

Міністерство освіти і науки
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему «Спеціальні числа на факультативних заняттях з математики»

Виконала: магістрантка групи
СОМ(М)(з)-2
спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)

Розметанюк М. Р.

Керівник: доктор фізико-математичних
наук, професор Заторський Р.А.

Рецензент:

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ I. ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИКИ ЯК ФОРМА ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1. Поняття, зміст та мета проведення факультативних занять з математики, цілі та принципи їх проведення.....	6
1.2. Методика проведення факультативних занять з математики з використанням дистанційних технологій.....	11
1.3. Основні рекомендації щодо заохочення та покращення проведення факультативних занять з математики	16
РОЗДІЛ II. ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕЦІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ЯК СКЛАДНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЧИСЕЛ.....	22
2.1. Числа Стірлінга та Бернуллі	22
2.2. Число Ейлера (Непера) та послідовність Фібоначчі	28
2.3. Дружні числа, досконалі числа та числа Мерсенна	34
2.4. Інші числа Каталана та інші послідовності чисел як спеціальні числа	39
РОЗДІЛ III. МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ ЩОДО СПЕЦІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ	46
3.1. Методичні матеріали для аудиторної роботи з теми «Спеціальні числа в математиці».....	46
3.2. Методичні матеріали для самостійної роботи на тему «Спеціальні числа в математиці». Генератор простих чисел.....	48
3.3. Матеріали для перевірки рівня засвоєння матеріалу	55
ВИСНОВКИ	62
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	65

ВСТУП

Актуальність теми. Освітній процес з кожним роком стає все більш насиченим і виникають все нові способи подання матеріалу та його опрацювання учнями. Однією з розвинених форм проведення занять з математики є факультативні заняття. Дана форма проведення занять не є принципово новою, оскільки такі заняття були започатковані ще в рамках радянської середньої школи, проте, їхнє проведення станом на сьогодні відрізняється від формату, який існував у радянській системі освіти. З розвитком технологій, проведення факультативів переноситься в онлайн-формат, що робить такі заняття ще більш відвідуваними та доступними. Саме проведенню факультативів і опрацюванню на таких заняттях теми спеціальних чисел в математиці буде присвячено дану роботу.

Мета дослідження: висвітлення особливостей вивчення теми спеціальних чисел на факультативних заняттях з математики.

У рамках даного дослідження пропонується вирішити такі завдання:

- Висвітлити поняття, зміст, мету, цілі та принципи проведення факультативних занять з математики;
- Окреслити особливості методики проведення факультативних занять з математики з використанням дистанційних технологій;
- Сформулювати основні рекомендації щодо заохочення та покращення проведення факультативних занять з математики;
- Охарактеризувати числа Стірлінга та числа Бернуллі як одні з різновидів спеціальних чисел;
- Дати характеристику числа Ейлера (Непера) та послідовності чисел Фібоначчі;
- Визначити характеристику дружніх чисел та чисел Мерсенна як категорій спеціальних чисел в математиці;
- Розкрити сутність чисел Каталана та інших послідовностей чисел як категорій спеціальних чисел;

- Розробити методичні матеріали для аудиторної роботи з теми «Спеціальні числа в математиці» на факультативних заняттях з математики;
- Сформувати методичні матеріали для самостійної роботи учнів над темою «Спеціальні числа в математиці» та розробити методичні рекомендації щодо створення генератора простих чисел;
- Запропонувати завдання для проведення перевірки рівня засвоєння учнями матеріалу з теми «Спеціальні числа в математиці».

Об'єкт дослідження: факультативні заняття та спеціальні числа в математиці.

Предмет дослідження: особливості проведення факультативних занять в т.ч. з використанням дистанційних технологій та вивчення теми «Спеціальних чисел в математиці» на таких факультативних заняттях.

Методика проведення дослідження:

1. **Діалектичний метод.** Застосовується при дослідженні змісту поняття, характеристики ознак факультативних занять, його змісту та цілей проведення, при характеристиці поняття та основних властивостей тих чи інших категорій чисел в системі спеціальних чисел в математиці.

2. **Метод системного аналізу.** Даний метод застосовується при характеристиці тих чи інших категорій спеціальних чисел, які розглядаються у їхньому взаємозв'язку один з одним (наприклад, при характеристиці чисел Стірлінга першого і другого роду; при характеристиці взаємозв'язків між числами Фібоначчі та числами Люка, а також при характеристиці інших числових послідовностей);

3. **Метод дедукції.** Застосовується при розробленні рекомендацій щодо проведення заняття щодо проведення факультативного заняття з математики саме на тему «Спеціальні числа в математиці», при виокремленні особливостей проведення заняття, присвяченому вивченню даної теми;

4. **Метод аналізу.** Використовувався при аналізі і виокремленні основних цілей проведення факультативу, розробці тестових завдань для проведення перевірки рівня засвоєння учнями матеріалу теми «Спеціальні числа в

математиці» та розробці методичних рекомендацій з аудиторної та самостійної роботи.

Наукова новизна отриманих результатів:

– Розроблено методичні рекомендації проведення факультативного заняття з математики на тему «Спеціальні числа в математиці», зокрема розроблено методичні матеріали для аудиторної, самостійної роботи та перевірки рівня засвоєння матеріалу;

– Набуло подальшого розвитку теоретичні положення щодо факультативних занять з математики, зокрема конкретизовано зміст, цілі та принципи його проведення, методику та способи заохочення учнів до участі в таких заняттях;

Практичне значення одержаних результатів: отримані в ході дослідження напрацювання, зокрема методичні матеріали можна використовувати для проведення факультативних занять з теми «Спеціальні числа в математиці».

Апробація результатів роботи: результати дослідження було представлено на звітній науково-практичній конференції студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника за 2023 рік (1 – 5 квітня 2024 року).

Структура дипломної роботи: дипломна робота складається з вступу обсягом 3 сторінки, трьох взаємопов'язаних розділів, обсяг яких становить 54 сторінки, висновків обсягом 3 сторінки та списку використаних джерел що становить 14 найменувань.

РОЗДІЛ І. ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ З МАТЕМАТИКИ ЯК ФОРМА ПОГЛИБЛЕНОГО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Поняття, зміст та мета проведення факультативних занять з математики, цілі та принципи їх проведення

Висновок про доцільність доповнення загальної програми з математики було сформовано ще в ХХ столітті, коли вчителі почали доповнювати державну загальнообов'язкову програму вивчення будь-яких предметів, комплексом необов'язкових занять, які були призначені для дітей, зацікавлених у більш глибокому вивченні предмета поза загальною програмою. Такі заняття проводилися вчителями-ентузіастами з будь-яких предметів, в т.ч. і математики [5, с. 1].

В період радянської доби, дана форма занять була ще більше розвинена і отримала більш відому зараз назву – гуртки. Дана форма була певним об'єднанням учнів на чолі з відповідним педагогом за інтересом – поглиблене вивчення конкретного предмету. Поряд з гуртками було впроваджено факультативні заняття з найбільш обов'язкових дисциплін, які відбувалися паралельно із функціонуванням гуртків. Додаткові заняття вносилися у відповідний розклад класу.

Згідно з тлумаченням Словника української мови, факультатив — понадпрограми, необов'язковий навчальний курс, необов'язкове для відвідування заняття [11].

Факультатив завжди розуміється як щось додаткове, необов'язкове, участь в якому має добровільний характер.

Дубовик В. у своїй роботі визначає факультативне заняття, як одну з форм позакласної роботи [5, с. 1].

Можна запропонувати таке визначення факультативного заняття з математики, як форму позапрограми навчального заняття з відповідного навчального предмету, під час якого відбувається додаткове поглиблене

вивчення теми навчальної програми чи теми, яка не входить до навчальної програми з метою кращого розуміння навчального предмету та формування передумов для його подальшого детального вивчення.

Особливості факультативних занять з математики:

1. Факультативні заняття необхідно зіставляти з основним курсом математики.

2. Наступність у відношенні до багатьох форм позакласної і позашкільної роботи з математики.

3. Факультативні заняття надають великі можливості підготовки до математичних олімпіад, виступів у шкільних математичних лекторіях і вечорах.

За своїм змістом між факультативним заняттям та основним заняттям з математики існують певні відмінності. На основних заняттях з математики можуть здійснюватись різні форми контролю (самостійні, контрольні роботи), що, зазвичай, не використовується під час додаткових занять. Спільними рисами є опрацювання і вивчення учнями матеріалу теми та виконання завдань різного рівня складності. Однак, на додаткових заняттях, на відміну від основних не здійснюється оцінювання знань учнів, і, такі заняття мають необов'язковий характер. Таким чином, всі спільні і відмінні риси можна подати у вигляді таблиці (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Спільні та відмінні риси факультативних та основних занять з математики

Факультативні заняття	Основні заняття
1. Не передбачені як обов'язкові навчальним планом.	1. Обсяг і тематика чітко регламентовані навчальним планом проведення занять.
2. Не є обов'язковими для відвідування.	2. Обов'язково відвідуються всіма учнями класу.
3. Не здійснюють прямого впливу на оцінювання учнів (за винятком більш	3. Оцінювання учнів здійснюється в ході проведення даної форми занять,

глибоких знань в учнів, які відвідують такі заняття).	шляхом проведення відповідних форм контролю.
4. Передбачає опрацювання «додаткових» тем з навчальної дисципліни.	4. Передбачає опрацювання «необхідного обсягу тем.
5. Проводяться здебільшого в позаурочний час і є основною формою позакласної роботи вчителя з учнями.	5. Формують основний розклад учнів.
1. Є формою ознайомлення учнів з новим матеріалом, його опрацювання та вирішення завдань, пов'язаних з темою	

Щодо мети проведення факультативного заняття варто зазначити, що вона може відрізнятися залежно від контексту факультативного заняття. Проте основна мета, яка притаманна для практично всіх факультативних занять, в т.ч. занять з математики – це поглиблення знань учнів з предмету, детальніше вивчення частини предмету чи всіх тем загалом, розвиток навичок самостійного навчання в учнів та заохочення такого позакласного дослідження математики. Така основна мета простежується в тому, що на таких факультативних заняттях учні зазвичай вивчають теми, не передбачені навчальним планом або вивчають більш поглиблено теми навчального плану. В деяких випадках факультативні заняття можуть мати додаткову мету, поряд з основною. Додаткова мета може полягати у підготовці учнів до відповідної події. Наприклад, факультативні заняття можуть бути присвячені опрацюванню тем, які виносяться на державну підсумкову атестацію, національний мультипредметний тест, підготовці до контрольних робіт чи опрацюванню типових помилок під час написання останньої контрольної роботи, тренуванню щодо вирішення завдань, вирішення яких викликає труднощі у більшості учнів та іншій меті [5, с. 1].

