, а 30% від тих, хто займається спортом, відвідують секцію з баскетболу. Скільки учнів школи відвідують секцію з баскетболу?

6. *Задачі на сплави, розчини та суміші*

Задачі на сплави, розчини та суміші передбачають роботу з речовинами, які складаються з декількох компонентів. Вони можуть описувати процеси змішування речовин з різними концентраціями, розведення розчинів, або розрахунки вмісту певного компонента в суміші.

У задачах на сплави розглядаються суміші металів з різним вмістом чистого металу. В задачах на розчини розглядаються суміші речовин (наприклад, солі та води) з різною концентрацією розчиненої речовини. Задачі на суміші можуть описувати змішування речовин з різними властивостями (наприклад, ціною або масою).

Для розв'язування задач на сплави, розчини та суміші використовуються рівняння або системи рівнянь, які описують залежність між масою, об'ємом, концентрацією або вартістю компонентів суміші.

Розв'язування таких задач розвиває в учнів навички аналізу умови задачі, побудови математичних моделей та роботи з різними величинами (маса, об'єм, концентрація, ціна). Також вони мають практичне значення, оскільки подібні розрахунки часто зустрічаються в хімії, фізиці та повсякденному житті.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на сплави, розчини та суміші для 8-класів:

Задача 11. Є два сплави міді та цинку. Перший сплав містить 70% міді, а другий – 50% міді. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти, щоб отримати 40 кг нового сплаву, який містить 60% міді?

Задача 12. У першому розчині концентрація солі становить 10%, а в другому – 30%. Скільки літрів кожного розчину потрібно взяти, щоб отримати 20 літрів розчину з концентрацією солі 20%?

Задачі 9-12 спрямовані на розвиток в учнів навичок роботи з відсотками. Вони вимагають від учнів вмінь аналізувати умову задачі, складати рівняння або систему рівнянь, а також інтерпретувати отримані результати в контексті реальних життєвих та майбутніх професійних ситуацій.

7. Задачі на використання геометричних співвідношень

Задачі на використання геометричних співвідношень поєднують в собі елементи геометрії та алгебри. Вони передбачають застосування геометричних властивостей фігур, формул для обчислення довжин, площ, об'ємів тощо в поєднанні з алгебраїчними методами розв'язування.

У таких задачах можуть розглядатися різні геометричні фігури: трикутники, чотирикутники, кола, многогранники, тіла обертання тощо. Для їх розв'язування потрібно знати основні властивості цих фігур, вміти застосовувати теореми та формули геометрії.

Задачі на використання геометричних співвідношень можуть включати в себе:

1. Знаходження довжин сторін, висот, діагоналей, радіусів тощо.
2. Обчислення площ та об'ємів фігур.
3. Розрахунки, пов'язані з подібністю трикутників.
4. Застосування тригонометричних функцій в прямокутному трикутнику.
5. Використання властивостей вписаних та описаних фігур.

Для розв'язування таких задач часто потрібно скласти рівняння або систему рівнянь, використовуючи геометричні співвідношення та алгебраїчні методи.

Наприклад, якщо в задачі потрібно знайти довжину сторони трикутника, можна скласти рівняння, використовуючи теорему Піфагора або тригонометричні функції. Або, якщо потрібно обчислити площу фігури, можна розбити її на простіші фігури, для яких відомі формули площі, та скласти алгебраїчні вирази.

Розв'язування задач на використання геометричних співвідношень розвиває в учнів просторове мислення, навички аналізу розміщення геометричних фігур та вміння застосовувати геометричні знання у поєднанні з алгебраїчними методами. Такі задачі мають широке практичне застосування в різних галузях, таких як архітектура, дизайн, інженерія тощо.

Наприклад, можна розглянути наступні задачі на використання геометричних співвідношень для 8-класів:

Задача 13. У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C відомо, що катет AB дорівнює 6 см, а гіпотенуза BC на 2 см довша за другий катет AC . Знайдіть площу трикутника ABC .

Задача 14. Основа рівнобедреної трапеції $ABCD$ дорівнює 12 см, а одна з бічних сторін – 5 см. Висота трапеції дорівнює 4 см. Знайдіть площу трапеції.

Ці задачі допомагають учням розвивати навички застосування геометричних співвідношень, зокрема теореми Піфагора та формул для обчислення площ фігур у поєднанні з алгебраїчними методами розв'язування рівнянь.

Відповідно до освітніх цілей, задачі можна класифікувати на тренувальні (які мають на меті відпрацювання вже відомих умінь та навичок) та розвиваючі (спрямовані на стимулювання креативного мислення) [15, с. 138]:

1. Тренувальні задачі характеризуються простотою змісту та натяками в тексті задачі, які допомагають у виборі математичної моделі. Ці задачі мають стати початковим кроком, що підготує учнів до освоєння систематичних методів математичного моделювання.

2. Ефективність розв'язання математичних задач зростає, коли в процесі навчання регулярно застосовуються задачі з розвиваючими характеристиками. Такі задачі включають дослідницький компонент або нестандартний підхід до формулювання завдань. Задачі з освітнім фокусом використовуються для знайомства з новими концепціями, формулами, теоремами, для відпрацювання вмінь у типових ситуаціях та для навчання методам розв'язування задач.

В. Волошена акцентує на важливості виділення універсальних методів дослідження та освітніх підходів як ключової мети сучасної методики викладання математики. Реалізація цієї задачі можлива через інтеграцію математичного моделювання в освітній процес, що підтверджується як теоретичним аналізом, так і практичним досвідом застосування такого підходу [10, с. 10].

Отже, знання основних типів текстових задач та вміння їх розпізнавати є важливими навичками для успішного розв'язування прикладних задач у шкільному курсі математики. Розуміння особливостей кожного типу задач допомагає учням обирати відповідні методи та математичні моделі для їх розв'язування, що сприяє розвитку логічного мислення та здатності застосовувати математичні знання в різноманітних ситуаціях.

2.2 Лінійне рівняння як математична модель

Лінійні рівняння є однією з найпростіших та найпоширеніших математичних моделей, які вивчаються учнями 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Вони допомагають учням зрозуміти зв'язок між змінними величинами та розвивають навички алгебраїчного мислення. Застосування лінійних рівнянь як математичних моделей для розв'язування прикладних задач сприяє розвитку вміння аналізувати реальні ситуації та перекладати їх на мову математики.

Лінійні рівняння є основоположними в математиці та їх застосування розповсюджене у різноманітних прикладних областях. У шкільному курсі алгебри для 7 класу лінійні рівняння використовуються для моделювання та розв'язування задач, що стосуються рівномірного руху, змішування речовин, розподілу витрат тощо. Ці задачі допомагають учням зрозуміти, як за допомогою математики можна описати та вирішити реальні життєві ситуації [28; 26; 30].

Один із основних етапів розв'язування задач за допомогою рівнянь — складання рівняння за умовою задачі, що, по суті, означає своєрідний переклад цієї умови на мову математики. Складене таким чином рівняння ще називають математичною моделлю даної задачі. Складання рівняння передбачає [28, с. 155]:

- 1) вибір основного невідомого і позначення його буквою;
- 2) вираження за допомогою цієї букви і даних у задачі чисел інших невідомих, про які йдеться в задачі;
- 3) утворення або відшукання двох виразів, які відповідно до умови задачі перебувають у відношенні «більше», «менше» або «дорівнює»;
- 4) запис цього відношення за допомогою рівності.

В підручнику надається приклад задачі та її розв'язання, який ілюструє застосування математичного моделювання учням 7 класу [28, с. 157]:

Задача 2. Швидкий поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість пасажирського, за 8 год проходить на 60 км більше, ніж пасажирський поїзд за 10 год. З якою швидкістю рухаються швидкий і пасажирський поїзди?

Розв'язання. Таблиця, в якій виражено дані в умові величини, може мати такий вигляд:

Поїзди	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
Швидкий	x	8	$8x$
Пасажирський	$x - 20$	10	$10(x - 20)$

З умови задачі випливає, що значення виразу $8x$ більше від значення виразу $10(x - 20)$ на 60.

Складемо рівняння: $8x - 60 = 10(x - 20)$.

Розв'яжемо його: $8x - 60 = 10x - 200$,

$$8x - 10x = 60 - 200,$$

$$2x = 140,$$

$$x = 70,$$

$$x - 20 = 70 - 20 = 50.$$

Відповідь. Швидкість пасажирського поїзда 50 км/год, а швидкого — 70 км/год.

А. Мерзляк, В. Полонський та М. Якір [30] надають наступний приклад та розв'язок текстової задачі для 7 класу за допомогою лінійного рівняння із побудовою математичних моделі, зауважуючи при цьому, що задачі, які надаються у цьому контексті побудовані з урахуванням реальних життєвих ситуацій [30, с. 197]:

ПРИКЛАД 1 Відстань між Києвом і Харковом дорівнює 450 км. З Києва до Харкова зі швидкістю x км/год виїхав автомобіль. Через 1 год назустріч йому з Харкова зі швидкістю y км/год виїхав другий автомобіль. Вони зустрілися через 2 год після виїзду другого автомобіля.

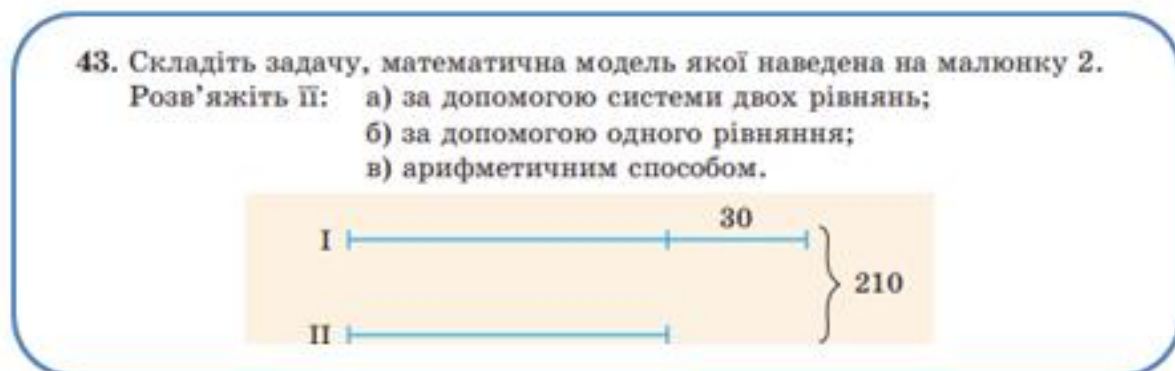
Побудуємо математичну модель цієї ситуації.

Шлях, пройдений другим автомобілем до зустрічі, дорівнює $2y$ км. Оскільки перший автомобіль перебував у дорозі на 1 год більше, ніж другий, тобто 3 год, то до зустрічі він проїхав $3x$ км. Разом автомобілі проїхали 450 км.

$$\text{Звідси } 3x + 2y = 450.$$

Ця рівність із двома змінними є математичною моделлю описаної вище реальної ситуації. ●

Автори підручника з алгебри для 8 класу (Г. Бевз та А. Бевз) [5] пропонують самостійну роботу для учнів зі складання лінійних рівнянь – розробити задачу за малюнком [5, с. 15]:



Таким чином, вивчення лінійних рівнянь як математичних моделей є важливим етапом у навчанні математики учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Воно закладає основи для подальшого вивчення більш складних математичних моделей та розвиває навички застосування математичних знань до реальних життєвих ситуацій.

2.3 Квадратні рівняння як математична модель

Квадратні рівняння є більш складними математичними моделями порівняно з лінійними рівняннями та входять у програму навчання 8-9 класів основної школи. Цей розділ математики дозволяє учням глибше зрозуміти нелінійні зв'язки між величинами та вдосконалити здатності до аналізу та вирішення рівнянь вищого порядку. Використання квадратних рівнянь у якості математичних моделей підтримує розвиток вмінь конструювати та тлумачити графічні зображення функцій.

У навчальному посібнику Г. Бевза «Алгебра для 9 класу» [3] підкреслюється, що такі математичні поняття, як «нерівність», «квадратична функція» та «числова послідовність», відіграють ключову роль у вивченні

реальних відносин та явищ. Вони лежать в основі багатьох сучасних наукових методів і використовуються для аналізу різноманітних природних та соціальних процесів. Алгебра стає універсальною мовою для різних сфер знань, сприяючи розвитку міждисциплінарних зв'язків і застосуванню математики в широкому діапазоні професійних областей, від соціології до музики [3, с. 3].

Вивчення навколишнього світу через математичні моделі починається з освоєння учнями основних характеристик та властивостей функцій. Здатність користуватися функціями як математичними моделями значно спрощує аналіз і розуміння реальних процесів та явищ [3, с. 85]. Функція, як зауважують автори є зручною математичною моделлю [3, с. 73]:

Функція — зручна математична модель для дослідження багатьох процесів. Вивчення різноманітних явищ і процесів за допомогою функцій — один з основних методів сучасної науки. Функція, яку можна задати формулою $y = ax^2 + bx + c$, — квадратична. Її графік — парабола. Такі функції часто використовують в різних галузях науки. Вони пов'язані з квадратними рівняннями і нерівностями.

Квадратні рівняння та їх властивості розглядаються у підручнику «Алгебра для 9 класу» (О. Істер) [17] у контексті вивчення квадратичних функцій. Частина, що описує квадратичні функції, розпочинається з параграфу №8, де обговорюються основні властивості квадратичної функції, зокрема вигляд її графіка, вершина параболи та осі симетрії. Особлива увага приділяється аналізу квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$ та її впливу на форму та положення графіка. Вивчення квадратних рівнянь в контексті їхнього застосування до розв'язування практичних задач можна знайти в параграфі №13 даного підручника з алгебри [17, с. 125].

А ще раніше... Ще в давньовавильонських текстах, які датуються III–II тисячоліттями до н. е., траплялося чимало задач, що зводилися до систем рівнянь другого степеня. Ось одна з них.

Задача. Площі двох своїх квадратів я склав і отримав $25\frac{5}{12}$. Сторона другого складає $\frac{2}{3}$ від сторони першого і ще 5. Знайти сторони цих квадратів.

Система рівнянь до задачі в сучасних записах матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Для її розв'язування автор підносить до квадрата ліву й праву частини другого рівняння:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

та підставляє знайдене значення виразу y^2 у перше рівняння:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}.$$

Далі автор розв'язує це рівняння, знаходить x , а потім y . Діофант, не маючи позначень для кількох невідомих, під час розв'язування задачі обирав невідому величину так, щоб звести розв'язування системи до розв'язування єдиного рівняння.

Отже, вивчення квадратних рівнянь як математичних моделей є важливим кроком у розвитку математичних навичок учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Воно розширює їх розуміння залежностей між змінними величинами та готує до вивчення більш складних математичних моделей у старших класах.

2.4 Дробово-раціональне рівняння як математична модель

Дробово-раціональні рівняння є ще одним типом математичних моделей, які вивчаються учнями 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Вони допомагають

учням розвивати навички роботи з раціональними виразами та розуміти їх властивості. Застосування дробово-раціональних рівнянь як математичних моделей для розв'язування прикладних задач сприяє розвитку вміння аналізувати та спрощувати складні математичні вирази.

Дробово-раціональні рівняння виступають як ефективний інструмент для математичного моделювання різноманітних задач. Наприклад, однією з таких задач є визначення часу, який потрібен для досягнення певної цілі при різних швидкостях або визначення кількості матеріалу, необхідного для виробництва різних продуктів за різних умов. Розв'язання таких задач передбачає складання дробово-раціональних рівнянь, які описують взаємозв'язки між змінними в умові задачі.

Прикладом може слугувати завдання з підручника «Алгебра для 8 класу» (А. Мерзляк та ін.) [29], де учнів просять знайти час, за який два різні автомобілі подолають однакову відстань при різних швидкостях. У таких задачах створюється математична модель у вигляді дробово-раціонального рівняння, де час є змінною, яку потрібно знайти. Розв'язання цього рівняння дозволяє отримати необхідний час [29, с. 46-47].

Розглянемо таку задачу. Автомобіль, проїхавши 180 км шляху, збільшив швидкість на 10 км/год і решту 210 км проїхав за той самий час, що й першу частину шляху. Знайдіть початкову швидкість автомобіля.