Основні цілі факультативного заняття з математики можна сформулювати наступним чином:

1. Поглиблення і розширення знань учнів з предмету шляхом або більш глибокого вивчення тем, передбачених навчальним планом або вивчення інших (додаткових) тем з предмету;

2. Заохочення учнів до самостійної роботи, самостійного вивчення математики;

3. Розвиток математичних здібностей в учнів;

4. Виховання ініціативи в учнів до вивчення математики;

5. Сприяння розвитку логічного мислення, алгоритмічної логіки та графічної культури, пам'яті, уваги та інтуїції;

6. Формування бажання до вивчення математики та підсилення математичних здібностей учнів, які бажають детальніше вивчати математику;

7. Наявність спеціальної цілі у певних випадках – підготовка учнів до державної підсумкової атестації, національного мультипредметного тесту, до математичних конкурсів та олімпіад, контрольних робіт. Досягнення цієї цілі, поряд з іншими передбачає можливість контролю за її досягненням, оскільки має в своїй основі можливість статистичного аналізу результатів діяльності.

Досягнення всіх цілей буде свідчити про ефективність проведення таких факультативів та перспективи щодо подальшого функціонування даного виду занять.

Задля ефективного проведення та досягнення мети факультативів, їхнє проведення має ґрунтуватися на відповідних принципах. До принципів проведення факультативних занять можна віднести такі:

1. Принцип добровільності факультативного заняття. Участь учнів у факультативному занятті має бути добровільною і ніхто з учнів не має прямо або опосередковано примушуватися до участі у факультативному занятті. Мова йде не про заохочення за участь у факультативі, так як заохочення не можна розглядати як примус, оскільки воно є за своєю суттю стимулом до участі у занятті. Мова йде про певного роду негативні наслідки для учня у разі його неучасті у факультативі, зокрема упереджене до нього ставлення через це, більш

прискіпливу перевірку знань такого учня чи будь-яких інших негативних наслідках, пов'язаних з відмовою в участі у відповідному факультативі.

2. Принцип корисності проведення факультативу. Факультативне заняття має бути присвячено вивченню додаткових тем, поза передбачених програмою а також детальнішому опрацюванню тем програми, у випадку наявності такої потреби. Загалом, факультативи мають враховувати потреби учнів, які відвідують відповідний факультатив. Звісно, неможливо врахувати потреби кожного учня зокрема, проте потреби більшості обов'язково мають бути враховані. Мова йде про те, що не може бути, до прикладу, такої ситуації: в більшості учнів, які відвідують факультатив існує проблема з обчисленням інтегралів, які входять до обов'язкової програми математики, а на факультативі, який відвідують такі учні замість роботи з інтегралами вчитель розглядає тему сфери застосування тих самих інтегралів та перспектив їх використання при вирішенні різного роду задач. Звісно, і останнє питання є важливим, проте якщо у більшості учасників факультативу існують проблеми щодо вирішення завдань на обчислення інтегралу, то актуальність другої теми втрачається для них, допоки не буде освоєно ними правил вирішення таких завдань [5, с. 2].

3. Принцип комплексності факультативного заняття. На факультативних заняттях мають поєднуватись різні форми його проведення. Тобто, це і опрацювання теоретичного матеріалу учнями перед заняттям, шляхом опрацювання відповідної літератури, в т.ч. самостійний пошук інформації з теми, якою такий учень може поділитися з іншими учнями на такому факультативі. Крім опрацювання теорії, такий учень має застосовувати знання на практиці, тому важливою складовою факультативу має бути вирішення практичних завдань, пропонованих вчителем. Такі практичні завдання мають бути різного рівня складності, що дозволить учням удосконалити свої навички вирішення завдань з відповідної теми та краще засвоїти теоретичний матеріал. Крім базових форм слід поєднувати більш цікаві варіанти проведення занять: визначення почергово учнів для підготовки кросвордів з відповідної теми, що дозволить учням більш креативно підходити до опрацювання теми та допоможе

виділяти основне з теми, сприятиме розвитку логічного та аналітичного мислення учня. Крім кросвордів можна готувати презентації, схеми чи інші наочні матеріали для засвоєння теми. Підготовку таких матеріалів доцільно делегувати учням, що дозволить їм розвивати відповідні навички (чергуючи завдання між учнями), а контроль вчителя дозволить учням виявити свої слабкості при підготовці таких завдань (складність у підготовці презентації, неможливість формування кросворду та інші проблеми).

4. Принцип спеціалізації факультативних занять. Даний принцип визначає, що заняття, поряд з принципом корисності мають стосуватися вузької теми і сприяти більш поглибленому вивченню предмету учнями. Заняття мають бути корисними для учнів, але й не можуть просто ґрунтуватися на повторному опрацюванні матеріалу, який було учнями опрацьовано на основних уроках, якщо в учнів не виникає труднощів у вирішенні завдань.

1.2. Методика проведення факультативних занять з математики з використанням дистанційних технологій

Методика проведення заняття є однією з ключових тем у педагогіці, оскільки може бути доволі різноманітною, залежно від форми заняття, його спрямованості, наявності додаткової мети, особливостей здійснювання оцінювання та інших особливостей.

Метод навчання здебільшого розуміється як певний спосіб спрямованого впливу на процес навчання і досягнення визначеної мети проведення того чи іншого заняття.

Важливим для максимально ефективного проведення заняття є чітке визначення методики його проведення з врахуванням особливостей проведення факультативних занять з математики [4, с. 24].

Пандемія CoVid-19 та повномасштабне вторгнення внесли корективи у навчальний процес, перевівши у 2020 році практично весь навчальний процес у сферу використання дистанційних технологій. Проте, пандемія продемонструвала неефективність такої форми навчання і не знайшла своїх

чисельних прибічників. За даними проведених опитувань ЗМІ, більше половини учнів, батьків та вчителів підтримують аудиторне навчання, оскільки воно має більшу кількість переваг, порівняно з дистанційним навчанням.

Який основний мінус дистанційного навчання і чому його вважають неефективним? Дистанційне навчання більшою мірою призначене для мотивованих учнів, які дійсно прагнуть здобути знання, оскільки дозволяє зекономити час і сили на дорогу до школи, дозволяє з меншим стресом здобувати знання (домашня обстановка на перервах, більш пізнє прокидання для дистанційних занять порівняно із аудиторним відвідуванням уроків мають сприятливий вплив на психоемоційний стан учнів). Особливістю факультативних занять є те, що вони є добровільними для відвідування учнями, тобто, виконується мета, про яку йде мова – в учня, який прийшов на факультатив є бажання здобути нові знання і він із задоволенням відвідуватиме таке заняття, незалежно від формату його проведення. Крім того, факультативи в основному проводяться в позаурочний час, що є дещо дискомфортним для учня, в якого було протягом дня 8 уроків, якщо такий факультатив також проводитиметься безпосередньо в школі, а не з використанням дистанційних технологій. З огляду на це, вважаю цілком обґрунтованим проводити факультативні заняття з математики з використанням дистанційних технологій, що буде більш прийнятним варіантом і для учнів і для вчителя і дозволить таким чином залучити більше учнів до їх проведення, оскільки деякі учні у зв'язку з транспортними особливостями, можливостями організму (учням буває важко аудиторно перебувати зайвий урок), можуть відмовитись від факультативу, в разі його проведення в класі.

З огляду на вищезазначене, використання дистанційних технологій є ключовим при проведенні факультативів. Звісно, мова не йде про виключність дистанційної форми проведення факультативних занять, і, за потреби, деякі заняття можна проводити безпосередньо в класі для підвищення ефективності навчання через аудиторну зустріч на факультативах.

Щодо методики проведення факультативних занять, в т.ч. з використанням дистанційних технологій то доцільно застосовувати такі методи проведення таких занять:

1. Робота з теоретичним матеріалом. Як і на звичайних уроках, на факультативах здійснюється опрацювання певного теоретичного матеріалу. Проте, опрацювання такого матеріалу має мати особливий характер, порівняно із основними уроками з математики. Зокрема, пропонується розподіляти вивчення теми між учнями і поєднувати різні форми її опрацювання. До прикладу, знаючи кількість учнів, які відвідують факультатив, доцільним буде весь обсяг теоретичного матеріалу розподілити між учнями, щоб кожен учень по тій чи іншій частині матеріалу підготував певний матеріал, який було представлено учням на факультативі. Це можуть бути як підготовка презентацій по частині теоретичного матеріалу, так і виступ з науковими доповідями, реферативними повідомленнями чи іншим підготовленим учнями матеріалом [4, с. 56].

Пропонується, щоб учні були поділені матеріалом, з яким вони виступатимуть (наприклад, одному учню пропонується підготувати презентацію по історії розвитку відповідної теми в математичній науці, іншому учню – про основні правила вирішення практичних завдань з відповідної теми і т.д.). В разі наявності великої кількості учнів, такі доповіді можуть готувати почергово, в парах або малих групах. Другий і третій варіанти сприятимуть розвитку навичок роботи в команді, що буде ще одним позитивним ефектом для учнів, які відвідують факультатив.

Задля стимулювання ефективної підготовки презентацій чи інших матеріалів (доповідей, рефератів) можна впровадити правило змагань, згідно з яким доповіді кожної групи чи пари учнів оцінюються іншими учнями, в т.ч. «конкурентами» групи, яку оцінюють. Такий підхід сприятиме розвитку навичок визнавати поразку учнями, які входять до групи, яка програла, стимулюватимуть необхідність справедливого оцінювання конкурентів, оцінки щодо яких мають бути максимально об'єктивними. Крім учнів, оцінювання доповіді чи презентації

здійснює вчитель. Задля уникнення поділу учнів у складі факультативу на «клани» та зменшення імовірності виникнення ворожнечі необхідно щоразу визначати інший склад груп, шляхом перемішування складу груп між собою, залучення інших учнів і відпочинок учнів, які готували відповідний матеріал на останнє факультативне заняття. Також доцільно змінювати формат виконуваного завдання, зокрема, старатися щоб один і той самий учень не готував постійно презентацію чи доповідь, а формат виконуваного завдання був іншим.

Учні, які в кожному конкретному випадку є вільними слухачами на факультативі, залучаються до опрацювання теоретичного матеріалу на наступний раз.

2. Практична складова факультативного заняття. Після заслуховування теоретичного матеріалу, пропонується практична робота для всіх учасників факультативу. На цьому етапі важливим буде залученість педагога в даний процес. Щодо можливостей організації практичної частини заняття, то варіантів його організації є дуже багато.