Нехай x км/год — шукана швидкість. Тоді швидкість автомобіля на другій частині шляху дорівнює $(x + 10)$ км/год. Автомобіль подолав першу частину шляху за $\frac{180}{x}$ год, а другу — за $\frac{210}{x+10}$ год.

Рівняння $\frac{180}{x} = \frac{210}{x+10}$ є математичною моделлю розглянутої реальної ситуації. Обидві частини отриманого рівняння є раціональними виразами.

Ця інформація підкреслює значення дробово-раціональних рівнянь у формуванні навичок математичного моделювання учнів, їх здатності

застосовувати математичні знання для аналізу і розв’язання реальних життєвих ситуацій.

Таким чином, вивчення дробово-раціональних рівнянь як математичних моделей є важливим етапом у навчанні математики учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Воно поглиблює їх розуміння раціональних виразів та готує до вивчення більш складних математичних моделей, які використовуються в алгебрі та геометрії.

2.5 Системи рівнянь як математична модель

Системи рівнянь використовуються як ефективний засіб математичного моделювання у середніх класах шкіл. Ці інструменти забезпечують можливість одночасного опису та аналізу відносин між декількома змінними. Залучення систем рівнянь у якості математичних моделей для вирішення практичних задач стимулює розвиток умінь аналізувати комплексні ситуації та здатності формувати та розв’язувати відповідні системи рівнянь.

У навчальному посібнику «Алгебра для 9 класу» авторства Н. Тарасенкової та ін. [49] глибше розглядаються прикладні задачі, які виходять за межі математики і розв’язуються з її допомогою. Такі задачі стосуються реальних ситуацій із життя. Для розв’язання поставлених запитань важливо переформулювати умови та цілі задачі на математичну мову, створивши відповідну математичну модель. Під математичною моделлю розуміється представлення реального процесу за допомогою математичних інструментів. Процес створення такої моделі задачі є суттю математичного моделювання. Робота з математичною моделлю включає в себе наступні кроки:

- розробка математичної моделі;
- аналіз та робота з моделлю;
- формулювання відповіді на поставлене питання, виходячи з контексту задачі.

Наприклад, розглядається ситуація [49, с. 152-153]:

Ситуація. У яблуневому саду на прямокутній ділянці землі посадили нові дерева, причому виявилось, що кількість рядів на 2 більша, ніж кількість дерев у ряді. Скільки рядів у новому саду й по скільки дерев посаджено в кожному ряді, якщо всього посадили 255 дерев?



На першому етапі побудуємо математичну модель ситуації, яку ми розглядаємо, у вигляді системи відповідних рівнянь. Для цього необхідно ввести змінні x і y .

Нехай у саду посадили x рядів по y яблунь у кожному ряді. За умовою, кількість рядів на 2 більша, ніж кількість дерев у ряді. Складаємо перше рівняння: $x - y = 2$.

Також за умовою відомо, що всього посадили 255 яблунь. Складаємо друге рівняння: $xy = 255$. Одержали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 255. \end{cases}$$

На другому етапі розв'язуємо систему рівнянь.

У першому рівнянні виразимо змінну x через змінну y :

$$x = y + 2.$$

Одержаний вираз $y + 2$ підставимо замість x у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} x = y + 2, \\ (y + 2) \cdot y = 255. \end{cases}$$

Відтак друге рівняння системи містить лише одну змінну y . Розв'яжемо його:

$$y^2 + 2y - 255 = 0, \\ D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-255) = 4 + 1020 = 1024,$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{-2 \pm 32}{2}.$$

Звідси $y_1 = 15$ і $y_2 = -17$.

Значення $y_2 = -17$ не задовольняє умову задачі, бо кількість яблунь у ряді не може бути від'ємним числом.

Тому в рівність $x = y + 2$ замість y підставимо лише значення 15. Одержимо: якщо $y = 15$, то $x = y + 2 = 15 + 2 = 17$.

На третьому етапі складаємо відповідь до задачі.

Одержали, що $x = 17$ і $y = 15$. Отже, у саду посадили 17 рядів по 15 яблунь у кожному ряді.

Цей підхід не тільки сприяє розумінню абстрактних математичних концептів, але й підкреслює практичне значення алгебри у вирішенні проблем реального світу. Таким чином, вивчення систем рівнянь розвиває навички критичного мислення та аналітичні здібності учнів, підготовлюючи їх до застосування цих знань у майбутньому.

Прикладом може слугувати завдання з підручника «Алгебра для 7 класу» (Ю. Мальований) [28]. Навчальний матеріал детально описує використання систем лінійних рівнянь для вирішення різноманітних задач, показуючи важливість створення математичної моделі у формі системи рівнянь як інструмента для вирішення складних проблем. Цей процес вчить учнів формувати та застосовувати системи рівнянь для детального аналізу та розв'язання задач, які виникають у реальному житті. В підручнику зазначено, що процес розв'язування задач за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними включає розробку математичної моделі у вигляді системи рівнянь, подальше вирішення цієї системи та інтерпретацію отриманих результатів [28, с. 203-204].

Задача 2. Периметр прямокутника дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 4 см довша від другої.

Розв'язання.

За допомогою рівняння з однією змінною	За допомогою системи рівнянь з двома змінними
x см — довжина більшої сторони прямокутника; $(x - 4)$ см — довжина меншої сторони; $40 : 2 = 20$ (см) — півпериметр прямокутника. Рівняння: $x + x - 4 = 20$, $2x - 4 = 20$, $2x = 24$, $x = 12$; $x - 4 = 12 - 4 = 8$. Відповідь. 12 см і 8 см.	x см — довжина більшої сторони прямокутника; y см — довжина меншої сторони; $40 : 2 = 20$ (см) — півпериметр прямокутника. Система рівнянь: $+ \begin{cases} x + y = 20, \\ x - y = 4; \end{cases}$ $\hline 2x = 24,$ $x = 12$; $12 + y = 20, y = 8$. Відповідь. 12 см і 8 см.

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними та їх застосування в текстових та прикладних задачах розглядаються у параграфі №14 підручника «Алгебра для 9 класу» (О. Істер) [17]. У цій частині підручника демонструється, як системи рівнянь можуть слугувати основою для створення математичних моделей, що дозволяють розв'язувати складніші задачі, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями [17, с. 131]. Автори пропонують до розгляду найпростіший приклад, де система рівнянь з двома змінними слугує математичною моделлю текстової задачі:

Задача 1. Сума двох чисел дорівнює 8, а їх добуток 15. Знайти ці числа.

Розв'язання. Позначимо невідомі числа через x і y . Тоді $x + y = 8$; $xy = 15$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язавши систему (зробіть це самостійно), матимемо $x = 3$; $y = 5$ або $x = 5$; $y = 3$.

Отже, числа, які ми шукали, це 3 і 5.

Відповідь. 3 і 5.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі наступні в цьому параграфі, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною.

Система рівнянь з двома змінними може бути математичною моделлю прикладної задачі. Нагадаємо, що прикладні задачі – це задачі, що містять нематематичні поняття, але можуть бути розв'язані методами математики.

Системи лінійних рівнянь використовуються для моделювання та вирішення реальних задач. Наприклад, може бути представлена ситуація, де необхідно вирішити проблему, пов'язану з плануванням бюджету, розподілом ресурсів або аналізом змінних факторів у науковому експерименті. Учні вчать розробляти систему рівнянь на основі даної задачі, представляючи кожну умову задачі окремим рівнянням. Далі вони використовують методи розв'язування систем рівнянь, такі як метод підстановки або метод додавання, для знаходження розв'язку задачі.

Отже, вивчення систем рівнянь як математичних моделей є важливим етапом у навчанні математики учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Воно розвиває їх здатність аналізувати та моделювати складні реальні ситуації, а також закладає основи для подальшого вивчення математичних моделей та їх застосування в різних галузях науки та техніки.

2.6 Нерівності як математична модель

Нерівності є ще одним важливим типом математичних моделей, які вивчаються учнями 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Вони дозволяють описувати та аналізувати обмеження та граничні значення змінних величин. Застосування нерівностей як математичних моделей для розв'язування прикладних задач сприяє розвитку навичок аналізу та інтерпретації умов задачі, а також вміння будувати та розв'язувати нерівності.

Автори підручника «Алгебра для 9 класу» (Н. Тарасенкова та ін.) [49] пропонують такі підходи до навчання теми «Нерівності зі змінною» за допомогою розв'язання текстових задач та застосування з цією метою математичного моделювання у 9 класі [49, с. 18-19]:

Ситуація. Шкільній їдальні потрібно закупити на тиждень 12 кг гречки. Для покупки виділено 400 грн. Як визначити найбільшу ціну гречки, за якою можна придбати потрібну масу крупи?

Ви знаєте, що ціна гречки коливається залежно від виробника й націнок, які встановлює торговельна установа. У термінах математики це означає, що ціна 1 кг гречки є *змінною*. Позначимо її x . Тоді вартість гречки, яку необхідно придбати для їдальні на тиждень, дорівнює $12x$. Отже, математичною моделлю ситуації, яку ми розглядаємо, є нерівність:

$$12x \leq 400.$$

В одержаній нерівності x — змінна, тому таку нерівність називають *нерівністю зі змінною*. Якщо замість x підставити, наприклад, число 30, то одержимо правильну числову нерівність: $12 \cdot 30 < 400$, оскільки $360 < 400$. Тому число 30 є *розв'язком* даної *нерівності*. Якщо ж замість x ми підставимо число 40, то одержимо неправильну числову нерівність: $12 \cdot 40 > 400$, оскільки $480 > 400$. Тому число 40 не є розв'язком даної нерівності. Інакше можна сказати: число 30 *задовольняє* нерівність $12x \leq 400$, а число 40 — не задовольняє її.

У підручнику Г. Бевза «Алгебра для 9 класу» [3] зазначається, що ефективність використання нерівностей для відтворення реальних обставин і процесів, зокрема для ілюстрації порівняльних відношень таких як більше/менше, довше/коротше та інші. Нерівності займають ключове місце у аналізі функцій, зокрема у визначенні їх максимальних і мінімальних значень на певному інтервалі, а також у визначенні інтервалів зростання та спадання функцій. У підручнику приведено цікавий приклад, який демонструє ці аспекти [3, с. 7-9]:

Нерівність — абстрактна математична модель відношень менше — більше, нижче — вище, коротше — довше, вужче — ширше, тонше — товстіше, дешевше — дорожче, молодше — старше та багатьох інших. Крім знаків $<$ (менше) і $>$ (більше) часто використовують також знаки: $\leq$ — менше або дорівнює (не більше), $\geq$ — більше або дорівнює (не менше).

Запис $a \leq b$ означає, що $a < b$ або $a = b$

Запис $a \geq b$ означає, що $a > b$ або $a = b$

Повсякчас ми щось порівнюємо: швидкості інтернету, вартості проїзду, діагоналі моніторів, висоти споруд, результати змагань, кількості балів ЗНО тощо. Математичною моделлю відношень «більше» і «менше» є нерівність. Наприклад, відстань від Києва до Харкова ($d_1 = 407$ км) більша, ніж відстань від Києва до Луцька ($d_2 = 368$ км). Це записують так:
 $407 > 368$ або $d_1 > d_2$.

Таким чином, вивчення нерівностей як математичних моделей є важливим компонентом навчання математики учнів 8-9 класів загальноосвітніх закладів. Воно розширює їх розуміння обмежень та граничних значень змінних величин, а також розвиває навички застосування математичних знань до реальних життєвих ситуацій. Знання нерівностей є фундаментом для подальшого вивчення оптимізаційних задач та інших складних математичних моделей.

Висновки до розділу 2

1. У другому розділі магістерської роботи проаналізовано основні типи текстових задач та підходів до їх вивчення в школі показав, що найбільш поширеними є задачі на рух, роботу, відсотки, суміші і сплави, геометричні співвідношення тощо. Кожен тип задач має свої особливості та вимагає застосування відповідних математичних моделей. Також проаналізовано застосування математичних моделей при розв'язуванні текстових задач у 7-9 класах, зокрема лінійні, квадратні, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь та нерівності на основі аналізу змісту шкільних підручників з алгебри та зроблено такі висновки:

2. Лінійні рівняння є найпростішим типом математичних моделей, з якими учні починають ознайомлюватись у 7 класі. Вони використовуються для опису процесів, що відбуваються з постійною швидкістю, та дозволяють розв'язувати широкий спектр практичних задач. У підручниках з алгебри для 7-8 класів наведено приклади побудови лінійних моделей реальних ситуацій та їх розв'язування.

3. Квадратні рівняння вивчаються у 8-9 класах та використовуються для моделювання процесів, описаних нелінійними залежностями. У підручниках показано зв'язок квадратних рівнянь з квадратичною функцією та наведено приклади їх застосування до розв'язування прикладних задач.

4. Дробово-раціональні рівняння розглядаються як засіб моделювання складніших залежностей між величинами, зокрема обернених пропорційних залежностей. У підручниках для 8-9 класів подано приклади застосування дробово-раціональних рівнянь до розв'язування текстових задач на рух, спільну роботу тощо.

5. Системи рівнянь дозволяють моделювати ситуації, в яких є кілька невідомих величин, між якими існують певні залежності. У підручниках для 8-9 класів значну увагу приділено задачам на складання систем рівнянь як математичних моделей текстових задач.

6. Нерівності доповнюють апарат математичного моделювання, дозволяючи врахувати обмеження на шукані величини. У підручниках з алгебри для 9 класу показано приклади застосування нерівностей до розв'язування прикладних задач з параметрами.

Загалом, аналіз змісту підручників показав, що в основній школі певним чином приділяється увага формуванню в учнів умінь будувати та досліджувати математичні моделі в процесі розв'язування текстових задач. Автори підручників пропонують систему задач практичного змісту, у деяких підручниках представлені методичні рекомендації щодо навчання учнів математичного моделювання, розглядаються задачі практичного змісту, пов'язані з реальними життєвими ситуаціями, що демонструють значущість математики. Однак автори підручників не пропонують широкий ряд різноманітних методичних прийомів та рекомендації щодо організації навчальної діяльності учнів, спрямованої на оволодіння методом математичного моделювання.

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА СИСТЕМИ ЗАДАЧ НА ТЕМУ «НЕСТАНДАРТНІ ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ»

За результатами теоретичного дослідження та аналізу моделей формування в учнів вмінь математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач вважаємо за потрібне розробити систему текстових задач для учнів 8-9 класів з умовою використання математичних моделей як ефективного засобу опанування учнями навчального матеріалу з математики та набуття вмінь розв'язання складних математичних задач та застосування цих знань та навичок у реальному житті.

Мета розробки системи задач на тему «Нестандартні текстові задачі» полягає у формуванні в учнів 8-9 класів умінь математичного моделювання, розвитку їхнього логічного мислення, аналітичних здібностей та творчого підходу до розв'язування прикладних задач, а також у демонстрації практичної значущості математики для розв'язування реальних життєвих проблем.

Завдання розробки системи текстових задач:

1. Закріпити та поглибити знання учнів з різних розділів шкільного курсу математики (алгебри, геометрії, відсотків, пропорцій тощо) через розв'язування нестандартних текстових задач.
2. Розвинути в учнів уміння будувати математичні моделі реальних процесів і ситуацій, переходити від словесного опису задачі до її математичного формулювання.
3. Ознайомити учнів з різними типами математичних моделей (лінійні рівняння, квадратні рівняння, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь, нерівності тощо) та їх застосуванням до розв'язування прикладних задач.
4. Розвинути в учнів навички аналізу умови задачі, виділення істотних зв'язків між даними, пошуку додаткової інформації, необхідної для розв'язування задачі.