Почнемо з теоретичного матеріалу. Контроль за засвоєнням теоретичного матеріалу може здійснюватися такими способами:

1) після доповідей і виступів учнів, які готували відповідний матеріал пропонується оцінювання повноти, зрозумілості та способу викладу відповідного матеріалу. Після проведення оцінювання доповідач, маючи заздалегідь підготовлені питання, визначає кого він запитує і ставить запитання по темі своєї доповіді. Пропонується щоб кожен доповідач чи група доповідачів підготували до 5 запитань, які вони ставитимуть аудиторії, яка їх слухала. Даний контроль дозволить вирішити кілька проблем, зокрема, учні, знаючи що після доповіді їм може бути поставлено запитання, будуть більш уважно слухати доповідача та сприймати відповідний матеріал. Крім того, збільшиться залученість учнів, які не готували теоретичного матеріалу, оскільки вони із пасивних слухачів перетворяться на активних учасників процесу обговорення відповідної доповіді. Для доповідачів такий досвід буде корисним, оскільки вони

вчитимуться виділяти основне із своїх доповідей та тренуватимуться правильно формулювати питання відповідно до наявного матеріалу;

2) запитання від учителя. Крім учнів, які готували теоретичний матеріал, запитання учням може задавати вчитель, що може бути як доповнення питань доповідачів, так і замінити питання від них. Якщо говорити про доцільність та ефективність такої форми запитань, то вона більш ефективна в плані того, що вчитель зможе правильно поставити питання відповідно до наявного теоретичного матеріалу, оскільки питання від доповідачів можуть зачасту потребувати коригування для їх розуміння, що не відбуватиметься із питаннями від вчителя. Крім того, питання від педагога замість доповідей дозволять уникнути виникнення потенційних конфліктів між учнями факультативу (ставлення питань залежно від уподобань доповідача за принципом «другові питання простіше, тому, з ким не дуже ладнаю – питання більш складне»). У випадку ставлення питань від педагога такі конфлікти усуваються, оскільки педагог на занятті є своєрідним «арбітром», який є позастороннім і не має мати прихильності до жодного учня чи групи учнів. У випадку поєднання питань від доповідача та вчителя, доцільним буде підготовка доповідачем не більше 3 питань та додаткові питання від вчителя за необхідністю (зокрема, звернення уваги учнів на ту частину матеріалу, яка є більш важливою з усієї доповіді). Доповідача пропонується наділити «імунітетом» і ставити йому питання тільки в разі розуміння, що доповідач або зовсім не опрацьовував матеріал і тільки бездумно його зачитав або у випадку помітності нерозуміння ним того, що він розповідає для інших;

3) додаткові матеріали для контролю заслуховування теоретичного матеріалу. Замість звичайних питань, можна визначити учня, який готуватиме, до прикладу, кросворд, флеш-картки чи інші матеріали, які будуть вирішуватися учасниками факультативу. У разі, наприклад, підготовки кросворду – пропонується щоб питання кросворду були по одному вирішені учнями. При чому, правильну відповідь можна одразу не озвучувати, а записувати пропозиції учнів, щоб у випадку неправильних відповідей, учні самі змогли пропрацювати

помилки та визначити, хто помилився при відповіді на питання, оскільки неправильна відповідь будь-якого учасника розгадування кросворду потягне за собою неможливість його повного розгадування. У випадку використання інших форм – флеш карток чи будь-яких інших матеріалів пропонується застосовувати схожий метод і залучати до дискусії якомога більшу кількість учнів.

Після опрацювання теоретичного матеріалу та визначення рівня засвоєння знань учнів пропонується вирішувати практичні завдання з відповідної теми, зокрема як самостійне розв’язування завдань на швидкість (розподіл завдань, які потребують вирішення між учнями і очікування, допоки хтось з учасників факультативу вирішить те чи інше завдання. Також, у разі неможливості вирішення завдань з теми факультативу жодним учнем – здійснювати його колективне вирішення із залученням коментарів учнів та визначення «місця, де виникла проблема при розв’язку завдання». Вирішенням практичних завдань слід завершувати участь учнів у факультативному занятті, оголосити учням результати проведення заняття, переможців виступів з теоретичним матеріалом, учнів, які протягом заняття зробили найменше помилок, заохочення учнів, які не змогли добре відповідати на занятті і допускались помилок при вирішенні завдань чи відповідей на питання, а також визначення теми наступного заняття та розподілу матеріалу між учнями, який буде необхідно їм підготувати для проведення наступного факультативу [4, с. 142].

1.3. Основні рекомендації щодо заохочення та покращення проведення факультативних занять з математики

Факультативні заняття називають єднальною ланкою між уроками та позакласними заняттями, сходинкою від засвоєння предмета до вивчення науки, засобом ознайомлення учнів з методами наукового дослідження та більш поглибленого вивчення дисципліни.

Це одна з ефективних форм диференційованого навчання, яка розрахована на розвиток пізнавальних інтересів, здібностей та формування професійної орієнтації учнів, оволодіння методами наукових досліджень.

Щодо заохочення участі у факультативних заняттях, то, на нашу думку над цим питанням необхідно належно попрацювати. Участь учнів у факультативних заняттях не можна залишити без уваги, не надавши відповідного заохочення та стимулювання. Можливими варіантами стимулювання учнів, які беруть активну участь у факультативних заняттях, буде надання різного роду переваг на загальних заняттях з математики, зокрема у формі додаткових балів до тієї чи іншої оцінки (поточної, оцінки за результатом контролю знань, тощо), можливість звільнення від виконання тих чи інших завдань на загальному курсі математики, а також заходи морального стимулювання у вигляді грамот для найбільш активних та успішних учасників факультативних занять.

Проте, надання «привілегій» на загальних заняттях з математики не має впливати на інших учнів, які, зокрема, не відвідують факультативні заняття. Мова йде про відсутність будь-яких негативних наслідків для тих учнів, які не беруть участі у факультативі, відсутність упередженого чи якогось недобррозичливого ставлення з боку вчителя до таких учнів чи будь яким іншим чином погіршення їхнього навчання через неучасть у факультативі. Натомість, надання певних «привілегій» учням, які відвідують факультативні заняття буде слугувати стимулом для учнів, які не беруть участі у факультативі – приєднатися до нього, щоб теж мати змогу отримати бонус за свою активну роботу на факультативному занятті [5, с. 2].

В попередньому підрозділі йшла мова про підготовку учнями теоретичного матеріалу, зокрема в команді та здійснення оцінювання рівня підготовки матеріалу та відповідно нагородження тих учнів, чия підготовка до факультативу (підготовка доповіді, реферату, презентації, кросворду тощо) отримала найбільше позитивних оцінок. Таким учням можна надавати дві форми нагородження на їхній власний вибір – або, до прикладу, + 2 бали до будь-якої поточної оцінки, крім контрольних та інших видів робіт, або відпочинок від підготовки до наступного факультативу (якщо кількість учнів, які відвідують факультатив дозволяє визначити інших учнів, які готуватимуть теоретичний матеріал). Також можуть застосовуватись інші форми заохочення за найкращу

підготовку до факультативу. Залежно від креативності, можна «звільнити» учнів найкращої групи, пари чи конкретного учня, чия робота була оцінена найвище, від роботи на одному з основних занять з математики із збереженням його присутності на такому занятті та виконання обов'язкових форм робіт. Мова йде про можливість не відповідати по теоретичному матеріалу на одному з основних уроків, не залучення до розв'язування практичних завдань відповідної теми або будь-який інший вид заохочення. При застосуванні такого заохочення важливо, щоб це не мало системного характеру і гарна підготовка до факультативу не замінювала вивчення нормативно визначених тем з математики. Тому важливо застосовувати рекомендації з попереднього розділу щодо зміни щоразу складу команд, залучення інших учнів і «перепочинок» тих, хто готувався на останнє проведене заняття з факультативу та інші рекомендації.

Якщо учень активно працював на факультативі, і протягом факультативу відповідав на поставлені йому питання правильно, вирішував практичні завдання, враховуючи рекомендації попереднього підрозділу, швидше за інших і найбільш правильно, такий учень може бути заохочений шляхом отримання бонусу у вигляді додаткових балів до оцінки за написання контрольної роботи. Такий вид заохочення варто застосовувати щодо найбільш активних учнів, щоб їхня робота була оцінена і вони отримали стимул продовжувати відвідування таких занять. Таке заохочення варто застосовувати саме щодо вільних слухачів факультативу (якщо такі є), а не групи учнів, чия доповідь була оцінена як найкраща, оскільки підготовка доповіді фактично є дещо простішим процесом, ніж активне сприйняття інформації безпосередньо на факультативі і робота над розв'язуванням практичних завдань. Якщо хтось з учнів групи, які готували теоретичний матеріал, проявить високу активність, зокрема і щодо розв'язування практичних завдань, такий учень теж, як виняток із правила, може бути нагороджений додатковими балами до контрольної роботи. Рекомендується заохочувати в розмірі +2 балів до контрольної роботи.

Щодо нагородження грамотами, то варто зазначити, що таку форму заохочення, на наше переконання, варто здійснювати в кінці семестру. За

результатами всіх проведених занять факультативу рекомендується всіх його учасників, які відвідали не менше 75% занять нагородити однією з двох форм нагород – диплом або грамоту за участь. Дипломом рекомендується нагороджувати найбільш активних учасників всіх занять, зокрема тих, які отримували інші види заохочень і які найбільш активно працювали протягом семестру. Грамоти за участь у факультативних заняттях пропонується видавати всім учасникам, які відвідали не менше 75% занять факультативу, проте не змогли досягти відповідних високих результатів, порівняно з іншими учнями, які були нагороджені дипломами.

Межа відвідуваності 75% факультативних занять стимулюватиме учнів якомога рідше пропускати заняття з факультативу, задля отримання відповідної грамоти чи диплому. Наявність такої грамоти дає змогу додати 3 бали будь-якої поточної оцінки чи оцінок у наступному семестрі, крім оцінки за виконання контрольної роботи. Нагородження дипломом дає можливість отримати додатково 3 бали до будь-якої оцінки за контрольну роботу або +5 балів до будь-якої поточної оцінки чи оцінок. Така перевага грамот і дипломів дозволить заохотити нагороджених учнів продовжувати активну роботу на факультативних заняттях у наступному семестрі і залучити тих учнів, які не брали участі у факультативі, оскільки звичайне відвідування більше ніж 75% факультативних занять гарантує отримання грамоти, якою можна додати кілька додаткових балів до поточних оцінок. Та й звичайна присутність учнів сприятиме отриманню ними додаткових знань, які за постійного відвідування факультативу так чи інакше залишаться, хоча б частково залишаться у пам'яті учнів.