5. Сформувати в учнів уміння інтерпретувати результати розв'язування задачі в контексті вихідної проблеми, оцінювати їх реалістичність та практичну значущість.
6. Розвинути в учнів навички критичного мислення, вміння аргументувати свою точку зору, обґрунтовувати вибір математичної моделі та методу розв'язування задачі.
7. Продемонструвати учням міжпредметні зв'язки математики з іншими науками (фізикою, хімією, біологією, географією тощо) та її роль у розв'язуванні реальних життєвих проблем.
8. Підвищити інтерес учнів до вивчення математики, показати її практичну значущість та роль у розвитку логічного мислення, аналітичних здібностей, творчого потенціалу особистості.
9. Сприяти розвитку в учнів навичок самостійної роботи, вміння планувати свою діяльність, розподіляти час, доводити розпочату справу до завершення.
10. Створити умови для організації групової та проєктної діяльності учнів, розвитку їхніх комунікативних навичок, вміння працювати в команді, аргументувати свою позицію та приймати точку зору інших.

Потрібно зауважити також, що на відміну від учнів початкових класів, які лише починають знайомство з простими задачами на знаходження суми, учні 8-9 класів вже мають значний досвід роботи з різноманітними типами текстових задач. Однак, як показує аналіз, проведений у попередніх розділах, навіть на цьому етапі навчання учні часто стикаються з труднощами при розв'язуванні нестандартних текстових задач, що вимагають більш глибокого аналізу умови, побудови адекватної математичної моделі та творчого підходу до пошуку розв'язку.

Саме тому ми вважаємо за доцільне розробити систему нестандартних текстових задач для учнів 8-9 класів, які б не лише сприяли закріпленню та поглибленню їхніх знань з різних розділів шкільного курсу математики, а також розвивали їх вміння математичного моделювання, логічного мислення, аналізу

та синтезу інформації, а також демонстрували б практичну значущість математики для розв'язування реальних життєвих проблем.

Таким чином, розроблена у цьому розділі роботи система нестандартних текстових задач стане корисним інструментом для вчителів математики у їхній роботі з учнями 8-9 класів, сприятиме підвищенню інтересу учнів до вивчення предмету та розвитку їхніх математичних компетентностей, а також допоможе учням усвідомити роль математики у розв'язуванні реальних життєвих проблем.

Далі ми пропонуємо добірку нестандартних текстових задач для учнів 7-9 класів, розроблених з урахуванням зазначених вище принципів та розподілених за основними типами математичних моделей, що використовуються для їх розв'язування.

Пропонуємо приклади задач для застосування учнями математичних моделей в процесі вивчення лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь та систем рівнянь, а також нерівностей.

Використовуємо різні типи задач: задачі на рух, на спільну роботу, планування, на відсотки, задачі на суміші та сплави, геометричні співвідношення. Приклади розв'язання задач 1-10 представлені у Додатку А. Приклади розв'язання задач 11-20 представлені у Додатку Б.

Задача 1 – рух по колу

Два тіла рухаються по колу рівномірно в один бік. Перше тіло проходить коло за 2 секунди швидше другого і доганяє друге тіло кожні 12 секунд. За який час тіло, швидкість якого менша, проходить коло?

Задача 2 – рух з постійною швидкістю

Перший велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше, ніж другий, тому на шляху 120 км він витрачає на 2 год. більше, ніж другий. Знайти швидкість другого велосипедиста.

Задача 3 – рух зі зміною швидкості

Мотоцикліст затримався біля шлагбаума на 24 хв. Збільшивши після цього свою швидкість на 10 км год. він надолужив спізнення на перегоні 80 км. Визначити швидкість мотоцикліста до затримки.

Задача 4 – зустрічний рух

Два пішоходи вирушають одночасно назустріч один одному із пунктів А і В. відстань між якими 10 км, і зустрічаються через годину. Потім вони продовжують подорож з незмінною швидкістю, причому перший прибуває до пункту А на 50 хв раніше, ніж другий до В. Знайти швидкість першого пішохода.

Задача 5 – рух в перпендикулярних напрямках

Із порту одночасно вийшли два теплоходи, причому перший з них пішов на південь, а другий на схід. Через 2 год відстань між ними становила 174 км. Знайти середню швидкість першого теплохода, коли відомо, що він проходив в середньому за кожну годину на 3 км більше, ніж другий.

Задача 6 – рух з прискоренням

Відстань між точками А і В дорівнює 117 м. Із цих точок одночасно почали рухатись два тіла назустріч одне одному. За першу хвилину одне із них пройшло 1 м. а кожну наступну воно проходило на одна друга м. більше, ніж за попередню. Друге тіло проходило за кожну хвилину по 6 м. Через скільки хвилин тіла зустрінуться?

Задача 7 – показує застосування систем рівнянь до розв'язування задач на числа

Дано два двоцифрових числа, які задовольняють наступні умови. Якщо число А написати попереду запису числа В, отримане чотирицифрове число розділити на В, то в частці вийде 121. Якщо ж число В написати попереду числа А і отримане чотирицифрове число розділити на А, то в частці вийде 84 і в остачі 14. Знайдіть добуток даних чисел.

Задача 8 – ілюструє використання лінійних рівнянь для розв'язування задач на концентрацію речовини

Із бака, наповненого чистим спиртом, вилили частину спирту і доповнили тією ж кількістю води. Потім із бака вилили стільки ж літрів суміші, тоді в баці залишилось 49 л чистого спирту. Місткість бака 64 л. Скільки спирту вилили другого разу?

Задача 9 – задача з двома змінними

В посудині було 10 літрів соляної кислоти. Частину її відлили і посудину доповнили такою ж кількістю води. Потім знову відлили таку ж кількість суміші і доповнили посудину такою ж кількістю води. Скільки літрів відливали кожного разу, якщо в результаті в посудині виявився 64% розчин соляної кислоти?

Задача 10 – задача демонструє застосування дробово-раціональних рівнянь до розв'язування задач на концентрацію речовини з двома змінними

Посудина у 20 л заповнена спиртом. Із неї виливають деяку кількість спирту у другу, рівну їй, та. доповнивши решту частини другої посудини водою, доповнюють цією сумішшю першу посудину. Потім з першої відливають $6\frac{2}{3}$ л у другу, після чого в обох посудинах міститься однакова кількість спирту. Скільки відлито спирту з першої посудини у другу на початку?

Задача 11 – показує застосування математичних моделей до розв'язування задач на сплави

Є два сплави, які містять цинк, мідь і олово. Відомо, що перший сплав містить 40% олова, а другий - 26% міді. Процентний вміст цинку в першому і другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, отримали новий сплав, в якому виявилось 30% цинку. Скільки олова міститься в отриманому новому сплаві?

Задача 12 – ілюструє використання систем рівнянь для моделювання задач на сплави

Від двох шматків сплавів з різним процентним вмістом свинцю масою 6 кг і 12 кг відрізали по шматку рівної маси. Кожен з відрізаних шматків

сплавили з залишком іншого сплаву, після чого процентний вміст свинцю в обох сплавах став однаковим. Які маси відрізаних шматків?

Задача 13 – задача на використання квадратних рівнянь

До басейну проведено дві труби, одна постачає воду, а друга опорожнює басейн. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год довше, ніж через другу опорожнюється. При заповненому на $\frac{1}{3}$ басейні були відкриті дві труби разом і басейн опинився порожнім через 8 годин. За скільки годин перша труба наповнює басейн?

Задача 14 – демонструє використання дробово-раціональних рівнянь для моделювання наповнення басейну з двома трубами

О 13 год в басейн почали вливати воду через одну трубу, щоб заповнити його до 16 год наступного дня. Через деякий час включили ще одну таку ж трубу для того, щоб наповнити басейн до 12 години. О котрій годині включили другу трубу?

Задача 15 – демонструє використання систем рівнянь для моделювання спільної роботи

Двом робітникам було доручено виготовити партію однакових деталей. Після того, як перший пропрацював 7 год, а другий - 4 год, виявилось, що вони виконали $\frac{5}{9}$ усієї роботи. Пропрацювавши разом ще 4 год, вони встановили, що їм залишилось виконати ще $\frac{1}{18}$ усієї роботи. На скільки годин більше витрачає другий робітник, працюючи окремо, порівняно з першим для виконання всієї роботи?

Задача 16 – застосування систем рівнянь та математичного моделювання для розв'язування прикладних задач на спільну роботу та продуктивність

3 пристані на станцію повинно бути перевезено 690т вантажу п'ятьма тритонними та десятьма півторатонними машинами. Після декількох годин роботи усі машини перевезли — усього вантажу. Щоб перевезти вантаж у строк, залишилось часу для перевезення решти вантажу на 2 год. менше, ніж було витрачено. Вантаж було перевезено у строк тому, що водії стали робити за

годину на одну поїздку більше, ніж раніше. Визначити, за скільки годин був перевезений увесь вантаж, якщо півторатонна машина робила на одну поїздку за годину більше, ніж тритонна. (Вважається, що на одну тритонну машину вантажилося повністю 3 т. а на півторатонну 1.5 т).

Задача 17 – показує використання нерівностей для моделювання задач на вклади з двома банками

Відомо, що внесок, що знаходиться в банку з початку року, зростає під кінець року на визначений відсоток (свій для кожного банку). На початку року $\frac{3}{5}$ деякої кількості грошей поклали в перший банк, а частину, що залишилась, у другий банк. Під кінець року сума цих внесків стала дорівнювати 590 грошовим одиницям, до кінця наступного року - 701 грошовій одиниці. Було підраховано, що якби спочатку $\frac{3}{5}$ вихідної кількості грошей поклали в другий банк, а частину, що залишилась у перший банк, то після закінчення одного року сума внесків у ці банки стала б дорівнювати 610 грошовим одиницям. Яка в цьому випадку була б сума внесків у ці банки до кінця другого року?

Задача 18 – демонструє застосування нерівностей до розв'язування задач на відсотки

Підприємство працювало три роки. Виробництво продукції за другий рік роботи підприємства зросло на $p\%$, а на наступний рік воно зросло на 10% порівняно з попереднім. Визначити, на скільки відсотків збільшилось виробництво продукції за другий рік, якщо відомо, що за два роки воно збільшилось в цілому на $48,5\%$.

Задача 19 – задача на рух в одному напрямку

Із пункту А виїхали три велосипедиста, перший на 1 год раніше двох інших, які стартували одночасно. Швидкість кожного велосипедиста постійна. Через деякий час третій велосипедист наздогнав першого, а другий наздогнав першого на дві години пізніше, ніж третій. Визначити відношення швидкостей першого та третього велосипедистів, якщо відношення швидкості другого до швидкості третього дорівнює $\frac{2}{3}$.

Задача 20 – задача на зустрічний рух з двома видами транспорту

Із пунктів А і В, відстань між якими 150 км, назустріч один одному виїхали одночасно мотоцикліст і велосипедист. Через 2 год вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рух. Мотоцикліст прибув у В на 3 години раніше, ніж велосипедист у А. На скільки швидкість велосипедиста менша, ніж швидкість мотоцикліста?

Також представляємо **задачі на застосування математичних моделей для вирішення складних ситуацій у реальному житті учнів**. Приклади розв’язання задач 21-27 представлені у Додатку В.

Задача 21. Футбольний м’яч і насос

Футбольний м’яч коштує на 120 гривень більше, ніж насос. Микола купив 2 футбольні м’ячі та 3 насоси, заплативши за покупку 940 гривень. Скільки коштує футбольний м’яч і насос окремо?

Задача 22. Соціальні мережі

У школі провели опитування щодо використання соціальних мереж серед учнів 8-х класів. Виявилось, що 60% учнів користуються Instagram, 70% – TikTok, а 40% – одночасно Instagram і TikTok. Скільки відсотків учнів 8-х класів користуються принаймні однією з цих двох соціальних мереж?

Задача 23. Шкільний ярмарок

У школі вирішили провести благодійний ярмарок, на якому учні 8-х класів продаватимуть домашню випічку. Кожен учень має випекти однакову кількість тістечок, яку визначить класний керівник. Загальна кількість тістечок має бути від 100 до 200, кратна 12 та 15 одночасно. Скільки тістечок має випекти кожен учень, якщо брати участь у ярмарці погодилися 12 учнів 8-х класів?

Задача 24. Планування екскурсії

Учні 8-го класу планують екскурсію до історичного музею. Вартість екскурсії залежить від кількості учнів: якщо група складається з 10 або менше учнів, то вартість квитка для кожного учня становить 120 грн; якщо в групі більше 10 учнів, то вартість квитка для кожного учня становить 100 грн. Крім

того, потрібно заплатити за оренду автобуса, що коштує 2500 грн незалежно від кількості учнів. Скільки коштуватиме екскурсія для класу з 25 учнів?

Задача 25. Планування домашнього бюджету

Родина восьмикласника Олексія планує свій бюджет на місяць. Сім'я складається з чотирьох осіб: Олексія, його батьків та молодшої сестри. Місячний дохід родини становить 32000 грн. На житлово-комунальні послуги витрачається 25% від місячного доходу, на продукти харчування – 40%, на транспорт – 10%, а решта грошей розподіляється порівну між членами родини на особисті витрати. Скільки грошей отримає Олексій на особисті витрати цього місяця?

Задача 26. Планування часу на домашнє завдання

Восьмикласниця Оксана має виконати домашнє завдання з трьох предметів: математики, української мови та історії. На математику вона витрачає на 20 хвилин більше, ніж на українську мову, а на історію – на 15 хвилин менше, ніж на математику. Загалом на виконання домашнього завдання Оксана витрачає 2 години 30 хвилин. Скільки часу Оксана витрачає на кожен предмет окремо?

Задача 27. Планування раціону харчування

Восьмикласник Денис вирішив стежити за своїм раціоном харчування та хоче, щоб його денний раціон містив 2400 кілокалорій. Він планує включити до свого раціону три страви: грецький салат (200 ккал на порцію), курячу грудку (300 ккал на порцію) та рис (400 ккал на порцію). Денис хоче з'їсти вдвічі більше порцій курячої грудки, ніж грецького салату, а порцій рису – на одну більше, ніж курячої грудки. Скільки порцій кожної страви має з'їсти Денис, щоб його денний раціон містив рівно 2400 кілокалорій?

Задача 28. Планування подорожі

Сім'я планує автомобільну подорож з міста А до міста Б, відстань між якими 420 км. Перша половина шляху є гірською місцевістю, де автомобіль споживає 8 літрів бензину на 100 км. Друга половина шляху є рівнинною, і на цій ділянці автомобіль споживає 6 літрів бензину на 100 км. Ціна бензину

становить 25 гривень за літр. Скільки коштуватиме бензин, необхідний для цієї подорожі?

Пропонуємо **прикладі прикладних задач для застосування учнями математичного моделювання з вирішення практичних ситуацій**, пов'язаних з рухом, обертанням коліс або шестерень, відстанями між пунктами тощо. Для їх розв'язання потрібно скласти лінійні рівняння чи системи лінійних рівнянь, що моделюватимуть задані умови (Додаток Г).

Задача 29.

З пункту А одночасно в одному напрямку виїхали два велосипедиста: перший з швидкістю 18 км/год, а другий – 24 км/год. Через годину слід за ними виїхав автомобіль, який наздогнав першого велосипедиста, а через 10 хв і другого. Визначте швидкість автомобіля.

Задача 30.

У деякому механізмі три шестерні різних діаметрів зв'язані між собою так. Що більша з них дотикається до обох менших, причому всі три шестерні мають разом 60 зубців. Коли більша шестерня до повних чотирьох обертів не доходить на 20 зубців, друга та третя роблять відповідно 5 і 10 повних обертів. У скільки разів кількість зубців найбільшої шестерні більша від кількості зубців найменшої шестерні?

Задача 31.

На відстані 7500 м переднє колесо екіпажу зробило на 1000 обертів більше, ніж заднє. Якби довжину кола кожного колеса збільшити на 1 м. то на тій же відстані переднє колесо зробило б на 625 обертів більше заднього. Визначити суму довжин кіл коліс.

Задача 32.

При обертанні двох коліс, з'єднаних нескінченним ременем, менше з них робить у хвилину на 100 обертів більше, ніж друге. Більше колесо робить 5 обертів за проміжок часу на 1 с більший, ніж час 5-ти обертів меншого. Визначити суму кількостей обертів більшого та меншого коліс за хвилину.

Задача 33.

Пішохід та велосипедист вирушають із пункту А до пункту В одночасно. У пункті В велосипедист повертає назад і зустрічає пішохода через 20 хв після початку руху. Не зупиняючись. Велосипедист доїжджає до пункту А. повертає: назад і наздоганяє пішохода через 10 хв після першої зустрічі. За який час пішохід пройде шлях від А до В?