Перелік способів стимулювання та заохочення не має вичерпного характеру і може бути розширений чи замінений будь-якими іншими формами.

Висновки до розділу 1:

Факультативні заняття є важливим доповненням до основного курсу математики, оскільки, на основних уроках з математики не можливо досягнути весь обсяг матеріалу, що можна опрацювати з учнями в ході додаткових факультативних занять (мова йде не про програмово визначені теми, а саме про

теми, які не визначені програмою як обов'язкові, проте які доволі ґрунтовно доповнюють основний курс з математики і є важливою його складовою).

Факультативи проводяться для забезпечення розвитку математичних вмінь та навичок учнів, які бажають більш детально вивчати математику. Факультативні заняття дозволяють учням доповнити свої знання новою інформацією, створюють умови для самостійного навчання та розвитку знань та математичних навичок. Факультативи не є новою формою занять, оскільки були впроваджені в окремих школах ще в ХХ столітті. Найбільш доцільним буде співставлення факультативів та основних занять з математики.

Методика факультативів як основної форми позакласної роботи з учнями дещо відрізняється від методики проведення звичайного заняття, оскільки вона не є настільки регламентованою формою занять і дозволяє цим самим застосовувати інші методи. На нашу думку, найбільш доцільною формою проведення факультативів буде саме дистанційна форма проведення, оскільки в такому занятті беруть участь не всі учні і дистанційна форма проведення буде не такою обтяжливою для учнів. Крім того, у разі необхідності, факультативне заняття можна провести аудиторно, що дозволить максимально гнучко підійти до процесу навчання.

Щодо методики, то на факультативах варто поєднувати теоретичне та практичне навчання, з акцентом на роботу учнів, зокрема щодо підготовки теоретичного матеріалу та вирішенням пропонованих вчителем практичних завдань. Для вчителя відводиться роль контролюючої за процесом проведення факультативу особи, і пропонується в основному роль організатора проведення факультативу.

Щодо стимулювання та заохочення учнів, то, однозначно, такі заходи мають впроваджуватись вчителем. Основна мета цих заходів – зберегти бажання в учнів, які відвідують факультатив продовжувати його відвідування та сприяти виникненню бажання в учнів, які не беруть участі у факультативі, почати його відвідування. Серед пропонованих стимулів можна виділити додаткові бали до поточних оцінок та оцінки за контроль знань, грамоти за участь та дипломи

кращим учням факультативу, звільнення від виконання домашнього завдання чи певного виду роботи (з відповідними застереженнями та чергуванням такого виду заохочення).

РОЗДІЛ II. ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕЦІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ЯК СКЛАДНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЧИСЕЛ

2.1. Числа Стірлінга та Бернуллі

Спеціальні числа та складні числові послідовності – це важливі складові вищої математики та комбінаторики, які у числовому виразі відображають існування певних законів та правил математики.

Спеціальні числа є категорією комбінаторики, яка відображає певну сталу, яка є загальноприйнятою і широко використовується як загальноприйняте правило.

Числові послідовності є належним чином впорядкованими, відповідно до певного обґрунтованого правила чи закону, які відображають існування такого закону у числовому вигляді. Існує значна кількість числових послідовностей, які відображають певні особливості законів комбінаторики. Більшість послідовностей були обґрунтовані вченими в ході вирішення певних задач. Цей розділ буде присвячено таким числовим послідовностям та спеціальним числам.

Числа Стірлінга – це система математичних послідовностей в дискретній математиці та комбінаториці, обґрунтованих шотландським вченим і математиком Джеймсом Стірлінгом.

Числа Стірлінга поділяються на числа першого та числа другого роду.

Числом Стірлінга першого роду є таке число, яке відображає кількість перестановок згідно кількості їх циклів, беручи за основу нерухомі точки як цикли довжиною 1. Дані числа виникають в ході вивчення перестановок [13, с. 117].

Початкове значення числа Стірлінга першого роду є коефіцієнтами $s(n, k)$ при розкладі спадного факторіалу:

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1) \quad (2.1)$$

у степені змінної x :

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k \quad (2.2)$$

Застосування числа Стірлінга першого роду можна відобразити на такому прикладі: існує певна кількість чисел n (умовно прийнемо числа як людей, кожен з яких має свій порядковий номер), які потрібно розподілити за певною кількістю циклів k (умовно вважатимемо їх як столики, за які потрібно розсадити людей). Важливою умовою в цій ситуації буде необхідність посадити хоча б одну людину за кожен столик. Кількість способів такого розміщення людей і буде числом Стірлінга першого роду. Для цього числа важливе значення має порядок розташування чисел [13, с. 118].

Виходячи із вищезазначеного, можна стверджувати що для будь яких n і k числа Стірлінга першого роду виконується правило $\{n\}_k \leq [n]_k$.

Таким чином, якщо взяти за основу, що кількість людей становить 12 осіб, а столиків, за якими їх потрібно розмістити є 3, то, відповідно в нас є така послідовність:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Сума чисел послідовності становить 78, відповідно за кожним столиком потрібно розмістити такі порядкові номери, щоб загальна сума номерів за столиком дорівнювала 26, що відповідатиме правилу циклічності послідовності.

Таким чином, отримаємо таку сукупність циклів:

[2, 4, 5, 7, 8]; [1, 6, 9, 10]; [3, 11, 12]

Розміщуємо людей за столиками (рис. 2.1):

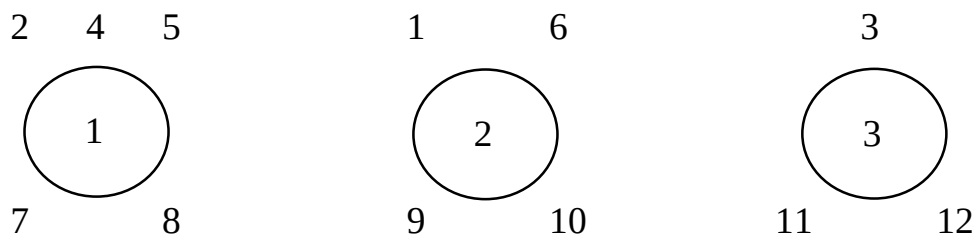


Рис 2.1. Наочний варіант вирішення запропонованого завдання

Відповідно до розміщення, сума порядкових номерів за кожним столиком однакова. При цьому, дотримано правило зменшення кількості порядкових номерів за кожним наступним столиком (5 за першим столиком, 4 за другим і 3 з третім).

Числа Стірлінга першого роду можна обчислити за відношенням рекурентності за наступною формулою:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}, \text{ при } k > 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} := 0 \text{ і } \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} := 0, \text{ при } n > 0 \quad (2.4)$$

З цих формул випливає тотожність для чисел Стірлінга першого роду:

$$s(n+1, k) = -n * s(n, k) + s(n, k-1) \quad (2.5)$$

На основі даної тотожності можна сформувати таблицю значень числа Стірлінга для початкових чисел (табл. 2.1) [6].

Таблиця 2.1

Числа Стірлінга першого роду для відповідних значень n і k

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Числам Стірлінга першого роду як і іншим комбінаторним числам властиві певні тотожності. Основна тотожність притаманна числам Стірлінга першого роду є тотожність:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \text{ при } n \text{ і } k = 0$$

У випадку, якщо одна із змінних більше 0, ми отримуємо дві тотожності:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} \text{ та } \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}, \text{ які також будуть рівними } 0 \text{ [3, с. 55].}$$

З огляду на вище зазначені тотожності, можна вивести загальну тотожність, що, числа Стірлінга першого роду дорівнюють 0, коли хоча б одна чи дві змінні дорівнюють 0, а також у випадку, коли змінна k більша за змінну n .

$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = 0$, якщо $n \neq 0$, $k \neq 0$, $k > n$ [2, с. 73-74].

На основі таблиці чисел Стірлінга першого роду для початкових значень n і k (табл. 2.1.), можна сформувати матрицю знакових чисел Стірлінга першого роду (табл. 2.2):

Таблиця 2.2

Матриця знакових чисел Стірлінга першого роду

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-225	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Крім чисел Стірлінга першого роду обґрунтованими є числа комбінаторики. Числа Стірлінга другого роду – це кількість способів поділу множин, що складаються з n -елементів на k множин, які обов’язково мають бути непорожніми множинами.

Числа Стірлінга другого роду задаються рекурентними співвідношеннями:

$$S(n, n) = 1, \text{ для } n \geq 0,$$

$$S(n, 0) = 0, \text{ для } n > 0,$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k * S(n-1, k), \text{ для } 0 < k < n.$$

Розбиття відповідної множини чисел n -елементної множини за відсутності порожніх множин передбачає що кожна підмножина k містить хоча б один елемент з множини n . Таким чином, кількість розбиттів складає $S(n-1, k-1)$, так як залишок $n-1$ елементів потрібно розподілити на $k-1$ множину [13, с. 119].

Використовуючи таке співвідношення можна вивести числа Стірлінга другого роду для перших значень змінних [6]:

Таблиця 2.3

Числа Стірлінга другого роду для відповідних значень n і k

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Обрахунок числа Стірлінга другого роду здійснюється у такій порядковості:

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2 * S(2, 1) = 1 + 2 * 1 = 1 + 2 = 3$$

Розбиття на $n - 1$ підмножину є можливим у випадку, коли хоча б одна підмножина має два елементи, а всі інші – по одному такому елементу. Тому вибір таких двох елементів і визначає кількість розбиття, тобто кількість розподілів дорівнює кількості способів вибрати два елементи з $n - 1$, що можна відобразити формулою:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right] \quad (2.6)$$

[12, с. 85-86]

Числа Бернуллі в математиці і комбінаториці – це певна послідовність раціональних чисел $B_n, n+1$, обґрунтована швейцарським математиком і основоположником системи варіаційного числення та диференціальних рівнянь Якобом Бернуллі та були паралельно відкриті японським математиком Секі Такакадзу.

Суть визначення числа Бернуллі полягає в обчисленні суми однакових степенів натуральних чисел:

$$\sum_{n=1}^N n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k c_{k+1}^s B_s N^{k+1-s} \quad (2.7)$$

де C_n^k – Біномінальний коефіцієнт

Для належного обчислення чисел Бернуллі застосовується така рекурентна формула:

$$B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n c_{n+1}^{k+1} B_{n-k}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Шляхом застосування даної формули можна визначити основні значення перших ненульових чисел Бернуллі [8, с. 88-89]:

Таблиця 2.4

Значення чисел Бернуллі для перших ненульових значень n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-7\frac{47}{510}$

Послідовність раціональних чисел Бернуллі тісно пов'язана із теорією чисел, на положеннях якої побудовано таку послідовність. Також числа Бернуллі знайшли застосування поряд із дзета-функціями Рімана. Зокрема вчений Леонард Ейлер вказав на взаємопов'язаність чисел Бернуллі та значеннями дзета-функції Рімана при парних $s = 2m$:

$$B_n = -n \zeta(1-n) \text{ для всіх } n \quad (2.9)$$

$$B_{2k} = 2(-1)^{k+1} \frac{\zeta(2k) \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \quad (2.10)$$

Також число Бернуллі знайшло своє застосування у формулі Ейлера – Маклорена, що стосується визначення інтегралів та рядів.