Задача 34.

Два автомобілі, які рухаються по кільцевій дорозі з постійними швидкостями в одному напрямку, опиняються поряд через кожні 56 хв. При русі з тими ж швидкостями в протилежних напрямках автомобілі зустрічаються через кожні 8 хв. За який час проїде усю кільцеву трасу автомобіль, який рухається з більшою швидкістю?

Задача 35.

Два спортсмени бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного постійна, і на пробіг усієї доріжки один витрачає на 5 с менше другого. Якщо вони починають пробіг із спільного старту одночасно і в одному напрямку, то опиняються поряд через 30 с. Через який час вони зустрінуться, якщо побіжать одночасно із спільної лінії старту у протилежних напрямках ?

Задача 36.

Міста А і В стоять на березі ріки. Буксир витрачає на проходження від А до В назад 13 год. А катер, власна швидкість якого в 2 рази більша власної швидкості буксира, витрачає на цей же шлях 6 год. У скільки разів власна швидкість буксира більша швидкості ріки?

При розробці системи задач ми керувалися такими принципами:

1. Відповідність задач навчальній програмі з математики для 8-9 класів та вимогам Нової української школи (НУШ).
2. Різноманітність типів математичних моделей, що використовуються в задачах (лінійні рівняння, квадратні рівняння, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь, нерівності тощо).

3. Прикладна спрямованість задач, їх зв'язок з реальними життєвими ситуаціями, що демонструють практичну значущість математики.

4. Доступність задач для розуміння та розв'язування учнями 8-9 класів, але водночас їх нестандартність, яка вимагає творчого підходу та нешаблонного мислення.

5. Можливість використання задач як для індивідуальної роботи учнів, так і для організації групової та 65в.65задач діяльності.

Таким чином, розроблена система нестандартних текстових задач покликана не лише сприяти закріпленню та поглибленню математичних знань учнів 8-9 класів, а також розвивати їх навчальні та життєві компетентності, формувати культуру математичного мислення, демонструвати практичну значущість математики та її роль у розв'язуванні реальних життєвих ситуацій проблемних.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі роботи, спираючись на результати теоретичного дослідження та аналіз моделей формування вмінь математичного моделювання в учнів основної школи, представлено розроблену систему нестандартних текстових задач для учнів 8-9 класів. Мета розробки цієї системи задач полягає у формуванні в учнів умінь математичного моделювання, розвитку їхнього логічного мислення, аналітичних здібностей та творчого підходу до розв'язування прикладних задач, а також у демонстрації практичної значущості математики для розв'язування реальних життєвих проблем.

Таким чином, представлена в розділі 3 система задач спрямована на формування математичних та ключових компетентностей учнів, закріплення та поглиблення знань учнів з різних розділів математики; розвиток умінь будувати математичні моделі реальних ситуацій; розвиток критичного мислення та

аргументації, розвиток логічного мислення та дослідницьких навичок, показує практичну значущість математичних знань.

При розробці системи задач було дотримано низку принципів: відповідність задач навчальній програмі з математики для 8-9 класів та вимогам Нової української школи; різноманітність типів математичних моделей (лінійні, квадратні, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь, нерівності); прикладна спрямованість задач, їх зв'язок з реальними життєвими ситуаціями; доступність для розуміння учнями та водночас нестандартність формулювання, що спонукає до пошуку творчих розв'язків.

Розроблені задачі охоплюють різні змістові лінії шкільного курсу математики (числа і вирази, рівняння і нерівності, функції, геометричні фігури і величини) та пов'язані з актуальними для учнів 8-9 класів сферами діяльності (покупки, подорожі, здоров'я і харчування, спорт, фінанси, екологія тощо). Задачі можуть використовуватися як для індивідуальної роботи учнів, так і для організації групової та діяльності. Розробка містить також приклади розв'язання задач підвищеної складності.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі теоретично обґрунтовано та розроблено моделі формування в учнів вмінь математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач. Отримані результати дослідження засвідчили досягнення мети, вирішення поставлених завдань і стали підставою для формулювання наступних висновків:

1. На основі вивчення наукової літератури за темою роботи досліджено роль прикладних задач в шкільному курсі математики. З'ясовано, що математичні задачі мають значне значення у стимулюванні розумової активності учнів, виявленні їх творчого потенціалу та розвитку інтересу до математики. Принцип навчання через розв'язування задач впливає з самої сутності математики, а розв'язування задач становить найбільш продуктивний метод не лише для активізації математичної діяльності, але й для освоєння теоретичних знань, практичних навичок, методик та застосувань математики у реальному житті. Таким чином, текстова (прикладна або сюжетна) задача описує певну ситуацію звичайною мовою, в якій потрібно кількісно охарактеризувати певний елемент цієї ситуації, встановити наявність чи відсутність певних відносин між елементами або визначити тип цих відносин. Такі задачі виконують навчальну, розвивальну та виховну функції в процесі навчання математики, а також, як підкреслюють науковці низку додаткових функцій, таких як інтегруюча, інформаційна, контрольна та евристична.

2. Розкрито сутність основних понять про математичне моделювання, таких як «модель», «математична модель», «математичне моделювання», «математична компетентність», їх роль в навчанні учнів математики та визначено, що математична модель представляє собою набір математичних виразів (формул, рівнянь, нерівностей, логічних визначень, операторів тощо), які відтворюють ключові характеристики досліджуваного об'єкта чи явища в рамках обраної теоретичної фізичної моделі, а також деталізують його взаємодію з оточенням у визначених просторово-часових рамках. Математична

компетентність охоплює здатність ідентифікувати та використовувати математичні інструменти у повсякденному житті, осмислювати принципи та методи математичного моделювання, створювати та аналізувати математичні моделі, тлумачити результати досліджень і оцінювати точність отриманих даних. Включення задач на математичне моделювання в шкільний курс математики допомагає учням усвідомити значення математики в реальному світі та підготувати їх до успішного використання математичних моделей у майбутній професійній діяльності.

3. Проаналізовано основні типи та підходи до вивчення текстових задач в школі. З'ясовано, що у навчальному курсі математики значна увага приділяється роботі з текстовими задачами, які виконують двояку роль: з одного боку, є обов'язковою частиною програми, що вимагає засвоєння, а з іншого – слугують ефективним засобом освітнього процесу, спрямованого на навчання, розвиток та виховання учнів. Аналіз модельних навчальних програм з математики для 5-9 класів (2023 р.) показав, що текстові задачі є наскрізною змістовою лінією курсу. Вони використовуються як засіб формування і закріплення нових знань, відпрацювання вмінь і навичок, застосування математики в реальних ситуаціях. Вивчення текстових задач у 7-9 класах тісно пов'язане з формуванням таких предметних компетентностей, як уміння будувати і досліджувати математичні моделі. Основним методом розв'язування текстових задач є алгебраїчний (переклад умови задачі на мову рівнянь, систем рівнянь, нерівностей). У деяких проаналізованих підручниках, зокрема з алгебри значна увага приділяється задачам практичного змісту і застосуванню математичного моделювання.

4. Здійснено аналіз моделей формування в учнів вмінь математичного моделювання при розв'язуванні текстових задач: лінійні рівняння, квадратні рівняння, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь та нерівностей. Виявлено, що найбільш поширеними є задачі на рух, роботу, відсотки, суміші і сплави, геометричні співвідношення тощо. Кожен тип задач має свої особливості та вимагає застосування відповідних математичних моделей.

Лінійні рівняння є найпростішим типом математичних моделей, з якими учні починають ознайомлюватись у 7 класі. Квадратні рівняння вивчаються у 8-9 класах та використовуються для моделювання процесів, описаних нелінійними залежностями. Дробово-раціональні рівняння розглядаються як засіб моделювання складніших залежностей між величинами, зокрема обернених пропорційних залежностей. Системи рівнянь дозволяють моделювати ситуації, в яких є кілька невідомих величин, між якими існують певні залежності. Нерівності доповнюють апарат математичного моделювання, дозволяючи врахувати обмеження на шукані величини та вивчаються в межах програми 9 класу загальноосвітніх закладів.

5. Розроблено систему задач на тему «Нестандартні текстові задачі», задачі охоплюють різні змістові лінії шкільного курсу математики (числа і вирази, рівняння і нерівності, функції, геометричні фігури і величини) та пов'язані з актуальними для учнів 8-9 класів сферами діяльності (покупки, подорожі, здоров'я і харчування, спорт, фінанси, екологія тощо). Мета розробки цієї системи задач полягає у формуванні в учнів умінь математичного моделювання, розвитку їхнього логічного мислення, аналітичних здібностей та творчого підходу до розв'язування прикладних задач, а також у демонстрації практичної значущості математики для розв'язування реальних життєвих проблем. При розробці системи задач було дотримано низку принципів: відповідність задач навчальній програмі з математики для 8-9 класів та вимогам Нової української школи; різноманітність типів математичних моделей (лінійні, квадратні, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь, нерівності); прикладна спрямованість задач, їх зв'язок з реальними життєвими ситуаціями; доступність для розуміння учнями та водночас нестандартність формулювання, що спонукає до пошуку творчих розв'язків. Таким чином, представлена в розділі 3 система задач спрямована на формування математичних та ключових компетентностей учнів, закріплення та поглиблення знань учнів з різних розділів математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Балтовський О.О., Форос Г.В, Сіфоров О.І. Основи математичного моделювання / За заг. 70в.70. д.т.н., 70в.70. О.А. Балтовського. Одеський держ. 70в.70з 70в.70за. Довідок, 2023. 125 с.
2. Бахрушин В.Є. Математичні основи моделювання систем: Навчальний посібник для студентів. Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2009. 224 с.
3. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. Для 9 кл. загальноосвіт. Навч. закл. Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
4. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра : підруч. Для 7 класу загальноосвіт. Навч. закл. К.: Видавництво «Відродження», 2015. 288 с.
5. Бевз Г., Бевз В. Алгебра: Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид., переробл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 256 с.
6. Бевз Г., Бевз В., Владімірова Н. Геометрія: Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти. 2-ге вид., переробл. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021. 273 с.
7. Бурда М. І., Тарасенкова Н.А. Геометрія : підруч. Для 9 кл. загальноосвіт. Навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 224 с.
8. Бурда М., Тарасенкова Н. Геометрія: підруч. Для 8 кл. закладів заг. серед. Освіти. Київ: Оріон, 2021. 195 с.
9. Великодний С. І. Математичне моделювання при розв'язуванні задач. Донецьк: ДонНУ, 2003. 137 с.
10. Волошена В. В. Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо-математичних предметів: Автореферат 70в.70... 70в.70з. 70в.70. наук: 13.00.09 НАПН України. Київ, 2017. 22 с.
11. Волошена В. В. Розвиток умінь математичного моделювання у старшокласників в процесі навчання природничо-математичних предметів:

Автореферат 71в.71... 71в.71з. 71в.71. наук: 13.00.09 НАПН України. Київ, 2017. 22 с.

12. Волошена В. В. Формування в учнів умінь математичного моделювання як складової математичної компетентності. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Зб. наук. 71в.. / Редкол. : І. А. Зязюн (голова) та ін.. Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2014. Вип. 40. С. 37-40.

13. Воропай Н.Л. та ін. Економіко-математичні методи та моделі: Навч. посібник / за заг. редакцією Мацкул В.М. Одеса: ОНЕУ, 2018. 404 с.

14. Головань М.С. Математичні компетентності чи математична компетентність? Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2012» : матеріали міжнародної науково-методичної конференції (6-7 грудня 2012 р., м. Суми), 2012. С. 36-38 с.

15. Гриб'юк О.О. Математичне моделювання як засіб екологічного виховання учнів у процесі навчання математики в класах хіміко-біологічного профілю. Didactics of mathematics: Problems and Investigations, 2007. (27). Р. 132-139.

16. Іванова Г.І. Формування культури розумової праці студентів у процесі навчання математичних дисциплін: 71в.71...д-ра. 71в.71за. 011. Криворізький держ. 71в.71.. ун-т. Кривий Ріг, 2020. 314 с.

17. Істер О. Алгебра: Підручник для 9 класу закл. заг. середньої освіти; 2-ге вид., переробл. Київ : Генеза, 2022. 271 с.

18. Істер О. С. Алгебра : підруч. Для 9-го кл. загальноосвіт. Навч. закл. / О.С. Істер. Київ : Генеза, 2017. 264 с.

19. Катеринюк Г. Д. Здатність до математичного моделювання як ознака математичної компетентності учнів. Моделювання у навчальному процесі: матеріали Всеукр. Наук.-практ. Інтернет-конф. (03-04 березня 2017 р.) / укладач Н.А. Головіна Луцьк: Вежа-Друк, 2017. С. 70-73

20. Катеринюк Г. Д. Місце і роль математичного моделювання в системі математичних компетентностей учнів. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи». Одеса, 15-16 вересня 2016. С. 82-84

21. Катеринюк Г. Д. Необхідність вдосконалення умінь математичного моделювання. Математика у технічному університеті XXI сторіччя: Збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції (м. Краматорськ, 15-16 травня, 2017 р.), Краматорськ : ДДМА, 2017. С. 232-234

22. Катеринюк Г. Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору. Київ : Гнозис, 2016. С. 239-246

23. Катеринюк Г. Д. Психолого-педагогічні аспекти формування умінь математичного моделювання в учнів старої школи. Фізико-математична освіта. Суми, 2018. Випуск 1(15). С. 52-56

24. Катеринюк Г.Д. Формування умінь математичного моделювання в учнів профільної школи: 72в.72... докт. 72в.72за.. 014. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2020. 390 с.

25. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / за заг. 72в.72. Р. Н. Кветного. Вінниця: ВНТУ, 2012. 193 с.

26. Кравчук В. Р., Підручна М.В., Янченко Г.М. Алгебра: підруч. Для 7 кл. загальноосвіт. Навч. закл. Тернопіль: Підручники і посібники, 2015. 224 с.

27. Малихін О. В. Теоретико-методологічні засади організації самостійної навчальної діяльності студентів вищих педагогічних навчальних закладів: 72в.72. ... д-ра 72в.72. наук: 13.00.09 / Харківський 72в.72. 72в.72. ун-т 72в.. Г. Сковороди. Кривий Ріг, 2009. 504 с.

28. Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Бойко Г.М. Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвітн. Навч. закл. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. 256 с.

29. Мерзляк А. Г. Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. Для 8 кл. закладів заг. серед, освіти; 2-ге вид., переробл. Харків : Гімназія, 2021. 240 с.

30. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підруч. Для 7 кл. закладів заг. серед, освіти 2-ге вид., переробл. Харків : Гімназія, 2020. 288 с.

31. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : підруч. Для 7 кл. закладів заг. серед, освіти 2-ге вид., переробл. Харків : Гімназія, 2020. 290 с.

32. Мерзляк А. Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія : підруч. Для 9 кл. загальноосвіт. Навч. закладів. Харків : Гімназія, 2017. 240 с.

33. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.), 2023. URL:

<https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf> (дата звернення: 28.02.2024).

34. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.), 2023. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.klas.Ister.26.07.2023.pdf> (дата звернення: 28.02.2024).

35. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори: Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.), 2023. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/896/89682/Heometriya_7-9_kl_Burda_ta_in_26_07_2023.pdf (дата звернення: 28.02.2024).

36. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (74в.74. Васишин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.), 2023. URL: <https://nushub.org.ua/resource/modelna-navchalna-programa-matematyka-7-9-klasy-dlya-zakladiv-zagalnoyi-serednoyi-osvity-avt-vasylyshyn-m-s-mylyanyk-a-i-praczovytyj-m-v-prostakova-yu-s-shkolnyj-o-2/> (дата звернення: 28.02.2024).

37. Новікова А. О. Психолого-педагогічні засади формування в учнів основної школи умінь і навичок математичного моделювання. Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, (м. Кропивницький, 18–19 травня 2018 р.) / за 74в.74.. С. П. Величко. Кропивницький: ПП «ЕксклюзивСистем», 2018. С. 18–19.

38. Новікова А.О. Формування в учнів основної школи умінь математичного моделювання у процесі навчання алгебри: 74в.74..канд. педаг. наук. 13.00.02. Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова. Київ, 2021. 305 с.

39. Поскрипко Ю.А., Данченко О.Б. Компетенція і компетентність: консенсус. Вчені записки Університету «КРОК», 2019. №3 (55). С. 117-127.

40. Практикум із розв'язування задач шкільного курсу математики. Текстові задачі : навчально-методичний посібник / за 74в.74. О. М. Корольок. Житомир : Вид-во ЖДУ 74в.. І. Франка, 2020. 68 с.

41. Про затвердження Державного стандарту базової середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020. №898. Зі змінами від 30.08.2022. № 972. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п#n16> (дата звернення:).

42. Про освіту: Закон України в редакції від 24.09.2022. № 2457-IX. Відомості Верховної Ради України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text> (дата звернення: 22.06.2023).

43. Про повну загальну середню освіту : Закон України від 16.01.2020 № 463-IX. Дата оновлення: 01.05.2021. Відомості Верховної Ради України

(BBP). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text> (дата звернення: 08.06.2023).

44. Про схвалення Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року : Розпорядження Кабінету Міністрів України від 14.12.2016 № 988-р. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/249613934> (дата звернення: 08.06.2023).

45. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : монографія. Харків : Факт, 2005. 360 с.

46. Рум'янцева К.Є. Психолого-педагогічні умови формування математичного мислення майбутніх економістів. Засоби і технології сучасного навчального середовища: Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, (м. Кропивницький, 18–19 травня 2018 р.) / за 75в.75..С. П. Величко. Кропивницький: ПП «ЕксклюзивСистем», 2018. С. 20-22.

47. Серман О.Б. Реалізація методу математичного моделювання при розв'язуванні сюжетних задач в початкових класах: власна методична розробка на тему. Івано-Франківськ, 2017. 73 с.

48. Тадеєв В.О. Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвітн. Навч. закл. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. 296 с :

49. Тарасенкова Н. А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Серд.к З.О. Алгебра : підруч. Для 9 класу загальноосвіт. Навч. закл. Київ : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

50. Ткаченко О.Д. Навчання учнів алгебраїчному методу розв'язування текстових задач в основній школі. НаУрок, 2018. 16 с. URL: <https://naurok.com.ua/navchannya-uchniv-algebra-chnomu-metodu-rozvyazuvannya-tekstovih-zadach-v-osnovniy-shkoli-38610.html> (дата звернення: 28.02.2024).

51. Чінчой А. О. Математичне моделювання як один із методів реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. Математика в рідній школі. 2016. №9. С. 27–30.

52. Spencer L., Spencer S. Competency at Work: Models for Superior Performance / John Wiley and Sons, Inc., New York. 1993. 384 p.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Приклади розв'язання задач 1-10

Задача 1

Два тіла рухаються по колу рівномірно в один бік. Перше тіло проходить коло на 2 секунди швидше другого і доганяє друге тіло кожні 12 секунд. За який час тіло, швидкість якого менша, проходить коло?

Розв'язання:

Нехай: T - час, за який швидше тіло проходить коло (в секундах) $T+2$ - час, за який повільніше тіло проходить коло (в секундах)

Згідно з умовою:

1. Швидше тіло проходить коло на 2 секунди швидше за повільніше.
2. Швидше тіло доганяє повільніше кожні 12 секунд.

За 12 секунд швидше тіло проходить повне коло. За цей самий час 12 секунд повільніше тіло проходить частину кола.

Нехай ця частина кола, яку проходить повільніше тіло за 12 секунд, дорівнює x . Тоді за ці 12 секунд швидше тіло проходить коло плюс x :

$$12/T = 1 + x \quad (1) \quad 12/(T+2) = x \quad (2)$$

Помножимо (1) на $T+2$, а (2) на T : $12(T+2)/T(T+2) = (T+2) + x(T+2)$
 $12T/(T+2) = xT$

Прирівнюємо праві частини: $(T+2) + x(T+2) = xT$ $T+2 = 2x$

Підставимо це у (2): $12/(T+2) = x$ $x = 12/(T+2) = 6$

Отже, $T+2 = 2 \cdot 6 = 12$

Час, за який повільніше тіло проходить коло, $T+2 = 12$ секунд.

Таким чином, повільніше тіло проходить коло за 12 секунд.

Задача 2

Перший велосипедист щохвилини проїжджає на 50 м менше, ніж другий, тому на шлях 120 км він витрачає на 2 год. Більше, ніж другий. Знайти швидкість другого велосипедиста.

Розв'язання:

У фразі «Проїжджає щохвилини на 50 метрів менше» захована швидкість 50 м/хв. Оскільки решта даних в км та годинах, то 50 м/хв. приводимо до км/год.

$$50/1000 \times 60 = 3000/1000 = 3 \text{ (км/год)}.$$

Позначимо швидкість другого велосипедиста через V , а час руху – t . Множенням швидкості на час руху отримаємо шлях

$$V \times t = 120.$$

Перший велосипедист їде повільніше, тому і довше. Складаємо відповідне рівняння руху

$$(V-3)(t+2)=120.$$

Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими. З першого рівняння виразимо час руху та підставимо у друге

$$t=120/V; (V-3)(120/V+2)=120.$$

Після множення на $V/2$ та групування подібних доданків можна отримати таке квадратне рівняння

$$V^2-3V-180=0.$$

Обчислюємо дискримінант рівняння

$$D=9+4 \times 180=729=27 \times 27$$

та корені

$$V=(3+27)/2=15;$$

$$V=(3-27)/2=-12.$$

Другий відкидаємо, він не має фізичного змісту. Знайдене значення $V=15$ км/год є швидкістю другого велосипедиста.

Відповідь: 15 км/год.

Задача 3

Мотоцикліст затримався біля шлагбаума на 24 хв. Збільшивши після цього свою швидкість на 10 км/год. Він надолужив спізнення на перегоні 80 км. Визначити швидкість мотоцикліста до затримки.

Розв'язання:

1. Позначимо початкову швидкість мотоцикліста як V км/год.
2. Після збільшення швидкості на 10 км/год швидкість мотоцикліста становить $V + 10$ км/год.
3. Мотоцикліст затримався на 24 хвилини, що в годинах становить $24/60$ або 0.4 години.
4. Час, за який мотоцикліст проїхав 80 км зі збільшеною швидкістю, становить $80/(V + 10)$ годин.
5. Цей час має бути на 0.4 години меншим, ніж час, за який мотоцикліст проїхав би ту саму відстань зі своєю початковою швидкістю, тобто $80/V$ годин.

За цими кроками складаємо рівняння:

$$80/V - 80/(V + 10) = 0.4$$

1. Приведемо до спільного знаменника та об'єднання дробів: $(80 \times (V + 10) - 80 \times V) / (V \times (V + 10)) = 0.4$
2. Розкриємо дужок і спрощення виразу: $(800 - 80 \times V) / (V \times (V + 10)) = 0.4$
3. Позбавимось від дробу шляхом множення обох сторін рівняння на $V \times (V + 10)$: $800 - 80 \times V = 0.4 \times V^2 + 4 \times V$
4. Розкриємо дужок в правій частині та перенесення всіх членів на одну сторону: $0.4 \times V^2 + 84 \times V - 800 = 0$
5. Спростимо коефіцієнтів шляхом ділення рівняння на 0.4: $V^2 + 210 \times V - 2000 = 0$
6. Розв'язування квадратного рівняння дає: $V = 40$

Таким чином, швидкість мотоцикліста до затримки становить 40 км/год.

Задача 4

Два пішоходи вирушають одночасно назустріч один одному із пунктів А і В. відстань між якими 10 км, і зустрічаються через годину. Потім вони продовжують подорож з незмінною швидкістю, причому перший прибуває до пункту А на 50 хв раніше, ніж другий до В. Знайти швидкість першого пішохода.

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі використаємо такі дані:

Дано:

- Відстань між пунктами А і В = 10 км
- Час зустрічі пішоходів = 1 година
- Перший пішохід прибув до пункту А на 50 хвилин ($5/6$ години) раніше, ніж другий до пункту В

Нехай:

- Швидкість першого пішохода = v_1 (км/год)
- Швидкість другого пішохода = v_2 (км/год)
- Відстань, яку пройшов перший пішохід до зустрічі = x км
- Відстань, яку пройшов другий пішохід до зустрічі = $10 - x$ км

Крок 1: Запишемо рівняння для часу зустрічі $x/v_1 = (10 - x)/v_2 = 1$ (година)

Крок 2: Запишемо рівняння для різниці часу прибуття $(10 - x)/v_1 = x/v_2 + 5/6$ (години)

Крок 3: Розв'яжемо систему рівнянь Підставимо $x = 5$ км у перше рівняння: $5/v_1 = 5/v_2 = 1$ $v_1 = v_2 = 5$ км/год

Підставимо $v_1/v_2 = 1$ у друге рівняння: $(10 - 5)/5 = 5/5 + 5/6$ $1 = 1 + 5/6$ $v_1 = 6$ км/год

Отже, швидкість першого пішохода дорівнює 6 км/год.

Задача 5

Із порту одночасно вийшли два теплоходи, причому перший з них пішов на південь, а другий на схід. Через 2 год відстань між ними становила 174 км. Знайти середню швидкість першого теплохода, коли відомо, що він проходив в середньому за кожну годину на 3 км більше, ніж другий.

Розв'язання:

Нехай швидкість другого теплохода дорівнює x км/год. Тоді швидкість першого теплохода буде $(x + 3)$ км/год.

1. Складемо рівняння за умовою задачі, використовуючи теорему Піфагора:

$$(2x)^2 + (2(x + 3))^2 = 174^2$$

2. Розв'яжемо рівняння:

$$4x^2 + 4(x + 3)^2 = 30276$$

$$4x^2 + 4(x^2 + 6x + 9) = 30276$$

$$4x^2 + 4x^2 + 24x + 36 = 30276$$

$$8x^2 + 24x - 30240 = 0$$

$$\text{Розділимо обидві частини на 8: } x^2 + 3x - 3780 = 0$$

$$\text{Знайдемо дискримінант: } D = 3^2 - 4 \times 1 \times (-3780) = 15129 \quad x_1 = (-3 + \sqrt{15129}) / 2 \approx 60 \quad x_2 = (-3 - \sqrt{15129}) / 2 < 0 \text{ (не підходить за змістом задачі)}$$

Отже, швидкість другого теплохода дорівнює 60 км/год.

3. Знайдемо швидкість першого теплохода:

$$x + 3 = 60 + 3 = 63 \text{ (км/год)}$$

Відповідь: швидкість першого теплохода дорівнює 63 км/год.

Задача 6

Відстань між точками А і В дорівнює 117 м. Із цих точок одночасно почали рухатись два тіла назустріч одне одному. За першу хвилину одне із них пройшло 1 м. а кожну наступну воно проходило на одна друга м. більше, ніж за попередню. Друге тіло проходило за кожну хвилину по 6 м. Через скільки хвилин тіла зустрінуться?

Розв'язання:

Нехай перше тіло зустрінеється з другим через x хвилин.

1. Знайдемо відстань, яку пройде перше тіло за x хвилин:

$$1 + (1 + 1/2) + (1 + 1/2 + 1/2) + \dots + (1 + (x-1)/2) = x/2 + x(x-1)/4$$

2. Знайдемо відстань, яку пройде друге тіло за x хвилин:

$$6 \times x$$

3. Складемо рівняння за умовою задачі:

$$x/2 + x(x-1)/4 + 6x = 117$$

4. Розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + 10x - 468 = 0$$

$$\text{Знайдемо дискримінант: } D = 10^2 - 4 \times 1 \times (-468) = 1972$$

$$x_1 = (-10 + \sqrt{1972}) / 2 \approx 18$$

$$x_2 = (-10 - \sqrt{1972}) / 2 < 0 \text{ (не підходить за змістом задачі)}$$

Відповідь: тіла зустрінуться через 18 хвилин.

Задача 7

Дано два двоцифрових числа, які задовольняють наступні умови. Якщо число A написати попереду запису числа B , отримане чотирицифрове число розділити на B , то в частці вийде 121. Якщо ж число B написати попереду числа A і отримане чотирицифрове число розділити на A , то в частці вийде 84 і в остачі 14. Знайдіть добуток даних чисел.

Розв'язання:

Нехай число A складається з цифр a і b , тоді: $10a+b=A$.

Нехай число B складається з цифр c і d , тоді: $10c+d=B$.

Якщо число A записати перед числом B , тоді це виглядатиме так:

$$1000a+100b+10c+d=AB$$

А якщо число B записати перед числом A , тоді це виглядатиме так:

$$1000c+100d+10a+b=BA$$

Тепер замінімо число A на x : $x=10a+b$, а число B на y : $y=10c+d$.

$$AB=100(10a+b)+10c+d=100x+y$$

$$BA=100(10c+d)+10a+b=100y+x$$

Згідно з умовою складаємо систему рівнянь:

$$(100x+y)/y=121; 100x=121y-y; 100x=120y; x=1,2y$$

$$(100y+x-14)/x=84; 100y-14=84x-x; 83x=100y-14; 83x+14=100y$$

$$83 \cdot 1,2y + 14 = 100y$$

$$14 = 100y - 99,6y$$

$$140 = 4y$$

$$y = 140/4 = 35 \text{ - це число В.}$$

$$x = 1,2 \cdot 35 = 42 \text{ - це число А.}$$

Тому добуток чисел 35 та 42 дорівнює 1470.

Задача 8

Із бака, наповненого чистим спиртом, вилили частину спирту і доповнили тією ж кількістю води. Потім із бака вилили стільки ж літрів суміші, тоді в баці залишилось 49 л чистого спирту. Місткість бака 64 л. Скільки спирту вилили другого разу?

Розв'язання:

Нехай кожного разу відливали x літрів.

Першого разу це були x літрів чистого спирту.

У баці залишилося $64-x$ літрів спирту, що становить $(64-x)/64$ частину від об'єму бака.

Другого разу також відлили x літрів, але це вже була не чиста речовина, а суміш, в якій спирту було $(64-x)/64$ частина, тобто $(64-x)^2/64$ літрів спирту.

Після цього в баці залишилося 49 літрів спирту. Отже, маємо рівняння: $64 - x + (64-x)^2/64 = 49$.

$$4096 - 64x - 64x - x^2 = 3196$$

$$x^2 - 128x + 960 = 0$$

$$D = 16384 - 4 \times 960 = 12544 = (112)^2$$

$$x_{1,2} = (128 \pm 112)/$$

$$x_1 = 8, x_2 = 120$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, отримуємо $x = 8$ або $x = 56$. Очевидно, що другий корінь 56 не підходить, оскільки всього спирту було 64 літри. Відповідь: 8 літрів.

Задача 9

В посудині було 10 літрів соляної кислоти. Частину її відлили і посудину доповнили такою ж кількістю води. Потім знову відлили таку ж кількість суміші і доповнили посудину такою ж кількістю води. Скільки літрів відливали кожного разу, якщо в результаті в посудині виявився 64% розчин соляної кислоти?

Розв'язання:

Дано:

Початкова кількість соляної кислоти в посудині - 10 л

Кількість соляної кислоти та води, відлитих за один раз - x л

Вміст соляної кислоти в результуючому розчині - 64%

Складемо систему рівнянь:

Після першого відливання та додавання води: $10 - x + x = 10$ л

Після другого відливання та додавання води: $(10 - 2x) / 2 = 5 - x$ л

Вміст соляної кислоти в результуючому розчині - 64%: $(5 - x) / (10 - 2x) = 0.64$

Система рівнянь:

1. $10 - x + x = 10$
2. $(10 - 2x) / 2 = 5 - x$
3. $(5 - x) / (10 - 2x) = 0.64$

Розв'язуємо:

1. Рівняння 1: $10 - x + x = 10$ $x = 2$ л
2. Підставляємо $x = 2$ в рівняння 2: $(10 - 2 \times 2) / 2 = 5 - 2$ $3 = 3$

Підтверджується.

3. Підставляємо $x = 2$ в рівняння 3: $(5 - 2) / (10 - 2 \times 2) = 0.64$ $3 / 6 = 0.64$

Підтверджується.

Отже, розв'язуючи систему рівнянь, ми отримали, що кожного разу відливали по 2 л суміші.