Важливо також охарактеризувати основні властивості, притаманні числам Бернуллі.

Основною властивістю для чисел Бернуллі є те, що всі значення $B_n = 0$, якщо n є непарним числом з множини $\mathbb{N}$, крім випадку коли $n = 1$, для якого $B_1 = -\frac{1}{2}$ або $\frac{1}{2}$.

Числа Бернуллі мають значення щодо многочленів Бернуллі $B_n(x)$ при $x = 0$, де виконується рівність:

$$B_n = B_n(0)$$

Властивість знакозміни притаманна для чисел Бернуллі, відповідно до якої знак кожного послідовного значення числа Бернуллі для парних значень n з множини чисел $\mathbb{N}$ по чергово змінюється з “+” на “-”, починаючи із знаку + для значення $B_2 = \frac{1}{6}$.

Ще однією властивістю є значення числа Бернуллі для числа $n = 0$, яке є ні парним, ні непарним, число Бернуллі для якого рівне 1.

Порядок росту чисел Бернуллі задається такою асимптотичною формулою:

$$|B_n| \approx \frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \quad (2.11)$$

при значеннях $n \rightarrow \infty$, які є парними числами з множини $\mathbb{N}$ [8, с. 91-92].

2.2. Число Ейлера (Непера) та послідовність Фібоначчі

Однією з фундаментальних математичних констант є число Ейлера або як його деколи називають – число Непера. Дане число було обґрунтовано відомими вченими – швейцарським математиком Леонардом Ейлером та шотландським вченим Джоном Непером незалежно один від одного. Проте, сама константа була відкрита відомим швейцарським математиком, Якобом Бернуллі. Дана константа позначається англійською літерою e , а саме число отримало назву числа Ейлера.

Число Ейлера (Непера), або, як його ще називають – натуральне число, яке визначається як сума нескінченного ряду:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (2.12)$$

Відповідно до даної формули, значення числа Ейлера (Непера) дорівнює нескінченному неперіодичному десятковому дробу. $e \approx 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66249\ 77572\ 47093\ 69995\ \dots$ [6]. Оскільки n прямує до нескінченості, то й значення числа Ейлера (Непера) неможливо визначити повністю.

Першим теорію про дане число запропонував шотландський вчений Джон Непер. У своїй праці він запропонував такий варіант визначення логарифму числа x , який передбачав:

$$10^7 * \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right) \quad (2.13)$$

Основна константа визначена швейцарським математиком Якобом Бернуллі була сформована при спробі обчислення значення такої границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (2.14)$$

[9, с. 61]

Дана константа була сформульована за результатами вирішення задачі що стосується складних відсотків, яку можна сформулювати таким чином:

На депозит у банку розміщується 1 одиниця валюти (припустимо, це буде 1 гривня) під 100 % річних, з умовою, що такий відсоток нараховується в кінці строку. У кінці строку отримана сума буде становити 2 гривні. Проте, якщо сума, яку можна отримати, нараховуватиметься періодично протягом року (два рази на рік, щоквартально, щомісячно, щотижнево тощо) і нараховані відсотки будуть докладатися до депозиту?

У випадку, якщо відсоток нараховуватиметься два рази на рік, то в кінці першого періоду можна отримати 50% (100% річних / 2 півріччя), які одразу будуть додані до депозиту. Відсотки за друге півріччя будуть нараховуватись на суму 1,5 гривні. У підсумку, в кінці року сума буде становити: $(1 + 0,5) * (1 + 0,5) = (1 + 0,5)^2 = 2,25$ гривні.

У випадку, якщо нарахування і додавання відсотків до депозиту здійснюватиметься щоквартально, то у кінці року отримана сума буде становити $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2,4414$ гривні.

У випадку, якщо нарахування і додавання відсотків до депозиту проводитиметься щомісячно, то у кінці року отримана сума буде становити $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2,613035$ гривні

Таким чином, для будь якого довільного n кінцева сума буде становити $(1 + \frac{1}{n})^n$, що лягло в основу константи обчислення границі, обґрунтованої швейцарським математиком Якобом Бернуллі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \quad (2.15)$$

Число Ейлера виступає основою для натуральних логарифмів – $\ln e = 1$.

Знайти значення числа Ейлера (Непера) можна також з використанням формули Бінома Ньютона:

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\binom{n}{0} * 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} * 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots \right) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad [8, \text{с. 107}]. \end{aligned}$$

Серед основних властивостей числа Ейлера (Непера) варто виділити такі особливості:

Перш за все, число Ейлера (Непера) є обчислюваним, а значить – арифметичним числом.

Число Ейлера (Непера) є нескінченним неперіодичним десятковим дробом, значення якого обчислюються відповідно до взятого за основу значення індексу n .

Дана константа є ірраціональним та трансцендентним числом, що було обґрунтовано французьким математиком Шарлем Ермітом.

Існує припущення, що число Ейлера (Непера) є нормальним числом, тобто таким числом, в якому імовірність появи кожної з 10 цифр є однаковою.

Натуральне число є єдиним числом серед всіх значень a , щодо якого обов'язково справджується рівність $a^x \geq x + 1$, для всіх значень змінної x .

Число Ейлера (Непера) є основою для натурального логарифму $\ln x = \log_e x$.

Число Ейлера (Непера) знайшло також дуже широке застосування у різного роду математичних задачах та величинах.

Застосування у інтегральних та диференціальних рівняннях стосується зокрема обчислення похідних та інтегралів, в яких використовується дана константа:

Похідна експоненційної функції дорівнює самій функції: $(e^x)' = e^x$.

Первісна, яка містить число Ейлера (Непера) буде мати наступне значення: $\int e^x dx = e^x + C$. З огляду на це, єдиним нетривіальним розв'язком диференціального рівняння $f(x)' = f(x)$, є функція $\varphi = C e^x$, в якому C є довільною константою.

Також константа застосовується у теорії чисел, комплексних числах, функціях Гауса, теорії ймовірностей, складних відсотках, задачах оптимального планування, стандартному нормальному розподілі та інших математичних конструкціях [9, с. 62-63].

Числа Фібоначчі або послідовність Фібоначчі – у математиці є числовою послідовністю F_n , яка задана рекурентним співвідношенням другого порядку:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.16)$$

Дана послідовність була обґрунтована італійським математиком Леонардом Фібоначчі (Пізанським). Вперше дана послідовність була описана раніше як в індійській математиці як числа Вараханка. Проте, дана послідовність була обґрунтована пізніше в ході розв'язку наступної задачі:

Один фермер вирощує кроликів. Кожна пара кроликів народжує ще одну пару кроликів. Коли парі кроликів виповнюється 2 місяці, вони починають давати потомство з частотою 1 пара кроликів кожного місяця. Скільки пар кроликів буде у фермера через n місяців, якщо у фермера на початку була одна пара кроликів (припускається, що кролики не гинуть і кожен народжений дає потомство за визначеною в задачі схемою).

Протягом перших 2 місяців у фермера залишатиметься 1 пара кроликів, які підростатимуть щоб могли давати потомство. Третього місяця буде 2 пари кроликів, так як перша пара кроликів вже змогла дати потомство. Четвертого місяця перша пара кроликів дасть потомство, друга пара кроликів потомства не дасть, так як вони ще підростають щоб могли дати потомство. Тому станом на 4

місяць у фермера буде 3 пари кроликів. Станом на п'ятий місяць, перші дві пари кроликів дадуть потомство, третя пара кроликів підростатиме щоб могли дати потомство. Таким чином, на 5 місяць у фермера буде 5 пар кроликів.

Виходячи з цього можна визначити такі особливості розв'язку такої задачі. Зокрема, щодо кількості пар кроликів після n -го місяця, то їх кількість дорівнює кількості пар кроликів, які були у $n-1$ місяці + кількість народжених за місяць пар кроликів. Кількість народжених пар кроликів буде дорівнювати кількості пар кроликів, яким виповнилося 2 місяці, тобто кількість таких пар кроликів становить $n - 2$.

Якщо кількість пар кроликів після n -го місяця позначити через змінну F_n , то для розв'язку задачі можна отримати таке рекурентне співвідношення:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1 \quad (2.17)$$

За результатом розв'язку задачі утвориться така послідовність чисел:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,

Загалом, послідовність Фібоначчі є усталеною послідовністю таких числових значень:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55, \dots \quad [6]$$

Деякі вчені доповнюють дану послідовність початковим членом – 0.

Відповідно, перші два числа у послідовності Фібоначчі є або 0 і 1 або 1 і 1, і, залежно від обраного початку послідовності, а кожне наступне число послідовності є сумою усіх попередніх чисел послідовності.

Числам Фібоначчі притаманні властивості, які характеризують дану числову послідовність. До таких особливостей можна віднести:

1. Властивість найбільшого спільного дільника двох чисел Фібоначчі. НСД таких чисел дорівнює числу Фібоначчі з індексом, який є рівним найбільшому спільному дільнику індексів, тобто: $(F_m, F_n) = F_{(m, n)}$;

2. F_m ділиться на F_n в тому випадку, коли m ділиться на n (за винятком $n = 2$);

Рис. 2.2. Квадрат що відображає перші значення послідовності чисел

Фібоначчі

Послідовність Фібоначчі є не тільки математичним значенням і знайшла своє обґрунтування далеко за межами математики. Зокрема, числа Фібоначчі часто зустрічаються у природі у різних спіральних формах. Зокрема, черешки листя, які з'єднують листок із стеблом, дотикаються до стебла по спіралі, яка проходить між двома сусідніми листками: $\frac{1}{3}$ повного оберту в ліщини, $\frac{2}{5}$ оберту в дуба, $\frac{3}{8}$ оберту у груші та тополі, $\frac{5}{13}$ оберту у верби. Крім листків, луски на шишках ялинки, сосни, насіння в соняшнику розташовуються спіралью, і кількість спіралей в кожному напрямку, зазвичай, також є числом Фібоначчі [12, с. 87-88].

2.3. Дружні числа, досконалі числа та числа Мерсенна

Дружні числа – це пара натуральних чисел, для яких характерна рівність суми всіх дільників обох чисел.