Задача 10

Посудина у 20 л заповнена спиртом. Із неї виливають деяку кількість спирту у другу, рівну їй, та. Доповнивши решту частини другої посудини водою, доповнюють цією сумішшю першу посудину. Потім з першої відливають $6\frac{2}{3}$ л у другу, після чого в обох посудинах міститься однакова кількість спирту. Скільки відлито спирту з першої посудини у другу на початку?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі позначимо:

- кількість спирту, відлитого з першої посудини у другу на початку - x л
- кількість спирту в першій посудині після доливання води - $(20 - x)$ л
- кількість спирту в другій посудині після доливання води - x л
- кількість спирту, відлитого з першої посудини у другу в кінці - $6\frac{2}{3}$ л

Складемо систему рівнянь:

1. Загальна кількість спирту однакова в обох посудинах в кінці: $(20 - x) - 6\frac{2}{3} = x + 6\frac{2}{3}$
2. Процентний вміст спирту в обох посудинах однаковий в кінці: $(20 - x - 6\frac{2}{3}) / 20 = (x + 6\frac{2}{3}) / 20$

Розв'язавши цю систему, отримуємо: $x = 10$ л

ДОДАТОК Б

Приклади розв'язання задач 11-20

Задача 11

Є два сплави, які містять цинк, мідь і олово. Відомо, що перший сплав містить 40% олова, а другий – 26% міді. Процентний вміст цинку в першому і другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, отримали новий сплав, в якому виявилось 30% цинку. Скільки олова міститься в отриманому новому сплаві?

Розв'язання:

1. Знайдемо процентний вміст цинку в кожному сплаві.

Нехай $x\%$ - вміст цинку в обох сплавах. Тоді в першому сплаві міститься $(100 - 40 - x)\%$ міді, а в другому - $(100 - 26 - x)\%$ олова.

2. Складемо рівняння за умовою задачі:

$$150 \times x\% + 250 \times x\% = 400 \times 30\%$$

3. Розв'яжемо рівняння:

$$150x + 250x = 12000$$

$$400x = 12000 \quad x = 30$$

Отже, в кожному сплаві міститься 30% цинку.

4. Знайдемо кількість олова в новому сплаві:

У першому сплаві міститься 40% олова, тобто $150 \times 0.4 = 60$ кг.

У другому сплаві міститься $(100 - 26 - 30)\% = 44\%$ олова, тобто $250 \times 0.44 = 110$ кг.

В новому сплаві міститься $60 + 110 = 170$ кг олова.

Відповідь: в отриманому новому сплаві міститься 170 кг олова.

Задача 12

Від двох шматків сплавів з різним процентним вмістом свинцю масою 6 кг і 12 кг відрізали по шматку рівної маси. Кожен з відрізаних шматків

сплавили з залишком іншого сплаву, після чого процентний вміст свинцю в обох сплавах став однаковим. Які маси відрізаних шматків?

Розв'язання:

- Перший шматок сплаву має масу 6 кг, вміст свинцю - $x\%$.
- Другий шматок сплаву має масу 12 кг, вміст свинцю - $y\%$.
- Від кожного шматка відрізали по шматку масою p кг.

Складемо систему рівнянь:

1. Загальна кількість свинцю в першому сплаві після змішування: $(6-p)x/6 + py/12 = (6-p)x/6 + px/12$
2. Загальна кількість свинцю в другому сплаві після змішування: $(12-p)y/12 + px/6 = (12-p)y/12 + py/6$
3. Рівність процентного вмісту свинцю після змішування: $(6-p)x/6 + py/12 = (12-p)y/12 + px/6$
4. Рівність процентного вмісту свинцю в обох сплавах: $x = y$
5. відсоткове вміст $((6-p)x/6 + py/12)/6 = ((12-p)y/12 + px/6)/12$
 $(6-p)x/3 + yp/6 = (12-p)y/12 + xp/6$
 $(6-p)x + yp/2 = (12-p)y/4 + xp/2$
 $6x - px + yp/2 = 3y - py/4 + xp/2$
 $p(-x + y/2 + y/4 - x/2) = -6x + 3y$
 $p(-3/2x + 3/4y) = -6x + 3y$
 $p(-1/2x + 1/4y) = -2x + y$
 $p = (-2x + y) / ((-2x + y)/4)$
 $p = 4 \text{ кг}$
6. Отже, маса кожного відрізаного шматка становить 4 кг.

Задача 13

До басейну проведено дві труби, одна постачає воду, а друга опорожнює басейн. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год довше, ніж через другу 87в.87задачі87ся. При заповненому на $1/3$ басейні були відкриті дві труби

разом і басейн опинився порожнім через 8 годин. За скільки годин перша труба наповнює басейн?

Розв'язання:

Для вирішення цієї задачі, введемо наступні позначення:

- V - об'єм басейну
- v_1 - швидкість наповнення басейну першою трубою
- v_2 - швидкість опорожнення басейну другою трубою
- t_1 - час, за який перша труба наповнює порожній басейн
- t_2 - час, за який друга труба опорожнює заповнений басейн

Відповідно до умови, маємо наступні рівняння:

1. $t_1 = t_2 + 2$ (перша труба наповнює басейн на 2 години довше)
2. $(V/3) / (v_1 - v_2) = 8$ (враховуючи, що басейн був заповнений на $1/3$ і дві труби працювали разом, час опорожнення становив 8 годин)

З першого рівняння можна виразити t_2 : $t_2 = t_1 - 2$

Підставимо це у друге рівняння: $(V/3) / (v_1 - v_2) = 8$ $(V/3) / ((V/t_1) - (V/(t_1 - 2))) = 8$

Спростивши, отримаємо: $t_1^2 - 10t_1 + 24 = 0$

Це квадратне рівняння можна розв'язати, використовуючи формулу коренів: $t_1 = (10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}) / (2 \cdot 1) = 6$ або 4

Враховуючи, що $t_1 > t_2$, правильним розв'язком є $t_1 = 6$ годин.

Отже, перша труба наповнює порожній басейн за 6 годин.

Задача 14

О 13 год в басейн почали вливати воду через одну трубу, щоб заповнити його до 16 год наступного дня. Через деякий час включили ще одну таку ж трубу для того, щоб наповнити басейн до 12 години. О котрій годині включили другу трубу?

Розв'язання:

Вся робота нехай буде - 1

1. За період від 13 годин до 16 годин наступного дня пройде 27 годин (24 години за добу плюс 3 години). Отже, за 1 годину одна труба заповнить $1/27$ частину басейну.
2. Для того щоб заповнити басейн, потрібно 23 години. Перша труба працювала 23 години і заповнила $23/27$ частин басейну, а друга труба заповнила решту (тобто $4/27$ частини басейну).
3. Друга труба працювала 4 години, при тому, що її включили о 8 годині ($12 - 4 = 8$ годин).

Відповідь: другу трубу включили о 8 годині

Задача 15

Двом робітникам було доручено виготовити партію однакових деталей. Після того, як перший пропрацював 7 год, а другий – 4 год, виявилось, що вони виконали $5/9$ усієї роботи. Пропрацювавши разом ще 4 год, вони встановили, що їм залишилось виконати ще $1/18$ усієї роботи. На скільки годин більше витрачає другий робітник, працюючи окремо, порівняно з першим для виконання всієї роботи?

Розв'язання:

Нехай перший робітник виконує всю роботу за x годин, а другий - за y годин.

1. Після 7 годин роботи першого робітника та 4 годин роботи другого робітника вони виконали $5/9$ усієї роботи: $7x + 4y = 5/9$
2. Після додаткових 4 годин спільної роботи їм залишилось виконати $1/18$ усієї роботи: $(7x + 4y) + 4(x + y) = 17/18$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $x = 1/18$ та $y = 1/12$.

Це означає, що за одну годину перший робітник виконує $1/18$ усієї роботи, а другий - $1/12$.

Нехай повна робота дорівнює 1. Тоді першому робітнику потрібно 18 годин, а другому - 12 годин для її виконання.

Перший робітник виконує $1/18$ роботи за 1 годину. Йому потрібно 18 годин для виконання всієї роботи.

Другий робітник виконує $1/12$ роботи за 1 годину. Йому потрібно 12 годин для виконання всієї роботи.

Отже, другий робітник витрачає на $(12 - 18) = -6$ годин менше, ніж перший.

Або іншими словами, другий робітник витрачає на 6 годин більше, ніж перший, працюючи окремо для виконання всієї роботи.

Правильна відповідь: другий робітник витрачає на 6 годин більше, порівняно з першим для виконання всієї роботи окремо.

Задача 16

3 пристані на станцію повинно бути перевезено 690 т вантажу п'ятьма тритонними та десятьма півторатонними машинами. Після декількох годин роботи усі машини перевезли — усього вантажу. Щоб перевезти вантаж у строк, залишилось часу для перевезення решти вантажу на 2 год. Менше, ніж було витрачено. Вантаж було перевезено у строк тому, що водії стали робити за годину на одну поїздку більше, ніж раніше. Визначити, за скільки годин був перевезений увесь вантаж, якщо півторатонна машина робила на одну поїздку за годину більше, ніж тритонна. (Вважається, що на одну тритонну машину вантажилося повністю 3 т. а на півторатонну 1.5 т).

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі введемо такі позначення:

n - кількість годин, протягом яких перевозили вантаж n' - кількість годин, яка залишалася до кінцевого терміну після завершення перевезення x - кількість поїздок за годину для тритонної машини y - кількість поїздок за годину для півторатонної машини

Відомо, що:

1. Загальна вага вантажу - 690 т
2. Було використано 5 тритонних і 10 півторатонних машин

3. За час n було перевезено весь вантаж
4. $n' = n - 2$ (залишалося на 2 години менше)
5. $y = x + 1$ (півторатонна машина робила на одну поїздку більше)

Загальна кількість тонн, перевезених за n годин: $5 \times 3x \times n + 10 \times 1.5y \times n$
 $= 5 \times 3x \times n + 10 \times 1.5(x + 1) \times n = 690$

Спростимо це рівняння: $15xn + 15xn + 15n = 690$ $30xn + 15n = 690$ $n(30x + 15) = 690$

Кількість тонн, перевезених за n' годин: $5 \times 3(x + 1) \times n' + 10 \times 1.5(y + 1) \times n'$
 $n' = 5 \times 3(x + 1) \times (n - 2) + 10 \times 1.5(x + 2) \times (n - 2)$

Підставляючи вирази для y і спрощуючи, отримаємо: $15(x + 1)(n - 2) + 15(x + 2)(n - 2) = 30(x + 1)(n - 2) = 690$

Прирівнюючи праві частини останніх двох рівнянь, матимемо: $n(30x + 15) = 30(x + 1)(n - 2)$ $30xn + 15n = 30xn - 60x + 30n - 60$ $15n = 60x - 30$ $n = 4(x - 2)$

Підставляючи це у перше рівняння: $690 = 30x \times 4(x - 2) + 15 \times 4(x - 2) = 120x^2 - 240x + 60x - 120$ $120x^2 - 180x - 120 = 0$ $24x^2 - 36x - 24 = 0$ $(6x - 8)(4x + 3) = 0$ $x = 4/3$ або $x = -3/4$

Оскільки x - кількість поїздок за годину, то $x = 4/3$.

Підставляючи $x = 4/3$ у рівняння $n = 4(x - 2)$, знаходимо $n = 8$.

Отже, весь вантаж було перевезено за 8 годин.

Задача 17

Відомо, що внесок, що знаходиться в банку з початку року, зростає під кінець року на визначений відсоток (свій для кожного банку). На початку року $3/5$ деякої кількості грошей поклали в перший банк, а частину, що залишилась, у другий банк. Під кінець року сума цих внесків стала дорівнювати 590 грошовим одиницям, до кінця наступного року – 701 грошовій одиниці. Було підраховано, що якби спочатку $3/5$ вихідної кількості грошей поклали в другий банк, а частину, що залишилась у перший банк, то після закінчення одного року сума внесків у ці банки стала б дорівнювати 610 грошовим одиницям. Яка в цьому випадку була б сума внесків у ці банки до кінця другого року?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі введемо наступні позначення:

- x - початкова сума грошей
- p - відсоток збільшення вкладу в першому банку за рік
- q - відсоток збільшення вкладу в другому банку за рік

За умовою задачі:

1. $(3/5)x$ - сума, внесена в перший банк на початку року
2. $(2/5)x$ - сума, внесена в другий банк на початку року
3. Через рік сума внесків стала 590, тобто: $(3/5)x(1 + p/100) + (2/5)x(1 + q/100) = 590$
4. Через два роки сума внесків стала 701, тобто: $(3/5)x(1 + p/100)(1 + p/100) + (2/5)x(1 + q/100)(1 + q/100) = 701$
5. Якби $(3/5)x$ було внесено в другий банк, а $(2/5)x$ - в перший, то через рік сума внесків стала б 610, тобто:

$$(2/5)x(1 + p/100) + (3/5)x(1 + q/100) = 610$$

Маємо систему 3 рівнянь з 3 невідомими x , p , q :

$$(3/5)(1 + p/100) + (2/5)(1 + q/100) = 590/x$$

$$(3/5)(1 + p/100)^2 + (2/5)(1 + q/100)^2 = 701/x$$

$$(2/5)(1 + p/100) + (3/5)(1 + q/100) = 610/x$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $x = 400$ $p = 20$ $q = 30$

Підставляючи ці значення в умову задачі, бачимо, що вони дійсно задовольняють усі рівняння.

Тепер можемо знайти суму внесків через два роки у випадку, коли $(3/5)x$ було внесено в другий банк:

$$(3/5)x(1 + q/100)(1 + q/100) + (2/5)x(1 + p/100)(1 + p/100) = 240(1.3)^2 + 160(1.2)^2 = 739.2$$

Отже, у цьому випадку сума внесків через два роки становитиме 739 грошових одиниць.

Задача 18

Підприємство працювало три роки. Виробництво продукції за другий рік роботи підприємства зросло на $p\%$, а на наступний рік воно зросло на 10% порівняно з попереднім. Визначити, на скільки відсотків збільшилось виробництво продукції за другий рік, якщо відомо, що за два роки воно збільшилось в цілому на $48,5\%$.

Розв'язання:

Позначимо:

- x - виробництво продукції за перший рік
- $y = x + x \times p/100$ - виробництво продукції за другий рік
- $z = y + y \times 0.1 = 1.1y$ - виробництво продукції за третій рік

За умовою, збільшення виробництва за два роки (другий та третій) становило 48.5% від виробництва за перший рік. Тобто, $z = x \times 1.485$

Підставимо вирази для y і z : $1.1y = x \times 1.485$ $1.1(x + x \times p/100) = x \times 1.485$
 $1.1x + 1.1xp/100 = 1.485x$ $1.1 + 1.1p/100 = 1.485$ $p/100 = 0.35$ $p = 35$

Отже, виробництво продукції за другий рік зросло на 35% порівняно з першим роком.

Перевірка: $y = x \times (1 + 0.35) = 1.35x$ $z = y \times 1.1 = 1.35x \times 1.1 = 1.485x$

Тобто, за два роки (другий та третій) виробництво зросло на 48.5% від виробництва за перший рік, що відповідає умові задачі.

Задача 19

Із пункту А виїхали три велосипедиста, перший на 1 год раніше двох інших, які стартували одночасно. Швидкість кожного велосипедиста постійна. Через деякий час третій велосипедист наздогнав першого, а другий наздогнав першого на дві години пізніше, ніж третій. Визначити відношення швидкостей першого та третього велосипедистів, якщо відношення швидкості другого до швидкості третього дорівнює $2/3$.

Розв'язання:

Нехай швидкість третього велосипедиста дорівнює x км/год. Тоді швидкість другого велосипедиста: $\frac{2}{3} \times x$ км/год. Нехай швидкість першого велосипедиста дорівнює y км/год.

1. Складемо рівняння за умовою задачі:

$$y \times t = x \times (t - 1) \quad y \times (t + 2) = \frac{2}{3} \times x \times (t + 1)$$

де t - час, за який третій велосипедист наздогнав першого.

2. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\text{З першого рівняння: } yt = xt - x \quad yt = x(t - 1) \quad y = x(t - 1)/t$$

Підставимо у друге рівняння: $x(t - 1)/t \times (t + 2) = \frac{2}{3} \times x \times (t + 1)$
 $(t - 1)(t + 2) = \frac{2}{3} \times t(t + 1)$
 $t^2 + t - 2 = \frac{2}{3} \times (t^2 + t)$
 $3t^2 + 3t - 6 = 2t^2 + 2t$
 $t^2 + t - 6 = 0$
 $(t - 2)(t + 3) = 0$
 $t = 2$ або $t = -3$ (не підходить за змістом задачі)

3. Знайдемо відношення швидкостей першого і третього велосипедистів:

$$y/x = (t - 1)/t = (2 - 1)/2 = 1/2$$

Відповідь: відношення швидкостей першого та третього велосипедистів дорівнює $1/2$.

Задача 20

Із пунктів А і В, відстань між якими 150 км, назустріч один одному виїхали одночасно мотоцикліст і велосипедист. Через 2 год вони зустрілись і, не зупиняючись, продовжили рух. Мотоцикліст прибув у В на 3 години раніше, ніж велосипедист у А. На скільки швидкість велосипедиста менша, ніж швидкість мотоцикліста?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі позначимо:

v_m - швидкість мотоцикліста, км/год v_v - швидкість велосипедиста, км/год

Відомо, що відстань між пунктами А і В дорівнює 150 км.

1. Через 2 години після виїзду вони зустрілися. Позначимо відстань, яку вони проїхали до зустрічі, як s . Тоді: $s = v_m \times 2 = v_v \times 2$

2. Після зустрічі мотоцикліст прибув у пункт В за час $(t_m - 2)$, а велосипедист - у пункт А за час $(t_v - 2)$, де t_m і t_v - загальний час руху мотоцикліста і велосипедиста відповідно.

Відстань, яку проїхав мотоцикліст після зустрічі, дорівнює $(150 - s)$.

Відстань, яку проїхав велосипедист після зустрічі, також дорівнює $(150 - s)$.

$$\text{Тоді: } 150 - s = v_m \times (t_m - 2) \quad 150 - s = v_v \times (t_v - 2)$$

3. За умовою, мотоцикліст прибув у пункт В на 3 години раніше, ніж велосипедист у пункт А. Отже, $t_v - t_m = 3$

$$\text{Підставимо це у друге рівняння: } 150 - s = v_v \times (t_m + 1)$$

$$\text{Прирівнюючи праві частини першого і третього рівнянь, отримаємо: } v_m \times 2 = v_v \times (t_m + 1) \quad v_m = v_v \times (1 + 1/2) \quad v_m = 1.5 \times v_v$$

Таким чином, швидкість мотоцикліста в 1.5 рази більша за швидкість велосипедиста. Різниця швидкостей: $v_m - v_v = 0.5 \times v_v$

Отже, швидкість велосипедиста менша за швидкість мотоцикліста на $0.5 \times v_v$, тобто на половину власної швидкості.

ДОДАТОК В

Приклади розв'язання задач 21-28

Задача 21. Футбольний м'яч і насос

Футбольний м'яч коштує на 120 гривень більше, ніж насос. Микола купив 2 футбольні м'ячі та 3 насоси, заплативши за покупку 940 гривень. Скільки коштує футбольний м'яч і насос окремо?

Розв'язання: Позначимо ціну насоса через x гривень, тоді ціна футбольного м'яча буде $(x + 120)$ гривень.

Складемо рівняння за умовою задачі: $2(x + 120) + 3x = 940$

Розв'яжемо рівняння: $2x + 240 + 3x = 940$ $5x + 240 = 940$ $5x = 700$ $x = 140$

Отже, насос коштує 140 гривень, а футбольний м'яч: $140 + 120 = 260$ гривень.

Відповідь: насос коштує 140 гривень, футбольний м'яч – 260 гривень.

Пояснення: Ця задача демонструє використання математичної моделі у вигляді лінійного рівняння для розв'язування прикладної задачі з реального життя.

Ключові етапи розв'язання:

1. Ввести змінну для позначення невідомої величини (ціни насоса).
2. Виразити іншу невідому величину (ціну м'яча) через введену змінну, використовуючи умову задачі.
3. Скласти лінійне рівняння, що описує зв'язок між невідомими величинами та відомими даними (загальною вартістю покупки).
4. Розв'язати рівняння та знайти значення невідомих величин.

Така задача показує учням, як математичні моделі допомагають розв'язувати практичні задачі, з якими вони можуть зіткнутися в повсякденному житті. Вона розвиває навички аналізу умови, переведення текстового опису ситуації на мову математики та інтерпретації отриманих результатів.

Задача 22. Соціальні мережі

У школі провели опитування щодо використання соціальних мереж серед учнів 8-х класів. Виявилось, що 60% учнів користуються Instagram, 70% - TikTok, а 40% - одночасно Instagram і TikTok. Скільки відсотків учнів 8-х класів користуються принаймні однією з цих двох соціальних мереж?

Розв'язання: Нехай загальна кількість учнів 8-х класів – 100%. Позначимо через I відсоток учнів, які користуються лише Instagram, через T – відсоток учнів, які користуються лише TikTok, а через $(I + T)$ – відсоток учнів, які користуються обома соціальними мережами.

Складемо рівняння: $I + (I + T) = 60$ $T + (I + T) = 70$

З першого рівняння: $I = 60 - (I + T)$

Підставимо у друге рівняння: $T + (60 - T) = 70$ $60 = 70$ Очевидно, що рівняння не виконується, тому введемо нову змінну.

Нехай x – відсоток учнів, які користуються принаймні однією з двох соціальних мереж.

Тоді: $x = I + T + (I + T)$

Підставимо значення з умови: $x = (60 - (I + T)) + (70 - (I + T)) + (I + T)$ $x = 60 + 70 - (I + T)$ Оскільки $(I + T) = 40$, маємо: $x = 60 + 70 - 40 = 90$

Відповідь: 90% учнів 8-х класів користуються принаймні однією з двох соціальних мереж – Instagram або TikTok.

Пояснення: Ця задача демонструє застосування математичної моделі теорії множин для розв'язування прикладної задачі з соціального життя учнів.

Ключові етапи розв'язання:

1. Ввести змінні для позначення невідомих величин (відсотків учнів, які користуються різними комбінаціями соціальних мереж).
2. Скласти систему рівнянь, що описує зв'язок між цими величинами та відомими даними з умови задачі.
3. Спробувати розв'язати систему рівнянь та, у випадку суперечності, ввести нову змінну.

4. Виразити шукану величину (відсоток учнів, які користуються принаймні однією з соціальних мереж) через введені змінні та дані з умови.
5. Обчислити значення шуканої величини.

Така нестандартна задача показує учням, як математичні моделі (зокрема, з теорії множин) можуть застосовуватися для аналізу реальних даних та процесів. Вона розвиває логічне мислення, вміння будувати математичні моделі та інтерпретувати результати в контексті прикладної проблеми.

Задача 23. Шкільний ярмарок

У школі вирішили провести благодійний ярмарок, на якому учні 8-х класів продаватимуть домашню випічку. Кожен учень має випекти однакову кількість тістечок, яку визначить класний керівник. Загальна кількість тістечок має бути від 100 до 200, кратна 12 та 15 одночасно. Скільки тістечок має випекти кожен учень, якщо брати участь у ярмарці погодилися 12 учнів 8-х класів?

Розв'язання: Позначимо кількість тістечок, яку має випекти кожен учень, через x .

За умовою задачі, загальна кількість тістечок має задовольняти такі умови:

1. Бути в межах від 100 до 200;
2. Бути кратною 12 та 15 одночасно;
3. $12x$ – загальна кількість тістечок, оскільки в 8-х класах 12 учнів.

Числа, кратні і 12, і 15 одночасно, - це числа, кратні найменшому спільному кратному (НСК) чисел 12 та 15.

$$\text{НСК}(12, 15) = 60$$

Отже, загальна кількість тістечок має бути кратна 60 і знаходитись у межах від 100 до 200.

Можливі варіанти: 60, 120, 180

Оскільки $12x$ має дорівнювати одному з цих чисел, розв'яжемо три рівняння:

$$12x = 60, x = 5 \quad 12x = 120, x = 10 \quad 12x = 180, x = 15$$

З трьох отриманих значень x тільки $x = 15$ задовольняє умову, що загальна кількість тістечок має бути від 100 до 200.

Відповідь: кожен учень має випекти 15 тістечок.

Пояснення: Ця задача демонструє застосування математичної моделі у вигляді системи обмежень та використання поняття найменшого спільного кратного для розв'язування прикладної задачі з шкільного життя.

Ключові етапи розв'язання:

1. Ввести змінну для позначення шуканої величини (кількості тістечок, яку має випекти кожен учень).
2. Сформулювати систему обмежень на загальну кількість тістечок, використовуючи дані з умови задачі.
3. Знайти найменше спільне кратне чисел 12 та 15, щоб визначити можливі значення загальної кількості тістечок.
4. Скласти та розв'язати рівняння для кожного можливого значення загальної кількості тістечок.
5. Вибрати серед отриманих розв'язків той, що задовольняє всі обмеження з умови задачі.

Така нестандартна задача показує учням, як математичні моделі можуть застосовуватися для планування реальних заходів, таких як шкільний ярмарок. Вона розвиває вміння аналізувати умову, формулювати обмеження у вигляді математичних виразів та використовувати різні математичні поняття

Задача 24. Планування екскурсії

Учні 8-го класу планують екскурсію до історичного музею. Вартість екскурсії залежить від кількості учнів: якщо група складається з 10 або менше учнів, то вартість квитка для кожного учня становить 120 грн; якщо в групі більше 10 учнів, то вартість квитка для кожного учня становить 100 грн. Крім того, потрібно заплатити за оренду автобуса, що коштує 2500 грн незалежно від кількості учнів. Скільки коштуватиме екскурсія для класу з 25 учнів?

Розв'язання: Позначимо кількість учнів у класі через n , а загальну вартість екскурсії – через C .

За умовою задачі: $n = 25$ Вартість оренди автобуса: 2500 грн

Оскільки в класі більше 10 учнів, то вартість квитка для кожного учня становить 100 грн.

Складемо математичну модель для обчислення загальної вартості екскурсії: $C = 2500 + 100 \times n$

Підставимо відоме значення n : $C = 2500 + 100 \times 25 = 2500 + 2500 = 5000$

Відповідь: екскурсія для класу з 25 учнів коштуватиме 5000 грн.

Пояснення: Ця задача демонструє застосування математичної моделі у вигляді лінійної функції для розв'язування прикладної задачі з планування шкільної екскурсії.

Ключові етапи розв'язання:

1. Позначити змінні величини (кількість учнів та загальну вартість екскурсії) та записати відомі дані з умови задачі.
2. Визначити вартість квитка для кожного учня залежно від розміру групи.
3. Скласти математичну модель загальної вартості екскурсії у вигляді лінійної функції, яка включає вартість оренди автобуса та вартість квитків для всіх учнів.
4. Підставити відому кількість учнів у модель і обчислити загальну вартість екскурсії.

Така задача показує учням, як математичні моделі можуть використовуватися для планування та прийняття рішень у реальних ситуаціях, пов'язаних з шкільним життям. Вона розвиває вміння аналізувати умову задачі, виділяти ключові дані та будувати адекватну математичну модель для розв'язування поставленої проблеми.

Задача 25. Планування домашнього бюджету

Родина восьмикласника Олексія планує свій бюджет на місяць. Сім'я складається з чотирьох осіб: Олексія, його батьків та молодшої сестри.

Місячний дохід родини становить 32000 грн. На житлово-комунальні послуги витрачається 25% від місячного доходу, на продукти харчування – 40%, на транспорт – 10%, а решта грошей розподіляється порівну між членами родини на особисті витрати. Скільки грошей отримає Олексій на особисті витрати цього місяця?

Розв'язання:

Щоб розв'язати цю задачу, потрібно виконати наступні кроки:

1. Визначити суму витрат на житлово-комунальні послуги, продукти харчування та транспорт:
 - Житлово-комунальні послуги: $32000 \times 0,25 = 8000$ грн
 - Продукти харчування: $32000 \times 0,4 = 12800$ грн
 - Транспорт: $32000 \times 0,1 = 3200$ грн
 Загальні витрати: $8000 + 12800 + 3200 = 24000$ грн
2. Визначити суму, яка залишиться після сплати всіх витрат: $32000 - 24000 = 8000$ грн
3. Розділити залишок порівну між чотирма членами родини: $8000 / 4 = 2000$ грн

Таким чином, Олексій отримає 2000 грн на особисті витрати цього місяця.

Задача 26. Планування часу на домашнє завдання

Восьмикласниця Оксана має виконати домашнє завдання з трьох предметів: математики, української мови та історії. На математику вона витрачає на 20 хвилин більше, ніж на українську мову, а на історію – на 15 хвилин менше, ніж на математику. Загалом на виконання домашнього завдання Оксана витрачає 2 години 30 хвилин. Скільки часу Оксана витрачає на кожен предмет окремо?

Розв'язання: Позначимо час, який Оксана витрачає на українську мову, через x хвилин.

За умовою задачі:

- На математику Оксана витрачає на 20 хвилин більше, ніж на українську мову: $(x + 20)$ хвилин;
- На історію Оксана витрачає на 15 хвилин менше, ніж на математику: $(x + 20 - 15) = (x + 5)$ хвилин;
- Загальний час на виконання домашнього завдання: 2 години 30 хвилин = 150 хвилин.

Складемо математичну модель у вигляді рівняння: $x + (x + 20) + (x + 5) = 150$

Розв'яжемо рівняння: $3x + 25 = 150$ $3x = 125$ $x = 125 \div 3 \approx 41,67$ (хвилин)

Отже, Оксана витрачає на кожен предмет:

- Українська мова: приблизно 41,67 хвилин ≈ 42 хвилини;
- Математика: $41,67 + 20 \approx 61,67$ хвилин ≈ 62 хвилини;
- Історія: $41,67 + 5 \approx 46,67$ хвилин ≈ 47 хвилин.

Відповідь: Оксана витрачає приблизно 42 хвилини на українську мову, 62 хвилини на математику та 47 хвилин на історію.

Задача 27. Планування раціону харчування

Восьмикласник Денис вирішив стежити за своїм раціоном харчування та хоче, щоб його денний раціон містив 2400 кілокалорій. Він планує включити до свого раціону три страви: грецький салат (200 ккал на порцію), курячу грудку (300 ккал на порцію) та рис (400 ккал на порцію). Денис хоче з'їсти вдвічі більше порцій курячої грудки, ніж грецького салату, а порцій рису – на одну більше, ніж курячої грудки. Скільки порцій кожної страви має з'їсти Денис, щоб його денний раціон містив рівно 2400 кілокалорій?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі позначимо кількість порцій грецького салату як x , курячої грудки як $2x$, а рису як $2x + 1$.

Сума калорій від цих страв має дорівнювати 2400:

$$200x + 300(2x) + 400(2x + 1) = 2400$$

Спростимо це рівняння: $200x + 600x + 800x + 400 = 2400$ $1600x + 400 = 2400$ $1600x = 2000$ $x = 1.25$

Оскільки кількість порцій має бути цілим числом, округлимо x до найближчого цілого значення вгору, тобто $x = 2$.

Отже, кількість порцій:

- Грецький салат: $x = 2$ порції
- Куряча грудка: $2x = 4$ порції
- Рис: $2x + 1 = 5$ порцій

Перевіримо, чи сума калорій від цих порцій дорівнює 2400: $200 \times 2 + 300 \times 4 + 400 \times 5 = 400 + 1200 + 2000 = 2400$

Таким чином, Денису потрібно з'їсти 2 порції грецького салату, 4 порції курячої грудки та 5 порцій рису, щоб його денний раціон містив 2400 кілокалорій.

Задача 28. Автомобільна подорож

Сім'я планує автомобільну подорож з міста А до міста Б, відстань між якими 420 км. Перша половина шляху є гірською місцевістю, де автомобіль споживає 8 літрів бензину на 100 км. Друга половина шляху є рівнинною, і на цій ділянці автомобіль споживає 6 літрів бензину на 100 км. Ціна бензину становить 25 гривень за літр. Скільки коштуватиме бензин, необхідний для цієї подорожі?