Для того, щоб визначити, чи є числа дружніми числами, потрібно визначити всі дільники одного числа, обчислити суму всіх дільників такого числа. Потім потрібно визначити всі дільники отриманого числа після додавання всіх дільників першого числа. Якщо сума всіх дільників другого числа дорівнює першому числу, значить числа є дружніми.

Дані розрахунки здійснюються наступним чином:

Наприклад, в нас є число 1 184, яке є дружнім числом для іншого числа. Для початку визначимо всі дільники числа 1 184:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592.

Визначивши дільники числа 1 184 обчислимо суму цих дільників:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1\,210$$

Щоб перевірити, чи є число 1 210, яке ми отримали як суму дільників числа 1 184, дружнім до числа 1 184, потрібно визначити дільники числа 1 210:

1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605.

Для перевірки проводимо обчислення суми дільників числа 1 210:

$$1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1\,184$$

Таким чином, пара чисел 1 184 та 1 210 є дружніми числами.

У таблиці розміщено пари найменших дружніх чисел [6]:

Таблиця 2.5

Найменші пари дружніх чисел

220	284
1 184	1 210
2 620	2 924
5 020	5 564
6 232	6 368
10 744	10 856
12 285	14 595
17 296	18 416
63 020	76 084

Крім стандартного способу визначення дружніх чисел, є спеціальні формули, які дозволяють визначити, які числа є дружніми між собою.

Первинно, основним способом визначення таких чисел є правило Табіта.

Згідно даного правила, існують такі формули для обчислення дружності чисел:

$$p = 3 * 2^{n-1} - 1 \quad (2.19)$$

$$q = 3 * 2^n - 1 \quad (2.20)$$

$$r = 9 * 2^{2n-1} - 1 \quad (2.21)$$

в яких $n > 1$ і є натуральним числом, а p , q , r – прості числа, тоді $2^n p q$ та $2^n r$ є парою дружніх чисел.

Згідно формули Табіта, були визначені як дружні пари чисел (220, 284), (17296, 18416) і (9 363 584, 9 437 056) для значень $n = 2, 4, 7$, проте інші пари цього виду станом на зараз не є відомими.

Правило Табіта було розширено узагальнено в правилі Ейлера. Згідно правила Ейлера, дружні числа визначаються за такими формулами:

$$p = (2^{(n-m)} + 1) * 2^m - 1, \quad (2.22)$$

$$q = (2^{(n-m)} + 1) * 2^n - 1, \quad (2.23)$$

$$r = (2^{(n-m)} + 1) * 2^{m+n} - 1, \quad (2.24)$$

де $m > n > 1$ – натуральне число, а p, q, r – прості числа, тоді $2^n pq$ і $2^n r$ – це пара дружніх чисел.

Також обчислення дружніх чисел здійснюється за правилами Борго. Це правило визначає, що для пари дружніх чисел виду $A = au$ та $B = as$ числа s та $p = u + s + 1$ є простими числами, і a не ділиться на p , то для всіх натуральних значень n , для яких обидва числа $q_1 = (u + 1) p^{n+1} - 1$ та $q_2 = (u + 1)(s + 1) p^n - 1$ прості, то числа $B_1 = Ap^n q_1$ та $B_2 = ap^n q_2$ будуть дружніми числами [8, с. 135-136].

Близькими за змістом до дружніх чисел є досконалі числа.

Вперше досконалі числа були досліджені грецьким вченим Евклідом приблизно в 300-му році до н.е.. Ним було обґрунтовано твердження, що, якщо $2^p - 1$ є простим числом, то $2^{p-1} (2^p - 1)$ буде досконалим числом. Для давніх греків були відомі 3 досконалі числа – 6, 28 та 496. Після Евкліда дослідженням досконалих чисел займався грецький математик Нікомах Гераський. Нікомах визначив четверте досконале число, яке було відоме стародавнім грекам – 8 128. Обґрунтування існування таких чисел було розширено відомим богословом Філоном Олександрійським, який згадував, що світ створений за 6 днів, що є першим досконалим числом, а Місяць здійснює повний оберт по своїй орбіті за 28 днів, що є другим досконалим числом. Розвиток теорії досконалих чисел продовжив єгипетський математик Ізмаїл Ібн Фоллус (роки життя – 1194-1252), який обґрунтував п'яте досконале число – 33 550 336. Продовжив пошук досконалих чисел італійський математик П'єтро Котальді, який знайшов шосте і сьоме досконалі числа – 8 589 869 056 та 137 438 691 328. Також даний вчений довів, що будь-яке досконале число закінчується цифрою 6 або 8. Вивчення досконалих чисел продовжувалось також згаданим вище математиком, Леонардом Ейлером, який у XVIII столітті довів, що формула $2^{p-1} (2^p - 1)$, яка описує всі парні досконалі числа [7, с. 197].

У теорії чисел передбачається, що досконалим числом є таке натуральне число, яке дорівнює сумі додатних дільників такого числа, не враховуючи це саме число, або яке є рівним половині суми всіх його дільників з врахуванням цього числа. Така сума додатних дільників отримала назву Аліквотної суми, тому визначення досконалого числа можна сформулювати як таке натуральне число, яке дорівнює його Аліквотневій сумі. Формулу, за якою можна обчислити досконалість числа подають у формі такої функції:

$$\sigma_1(n) = 2n \quad (2.25)$$

в якій $\sigma_1(n)$ – це функція суми дільників числа n .

Основною формулою для пошуку досконалих чисел є формула Евкліда:

$$2^{p-1} (2^p - 1) \quad (2.26)$$

З використанням цієї формули були обчислені перші відомі стародавнім грекам досконалі числа:

$$\text{якщо } p = 2; 2^{2-1} (2^2 - 1) = 2 (4 - 1) = 2 * 3 = 6$$

$$\text{якщо } p = 3; 2^{3-1} (2^3 - 1) = 4 (8 - 1) = 4 * 7 = 28$$

$$\text{якщо } p = 5; 2^{5-1} (2^5 - 1) = 16 (32 - 1) = 16 * 31 = 496$$

$$\text{якщо } p = 7; 2^{7-1} (2^8 - 1) = 64 (128 - 1) = 64 * 127 = 8128.$$

Леонард Ейлер у XVIII ст. довів, що формула Евкліда описує всі парні досконалі числа. Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між досконалими парними числами та простими числами Мерсенна, зокрема він вказував на походження кожного окремого досконалого парного числа від простого числа Мерсенна і навпаки. Даний висновок прийнято називати теоремою Евкліда-Ейлера. Поки що відомо 51 парне досконале число. Однак, невідомим залишається відповідь на питання, чи існує нескінченно багато досконалих чисел та простих чисел Мерсенна [7, с. 197-198].

Існують дискусії щодо того, чи існують непарні досконалі числа. Серед науковців, які досліджували досконалі числа не було одностайної думки, щодо них. Станом на сьогодні жодного непарного досконалого числа не було обчислено. Вченим Жаком Лефевром було висунуто гіпотезу, згідно якої формула Евкліда охоплює собою всі недосконалі числа, відповідно в результаті

її використання неможливо отримати непарне число, відповідно непарних досконалих чисел не існує. Леонард Ейлер вказував, що питання існування непарних досконалих чисел залишатиметься найважчим питанням даної тематики.

Сума власних дільників чисел, за винятком того самого числа дає три види результатів: така сума є меншою за те число, рівною тому числу або більшою за те число. У випадку рівності суми власних дільників і числа, таке число буде називатись досконалим числом. У випадку, якщо сума власних дільників є меншою за число, такі числа називають недостатніми, а якщо більшою за власне число – надлишковими.

Для досконалих чисел характерні такі особливості та ознаки:

1. Число 28 є єдиним досконалим числом, яке можна задати рівнянням виду $x^3 + 1$ і його можна подати також як суму кубів двох додатніх чисел – $3^3 + 1^3$.

2. Сума обернених до дільників чисел завжди дорівнює 2, наприклад:

$$\text{Для досконалиго числа } 6: \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

$$\text{Для досконалиго числа } 28: \frac{1}{28} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = 2$$

3. Кількість дільників досконалиго числа (парного або непарного) має бути парною, так як досконале число не може бути повним квадратом.

4. Будь яке досконале число закінчується на 6 чи 28.

5. Цифра 6 є єдиним досконалим числом, яке є безквадратним [8, с. 124].

З досконалими числами тісно пов'язане поняття числа Мерсенна. Число Мерсенна – це число назване в честь французького математика Марена Мерсенна XVII століття, яке є числом виду:

$$M_n = 2^n - 1 \quad (2.27)$$

в якому n – це натуральне число.

Послідовність чисел Мерсенна є послідовністю вигляду:

1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1 023, 2 047, 4 095, 8 191, 16 383, ...,

Найбільшим простим числом Мерсенна, відомим на сьогодні є п'ятдесят перше число – $2^{82\,589\,933}$, знайдене в 2018 році. Це число містить 24 862 048 знаків.

Числа Мерсенна отримали назву найвідоміших простих чисел, які є добре відомими у зв'язку з ефективним критерієм простоти Люка-Лемера.

Простими числами Мерсенна в множині чисел Мерсенна називають числа M_p з простими індексами p . Послідовність даного числа виглядає наступним чином:

3, 7, 31, 127, 2 047, 8 191, 131 071, 524 287, 8 388 607, ..., [6]

До основних ознак числа Мерсенна можна віднести такі особливості:

1. Притаманність наслідку малої теореми Ферма, за яким будь-який дільник числа M_p для простого p має вигляд:

$$2^{pk} + 1 \quad (2.28)$$

де k є цілим числом.

2. Згідно доведення Ейлера, кожне досконале парне число є числом вигляду $2^{p-1} M_p$, в якому число Мерсенна є простим.

Як і в питанні парних досконалих чисел, так і в проблематиці чисел Мерсенна досі невирішене питання нескінченості кількості простих чисел Мерсенна, які перебувають у взаємозв'язку з досконалими парними числами [7, с. 198-199].

2.4. Інші числа Каталана та інші послідовності чисел як спеціальні числа

Числа Каталана – це числова послідовність, яка відображає впорядковане розбиття певної n -елементної множини в комбінаториці та математиці, яка отримала назву на честь відомого бельгійського математика Чарльза Каталана. Дана числова послідовність вперше була помічена швейцарським математиком Леонардом Ейлером, проте належно обґрунтована математиком Каталаном [1, с. 43].

Найбільш загально дану послідовність можна відобразити у вигляді наступного співвідношення:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i} \quad (2.29)$$

Дане співвідношення можна відобразити у вигляді будь-якої правильної структури, яка однозначно представлена у формі $w = (w_1)w_2$.