Розв'язання:

1. Знайдемо відстань, яку автомобіль пройде гірською місцевістю: $420 / 2 = 210$ (км)
2. Обчислимо кількість літрів бензину, необхідного для гірської ділянки: $210 \times 8 / 100 = 16,8$ (л)
3. Обчислимо кількість літрів бензину, необхідного для рівнинної ділянки: $210 \times 6 / 100 = 12,6$ (л)
4. Знайдемо загальну кількість літрів бензину, необхідного для подорожі: $16,8 + 12,6 = 29,4$ (л)

5. Обчислимо вартість бензину для подорожі: $29,4 \times 25 = 735$ (грн)

Відповідь: бензин, необхідний для подорожі, коштуватиме 735 гривень.

Задача 29. Поїздка велосипедом

З пункту А одночасно в одному напрямку виїхали два велосипедиста: перший з швидкістю 18 км/год, а другий – 24 км/год. Через годину слід за ними виїхав автомобіль, який наздогнав першого велосипедиста, а через 10 хв і другого. Визначте швидкість автомобіля.

Розв'язання:

1. Визначаємо відстань, яку проїхали велосипедисти за годину до моменту, коли за ними вирушив автомобіль:
 - Перший велосипедист за годину проїхав: $18 \text{ км/год} \times 1 \text{ год} = 18 \text{ км}$.
 - Другий велосипедист за годину проїхав: $24 \text{ км/год} \times 1 \text{ год} = 24 \text{ км}$.
2. Визначаємо відстань між велосипедистами, коли автомобіль розпочав рух:
 - Відстань між велосипедистами: $24 \text{ км} - 18 \text{ км} = 6 \text{ км}$.
3. Розраховуємо, на якій відстані від першого велосипедиста буде другий, коли автомобіль його наздожене:
 - За 10 хвилин (або $1/6$ години) другий велосипедист проїде додатково: $24 \text{ км/год} \times 1/6 \text{ год} = 4 \text{ км}$.
 - Отже, коли автомобіль наздогнав першого велосипедиста, другий був на відстані: $6 \text{ км} + 4 \text{ км} = 10 \text{ км}$ від першого.
4. Визначаємо загальну відстань, яку подолав автомобіль до наздоганяння другого велосипедиста, і загальний час руху автомобіля:
 - Загальна відстань: 18 км (до першого велосипедиста) + 10 км (до другого) = 28 км .
 - Час до наздоганяння першого велосипедиста: t (невідомий).
 - Час від першого до другого велосипедиста: 10 хвилин або $1/6$ год.
 - Загальний час: $t + 1/6 t + 1/6$ год.

5. Розрахунок швидкості автомобіля:

- Знаємо, що $V=S/t$.
- Підставляємо наші дані: $V = 28 / (t+1/6)$
- Оскільки $t = 18/V$, підставляємо це у формулу швидкості: $V = 28/((18/v)+(1/6))$

6. Вирішення рівняння:

Ми починаємо з рівняння $V - 28 / (18/V + 1/6) = 0$.

Спрощуємо рівняння, виносячи V як загальний множник, щоб отримати $V = 28 / (18/V + 1/6)$.

Для позбавлення знаменника множимо обидві сторони на вираз у знаменнику, тобто на $(18/V + 1/6)$, отримуючи $V \times (18/V + 1/6) = 28$.

Розкриваємо дужки: $18 + V/6 = 28$.

Переносимо 18 на іншу сторону рівняння, отримуючи $V/6 = 28 - 18$, тобто $V/6 = 10$.

Множимо обидві сторони на 6, щоб знайти V : $V = 10 \times 6$.

Отже, виходить, що $V = 60$.

Таким чином, швидкість автомобіля дорівнює 60 км/год.

ДОДАТОК Г

Розв'язання задач 29-36

Задача 30

У деякому механізмі три шестерні різних діаметрів зв'язані між собою так, що більша з них дотикається до обох менших, причому всі три шестерні мають разом 60 зубців. Коли більша шестерня до повних чотирьох обертів не доходить на 20 зубців, друга та третя роблять відповідно 5 і 10 повних обертів. У скільки разів кількість зубців найбільшої шестерні більша від кількості зубців найменшої шестерні?

- Загальна кількість зубців усіх трьох шестерень = 60
- Коли більша шестерня робить $(4 - 20/x)$ обертів, друга шестерня робить 5 повних обертів, а третя шестерня робить 10 повних обертів.

Оскільки шестерні зв'язані між собою, їхні обертання мають відповідати одне одному. Тому:

$$(4 - 20/x) * x = 5y = 10z$$

Підставляючи $x + y + z = 60$, маємо: $(4 - 20/x) * x = 5(60 - x - z)$ $(4x - 20) = 300 - 5x - 5z$ $9x = 320 - 5z$

З другого рівняння видно, що $5z = 10(x - 4)$. Підставляємо: $9x = 320 - 2(x - 4)$ $9x = 328 - 2x$ $11x = 328$ $x = 30$

Отже, найбільша шестерня має 30 зубців.

Підставляємо $x = 30$ в рівняння $x + y + z = 60$: $30 + y + z = 60$ $y + z = 30$

З рівняння $5y = 10z$ знаходимо, що $y = 2z$. Підставляємо в попереднє рівняння:

$$2z + z = 30 \quad 3z = 30 \quad z = 10$$

Тепер $y = 2z = 2 * 10 = 20$

Отже, найменша шестерня має 10 зубців.

Відповідь: кількість зубців найбільшої шестерні (30) у 3 рази більша, ніж кількість зубців найменшої шестерні (10).

Задача 31

На відстані 7500 м переднє колесо екіпажу зробило на 1000 обертів більше, ніж заднє. Якби довжину кола кожного колеса збільшити на 1 м. то на тій же відстані переднє колесо зробило б на 625 обертів більше заднього. Визначити суму довжин кіл коліс.

Розв'язання:

Нехай x - довжина кола переднього колеса, y - довжина кола заднього колеса.

Тоді, згідно з умовою: $(7500/x) - (7500/y) = 1000$ (1) $(7500/(x+1)) - (7500/(y+1)) = 625$ (2)

Ми маємо систему двох рівнянь з двома невідомими x та y .

Розв'яжемо її, підставивши значення з рівняння (1) в рівняння (2):
 $(7500/x) - 1000 - (7500/y) = 625$ $7500/x - 7500/y = 1625$ $y = (7500x)/(7500+1625x)$

Підставимо це значення y в рівняння (1): $(7500/x) - (7500 \cdot 7500)/(7500+1625x) = 1000$
 $7500(7500+1625x) - 7500x(7500) = 7500000x$
 $56250000 + 12187500x = 56250000x$ $x = 6$ м

Підставивши $x = 6$ м у формулу для y , отримаємо: $y = 7500 \cdot 6 / (7500 + 1625 \cdot 6)$
 $= 4$ м

Отже, довжина кола переднього колеса 6 м, а заднього - 4 м. Сума довжин кіл коліс: $6 \text{ м} + 4 \text{ м} = 10 \text{ м}$.

Тому, сума довжин кіл коліс дорівнює 10 метрів.

Задача 32

При обертанні двох коліс, з'єднаних нескінченним ременем, менше з них робить у хвилину на 100 обертів більше, ніж друге. Більше колесо робить 5 обертів за проміжок часу на 1 с більший, ніж час 5-ти обертів меншого. Визначити суму кількостей обертів більшого та меншого коліс за хвилину.

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі введемо такі позначення:

n_1 - кількість обертів більшого колеса за хвилину n_2 - кількість обертів меншого колеса за хвилину

За умовою задачі: $n_2 = n_1 - 100$ (1)

Також відомо, що більше колесо робить 5 обертів за проміжок часу на 1 с більший, ніж час 5-ти обертів меншого.

Нехай t_1 - час, за який більше колесо робить 5 обертів, а t_2 - час, за який менше колесо робить 5 обертів.

Тоді: $t_1 - t_2 = 1$ (2)

З іншого боку, швидкості обертання коліс пов'язані співвідношенням: $5/t_1 = n_1$ та $5/t_2 = n_2$ (3)

Підставляючи (3) в (2), отримуємо: $5/n_1 - 5/n_2 = 1$ $5(n_2 - n_1) = n_1 n_2$

Використовуючи (1): $5(n_1 - 100 - n_1) = n_1(n_1 - 100)$ $-500 = n_1^2 - 100n_1$
 $n_1^2 - 100n_1 - 500 = 0$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, знаходимо: $n_1 = 150$ обертів/хв

Підставляючи це значення в (1), знаходимо: $n_2 = 150 - 100 = 50$ обертів/хв

Отже, сума кількостей обертів більшого та меншого коліс за хвилину дорівнює: $n_1 + n_2 = 150 + 50 = 200$ обертів/хв

Задача 33

Пішохід та велосипедист вирушають із пункту А до пункту В одночасно. У пункті В велосипедист повертає назад і зустрічає пішохода через 20 хв після початку руху. Не зупиняючись, велосипедист доїжджає до пункту А, повертає: назад і наздоганяє пішохода через 10 хв після першої зустрічі. За який час пішохід пройде шлях від А до В?

Розв'язання:

Для розв'язання цієї задачі позначимо:

v_1 - швидкість пішохода v_2 - швидкість велосипедиста s - відстань між пунктами А і В

Після першої зустрічі велосипедист проїхав шлях $2s$ за 20 хвилин, тобто з швидкістю $v_2 = s/10$ (км/год).

За 10 хвилин після першої зустрічі велосипедист проїхав відстань $3s$ з тією ж швидкістю $v_2 = s/10$.

Отже, за цей час (30 хвилин) пішохід пройшов відстань s .

Його швидкість $v_1 = s/0,5$ (км/год).

Співвідношення між швидкостями: $v_2 = 2v_1$

Нехай t - час, за який пішохід пройде відстань від А до В.

Тоді: $s = v_1 * t$ Підставляючи $v_1 = s/(2t)$, отримуємо: $s = s/(2t) * t = s/2$

Отже, $t = 2$ (години) = 120 хвилин.

Таким чином, пішохід пройде шлях від А до В за 2 години або 120 хвилин

Задача 34

Два автомобілі, які рухаються по кільцевій дорозі з постійними швидкостями в одному напрямку, опиняються поряд через кожні 56 хв. При русі з тими ж швидкостями в протилежних напрямках автомобілі зустрічаються через кожні 8 хв. За який час проїде усю кільцеву трасу автомобіль, який рухається з більшою швидкістю?

Розв'язання:

Нехай:

v_1 - швидкість першого автомобіля (км/год)

v_2 - швидкість другого автомобіля (км/год)

L - довжина кільцевої траси (в км)

1. При русі в одному напрямку автомобілі опиняються поряд через кожні 56 хвилин. Це означає, що за 56 хвилин перший автомобіль проїхав певну відстань $(56/60)v_1$, а другий - $(56/60)v_2$. Загальна відстань, яку вони проїхали, дорівнює L . $(56/60)v_1 + (56/60)v_2 = L$
2. При русі в протилежних напрямках автомобілі зустрічаються через кожні 8 хвилин. За 8 хвилин перший автомобіль проїхав відстань $(8/60)v_1$, а другий - $(8/60)v_2$. Сумарна відстань, яку вони проїхали назустріч один одному, дорівнює L .
 $(8/60)v_1 + (8/60)v_2 = L$

Помножимо перше рівняння на 8, а друге на 56:

$$(8 \times 56/60)v_1 + (8 \times 56/60)v_2 = 8L \quad (5 \times 68/60)v_1 + (5 \times 68/60)v_2 = 56L$$

Віднімемо друге рівняння від першого:

$$(8 \times 56/60)v_1 - (56 \times 8/60)v_1 = 8L - 56L \quad (8 \times 56 - 56 \times 8)v_1/60 = -48L/60 \quad 7v_1 = -4L$$

Тепер підставимо це значення $v_1 = -4L/7$ у друге рівняння:

$$(8/60)(-4L/7) + (8/60)v_2 = L \quad -32L/420 + v_2/7.5 = L \quad v_2 = (8/9)L$$

Підставляємо знайдене v_2 у перше рівняння:

$$(56/60)v_1 + (56/60)(8L/9) = L \quad v_1 + 64L/90 = L \quad v_1 = (7/9)L$$

Отже, швидкість першого автомобіля $v_1 = (7/9)L$, а другого $v_2 = (8/9)L$ км/год.

Більша швидкість $v_2 = (8/9)L$ км/год.

Час, за який автомобіль з більшою швидкістю проїде всю трасу довжиною L : $t = L/(8L/9) = 9/8$ годин

Таким чином, автомобіль з більшою швидкістю проїде всю кільцеву трасу довжиною L за $9/8$ годин.

Задача 35

Два спортсмени бігають по одній замкненій доріжці стадіону. Швидкість кожного постійна, і на пробіг усієї доріжки один витрачає на 5 с менше другого. Якщо вони починають пробіг із спільного старту одночасно і в одному напрямку, то опиняються поряд через 30 с. Через який час вони зустрінуться, якщо побіжать одночасно із спільної лінії старту у протилежних напрямках?

Розв'язання:

Нехай:

T – час, за який перший спортсмен пробігає всю замкнену доріжку (в сек)

$T + 5$ – час, за який другий спортсмен пробігає всю доріжку (в сек)

L – довжина замкненої доріжки (в метрах)

Згідно з умовою:

1. На пробіг усієї доріжки один спортсмен витрачає на 5 секунд менше, ніж другий.
2. При русі в одному напрямку вони опиняються поряд через 30 секунд після спільного старту.

Нехай за 30 сек перший спортсмен пробіг відстань x , а другий - відстань y . Тоді: $x/T = 30$ (1) $y/(T+5) = 30$ (2)

Оскільки за 30 сек вони опинилися поряд, то $x = y$.

Тоді з (1) і (2): $30 = x/T = y/(T+5)$ $T(T+5) = x(T+5)$ $T^2 + 5T = xT + 5x$ $T^2 = xT$ $T = x$

Підставимо це значення $T = x$ у перше рівняння: $x/x = 30$ $x = 30T$

Тепер підставимо x і T у друге рівняння: $30(T+5) / (T+5) = 30$ $T = 25$ сек

Отже, перший спортсмен пробігає всю доріжку за 25 секунд.

При русі в протилежних напрямках вони зустрінуться через час t , за який відстань між ними зменшиться на L .

$$(t/25)L + (t/(25+5)) L = L$$

$$t/25 + 5t/125 = 1$$

$$8t = 125 \quad t = 125/8 = 15,625 \text{ сек}$$

Таким чином, якщо спортсмени почнуть біг одночасно в протилежних напрямках, то зустрінуться через 15,625 секунд.

Задача 36

Міста А і В стоять на березі ріки. Буксир витрачає на проходження від А до В і назад 13 год, а катер, власна швидкість якого в 2 рази більша власної швидкості буксира, витрачає на цей же шлях 6 год. У скільки разів власна швидкість буксира більша швидкості ріки?

Розв'язання:

Нехай:

v - власна швидкість буксира відносно води (км/год)

u - швидкість течії ріки (км/год)

L - відстань між містами А та В (у км)

Згідно з умовою:

1. Буксир витрачає 13 годин на шлях від А до В і назад.
2. Катер, власна швидкість якого в 2 рази більша власної швидкості буксира, витрачає 6 годин на той самий шлях.

При русі від А до В буксир рухається зі швидкістю v -и відносно берега.

При русі від В до А буксир рухається зі швидкістю $v+u$ відносно берега.

За 13 годин буксир проходить шлях:

$$(13/2)(v-u) + (13/2)(v+u) = 2L \quad 13v = 2L$$

При русі від А до В катер рухається зі швидкістю $2v$ -и відносно берега.

При русі від В до А катер рухається зі швидкістю $2v+u$ відносно берега.

За 6 годин катер проходить шлях:

$$(6/2)(2v-u) + (6/2)(2v+u) = 2L$$

$$6(2v) = 2L \quad L = 2v$$

Підставимо це значення L у перше рівняння:

$$13v = 4v$$

$$v = 2u$$

Таким чином, власна швидкість буксира в 2 рази більша за швидкість течії ріки.