З використанням даного співвідношення можна отримати таку послідовність перших значень числа Каталана:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1 430, 4 862, 16 796, 58 786, 208 012, 742 900, 2 674 440, 9 694 845, 35 357 670, 129 644 790, 477 638 700, 1 767 263 190, ..., [6]

Число Каталана, крім вищезазначеного рекурентного співвідношення можна визначити такими способами:

1. Число Каталана можна розрахувати як кількість розбиття опуклого $n+2$ -кутника на різної форми трикутники шляхом проведення в такому $n+2$ -кутнику діагоналей, які не перетинаються (рис. 2.3);

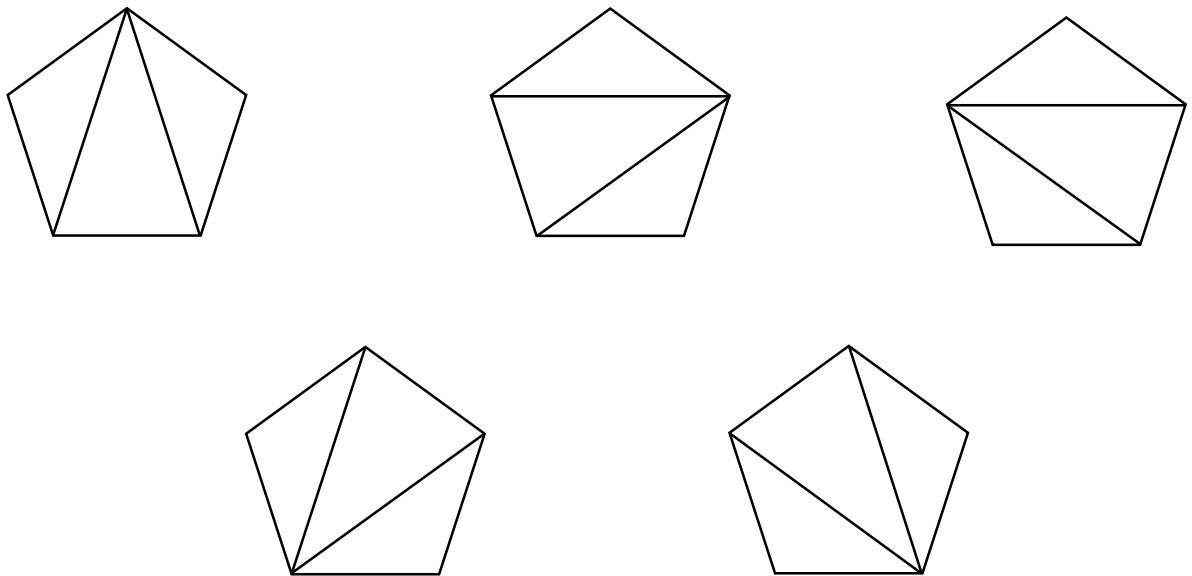


Рис. 2.3 Наочне відображення графічного способу (розподіл $n+2$ кутника на трикутники) розрахунку числа Каталана

2. Також число Каталана можна обчислити як кількість правильних дужкових структур. Основною вимогою є дотримання правил утворення дужкових послідовностей, зокрема щодо необхідності закриття дужок та їх порядковості. Приклад такої послідовності, якщо дано 3 пари дужок:

$((()))$, $(())()$, $((()))$, $()(())$, $()()()$.

Таким чином, число Каталана, при $n = 3$ буде дорівнювати 5.

3. Ще одним способом є обчислення шляхом з'єднання $2n$ точок на колі n , де n – це порядковий номер числа з послідовності чисел Каталана кількістю хорд, які не перетинаються (рис 2.4);

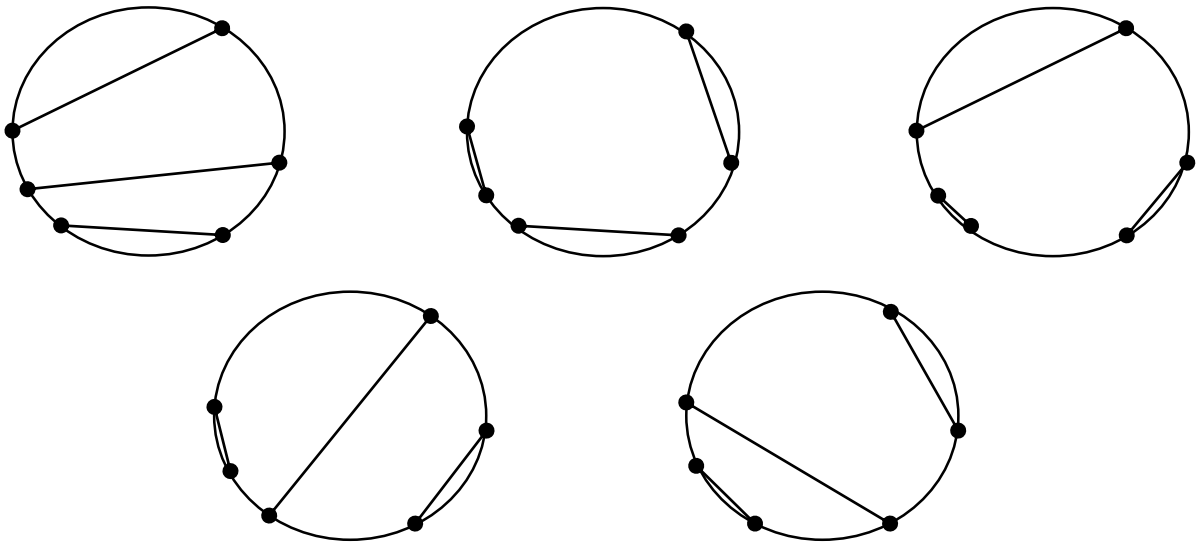


Рис. 2.4. Наочне відображення графічного способу (з'єднання точок на колі хордами) розрахунку числа Каталана

Число Каталана має значення при $n = 0$, яке дорівнює 1 [1, с. 43-44].

Крім згаданих в цьому розділі числових послідовностей та спеціальних чисел, існують інші послідовності чисел.

Число Белла – це число в комбінаториці, яке визначає кількість всіх неупорядкованих розбиттів певної n -елементної множини, назване в честь американського математика Еріка Белла, який обґрунтував існування даного числа в 30-х роках XX ст. Як приклад пошуку даного числа можна визначити необхідність розміщення пронумерованих однорідних предметів по ідентичних коробках [2, с. 75].

Основною формулою для обчислення числа Белла є сума чисел Стірлінга другого роду:

$$B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m) \quad (2.30)$$

згідно якої $B_0 = 1$ [2, с. 74].

Для даної формули виконується відповідне рекурентне співвідношення:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad (2.31)$$

Для чисел Белла також виконується формула Добинського:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} \quad (2.32)$$

З використанням даних формул можна визначити такі перші значення для числа Белла:

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4 140, 21 147, 115 975, ..., [6]

Також число Белла можна відобразити графічним способом (для $n = 4$) (рис. 2.5):

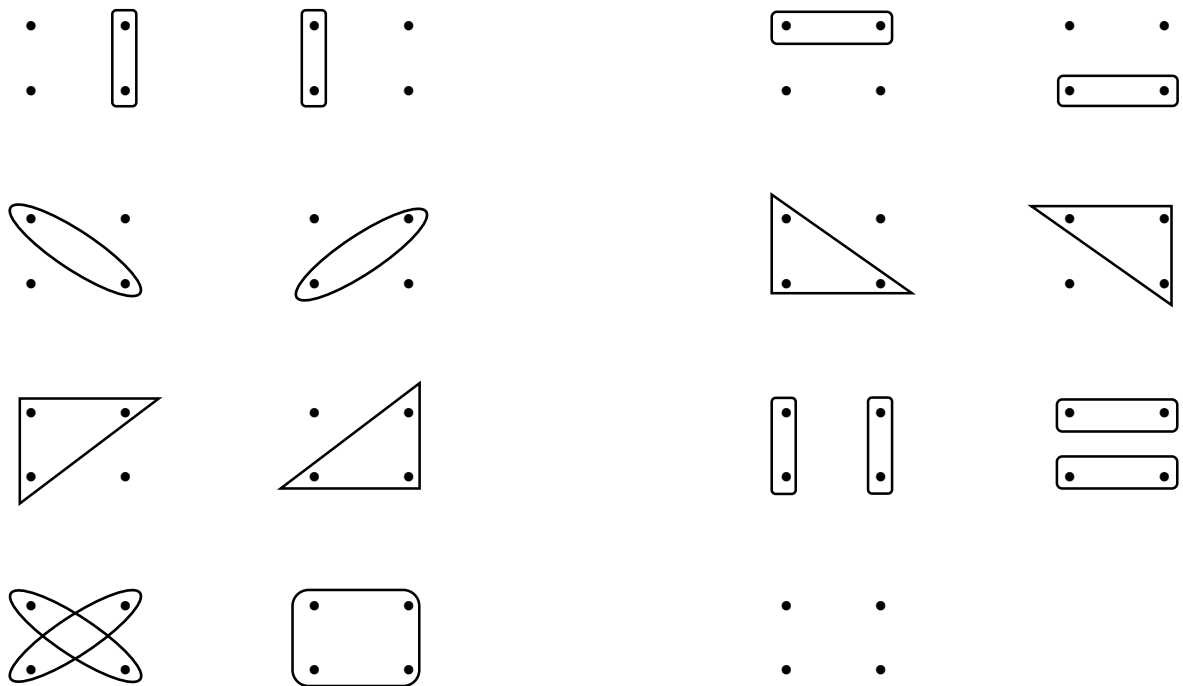


Рис. 2.5. Наочне відображення графічного способу обчислення числа Белла

Число Люка – це цілочислова послідовність, в якій кожен наступний член послідовності визначається як сума двох попередніх членів послідовності, названа на честь відомого французького математика Франсуа Люка.

Дана послідовність за своїм змістом є схожою до послідовності чисел Фібоначчі, зокрема за своїм послідовністю чисел, в якій кожен наступний член послідовності визначається як сума попередніх членів. Основною відмінністю між даними послідовностями є різні початкові значення, що призводить до відмінності значень всіх наступних членів послідовності.

Основною формулою для обчислення числа Люка є наступна формула:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (2.33)$$

де, n – порядковий номер числа Люка [8, с. 158].

Визначено, що значення числа Люка при $n = 0$ дорівнює 2, а при значенні $n = 1$ число Люка дорівнює 1.

Загалом, використовуючи дану формулу можна обчислити значення чисел Люка для перших значень змінної n :

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1 364, 2 207, 3 571, 5 778, 9 349, ..., [6].

Як і послідовність Фібоначчі, числа Люка можна поширити на цілі від'ємні числа, для обчислення яких можна використовувати наступну формулу:

$$L_{n-2} = L_n - L_{n-1} \quad (2.34)$$

або дану формулу:

$$L_{-n} = (-1)^n L_n \quad (2.35)$$

В результаті використання даних формул можна отримати таку подвійно нескінченну числову послідовність:

– 9 349, 5 778, – 3 571, 2 207, – 1 364, 843, – 521, 322, – 199, 123, – 76, 47, – 29, 18, – 11, 7, – 4, 3, – 1, 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1 364, 2 207, 3 571, 5 778, 9 349, ...,

Числа Люка разом із числами Фібоначчі утворюють послідовність Люка [8, с. 160].

Послідовність Морзе-Тью – це двійкова послідовність чисел, в якій одне з двох чисел замінюється на протилежне.

Зазвичай, дана послідовність утворюється числами 0 та 1, проте можна використовувати будь-які числові значення, оскільки така заміна не впливатиме на сутнісний характер послідовності.

Послідовність утворюється шляхом заміни числового значення та його дописування до початкового на відповідній стадії значення послідовності. Загалом, процес утворення послідовності можна відобразити таким чином:

$$0 \rightarrow 1$$

$$01 \rightarrow 10$$

$$0110 \rightarrow 1001$$

$0110\ 1001 \rightarrow 1001\ 0110$

$0110\ 1001\ 1001\ 0110 \rightarrow 1001\ 0110\ 0110\ 1001$

$0110\ 1001\ 1001\ 0110\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001 \rightarrow 1001\ 0110\ 0110\ 1001\ 0110\ 1001\ 1001\ 0110$

$0110\ 1001\ 1001\ 0110\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001\ 1001\ 0110\ 0110\ 1001\ 0110\ 1001\ 1001\ 0110$

Для обчислення n -го елемента послідовності потрібно записати номер n у двійковій формі, і якщо число одиниць у двійковому записі числа n непарне, то t_n буде дорівнювати 1, якщо парне – 0.

Висновки до розділу 2:

Складні числа та числові послідовності мають важливе значення для вирішення задач на основі законів комбінаторики, оскільки вони відображають сутність певного закону комбінаторики і дозволяють швидко вирішити задачу з використанням сформованого правила вирішення завдань відповідного типу.

В комбінаториці та математиці існує чимало таких чисел та послідовностей. Числа Стірлінга є числом, яке відображає кількість перестановок певного роду відповідно до кількості циклів. Дане число існує у двох варіаціях, які різняться між собою правилом додержання порядковості розміщення чисел, що входять до послідовності та їхньої циклічності. Числа Бернуллі дозволяють обчислити значення відповідного значення для кожної парної змінної, передбачаючи значення 0 для всіх непарних змінних.

Число Ейлера (Непера), або як його прийнято називати – натуральне число. Це спеціальне число в математиці, яка стала константою, яка відображає нескінченний степеневий розрахунок значення для відповідного значення n . Оскільки степеневе значення є нескінченим, то й число Ейлера є нескінченим десятковим дробом. Дане число знайшло своє широке застосування у математиці при обчисленні логарифмів, пошуку невідомої змінної та інших завдань. Числа Фібоначчі є складною послідовністю чисел, яка відображає порядкове додавання двох попередніх значень послідовності для знайдення наступного члена послідовності. З цією послідовністю тісно пов'язане число Люка, основною

відмінністю якого є початкові значення послідовності, при однаковому способі обчислення всіх наступних значень чисел послідовності.

Дружні числа є особливими парами послідовностей чисел, в якій сума дільників кожного числа (за винятком його власного значення) дорівнює його дружньому числу. Пари дружніх чисел є встановленими і не можуть бути розширені. Дещо схожими до таких чисел є досконалі числа. Досконалими є ті числа, в яких аліквотна сума значень дільників якого дорівнює самому числу. Оскільки сума може бути більшою чи меншою за саме число, то й відповідно існують поняття надлишкових та недостатніх чисел, що не є предметом дослідження даної роботи. Досконалі числа пов'язані з числами Мерсенна, які є числовою послідовністю, в якій кожен член послідовності є значенням піднесеного до степеня числа 2 за вирахуванням одиниці. У зв'язку з цим, всі значення числа Мерсенна є непарними.

Числа Каталана за своєю сутністю є схожими до числа Стірлінга, які відображають можливість впорядкованого розбиття певної n -елементної множини на частини. Дана послідовність має сталі значення, які також дозволяють знайти відповідь на варіативність вирішення відповідного формату завдання. Протилежним числу Каталана є число Белла, яке відображає невпорядковане розбиття певної множини на частини, що дає відмінні значення при тих самих значеннях множин. Послідовність Морзе-Туа відображає логічну заміну числових значень при наявності двох числових значень один на одне. Дана послідовність корисна при наявності двох можливих варіантів вирішення задачі у разі наявності нескінченно великого значення кількості умов. Крім розглянутих існують інші спеціальні числа та числові послідовності, які не розглядались у даній роботі через їхнє непоширене застосування.

РОЗДІЛ III. МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ ЩОДО СПЕЦІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

3.1. Методичні матеріали для аудиторної роботи з теми «Спеціальні числа в математиці»

Щодо роботи над даною тематикою на факультативі, то для закріплення відповідних знань необхідно попрацювати над вирішенням *практичних завдань*. Нами запропоновано такі завдання для вирішення на занятті:

Задача 1. В залі кафе є 3 столики. В кафе на обід прийшло 12 людей, які мають суму коштів, яка дорівнює їхньому порядковому номеру. Чи можна розмістити всіх відвідувачів за три столики, щоб були дотримані такі умови:

1. Сума коштів за кожним столиком має бути однакою;
2. Кількість осіб за кожним з трьох столиків буде однакою;
3. Існує кілька варіантів розміщення з дотриманням умов 1 і 2.

Якщо варіанту розміщення, який задовільняє всі вищезазначені варіанти немає, то скільки існує варіантів розміщення відвідувачів, які задовільняють першу умову. Зобразіть графічно всі можливі варіанти розміщення відвідувачів, задовільняючи першу умову. Обчисліть число Стірлінга за даними в умові задачі числами без накладення умов.

Розв'язок. Такого варіанту розміщення, щоб задовільнити всі три умови немає, оскільки пункти 1 і 2 є несумісними, що обумовлено наявністю різної суми коштів у кожного відвідувача. Тобто можна розмістити таким чином, щоб сума коштів була однаковою за кожним столиком, проте кількість осіб за кожним столиком буде відрізнятися. Натомість дотримання умов 2 і 3 можливе за виключення умови 1.

Щодо варіанту розміщення з дотриманням умови 1, то існує такий варіант розміщення відвідувачів. В нас є така послідовність:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Сума чисел послідовності становить 78, відповідно за кожним столиком потрібно розмістити такі порядкові номери, щоб загальна сума номерів за столиком дорівнювала 26, що відповідатиме правилу циклічності послідовності.

Таким чином, отримаємо таку сукупність циклів:

[2, 4, 5, 7, 8]; [1, 6, 9, 10]; [3, 11, 12]

Розміщуємо людей за столиками наступним чином (рис. 3.1):

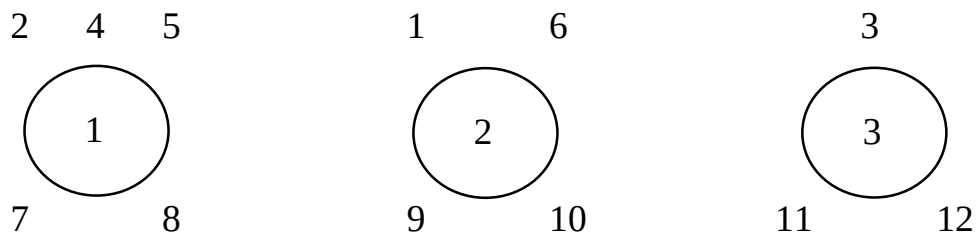


Рис 3.1. Наочний варіант вирішення задачі

Відповідно до розміщення, сума порядкових номерів за кожним столиком однакова. При цьому, правило щодо однакової кількості осіб за столиком не дотримано і кількість осіб за кожним столиком змінюється і арифметичній прогресії у бік спадання.

Обчислене число Стірлінга першого роду відповідно до калькулятора становить: $1\,509 \cdot 10^5$.

Задача 2. Вкажіть чому дорівнює:

1. Число Стірлінга першого роду, при $n = 7$, $k = 8$;
2. Число Стірлінга другого роду, при $n = 6$, $k = 0$;
3. Число Бернуллі, при $n = 6$;
4. Число Ейлера, обмежившись 8 цифрами після коми;
5. Число Фібоначчі, при $n = 4$;
6. Третю пару дружніх чисел;
7. Друге досконале число;
8. Число Мерсенна, при $n = 5$;
9. Число Каталана, при $n = 11$;
10. Число Белла, при $n = 8$;
11. Число Люка, при $n = 12$;

12. Наступне значення для числа 0110 1001 1001 0110 послідовності Морзе-Туа.

Розв'язок

1. Не існує;
2. 0;
3. $\frac{1}{42}$
4. 2,71828 182
5. 3;
6. 2 620 і 2 924;
7. 28;
8. 31;
9. 58 786;
10. 4 140;
11. 322;
12. 1001 0110 0110 1001.

3.2. Методичні матеріали для самостійної роботи на тему «Спеціальні числа в математиці». Генератор простих чисел.

Крім розв'язку практичних завдань на занятті, для закріплення матеріалу пропонується окремі завдання виносити на самостійне розв'язування з подальшою перевіркою правильності їх виконання. Для *самостійної роботи* пропонується вирішення таких завдань:

Задача 1. В залі кафе є 3 столики. В кафе на обід прийшло 9 людей, які мають суму коштів, яка дорівнює їхньому порядковому номеру. Чи можна розмістити всіх відвідувачів за три столики, щоб були дотримані такі умови:

1. Сума коштів за кожним столиком має бути однакова;
2. Кількість осіб за кожним з трьох столиків змінювалася в арифметичній прогресії;
3. Варіантів розміщення, який задовільняє дві попередні умови є декілька.

Якщо варіанту розміщення, який задовільняє всі вищезазначені варіанти немає, то скільки існує варіантів розміщення відвідувачів, які задовільняють першу умову. Зобразіть графічно всі можливі варіанти розміщення відвідувачів, першу умову. Обчисліть число Стірлінга за даними в умові задачі числами без накладення умов.

Розв'язок. Такого варіанту розміщення, щоб задовільнити всі три умови немає. В даному випадку виключною умовою є умова 3, оскільки існує один варіант розміщення відвідувачів, який буде задовільняти умови 1 і 2, проте наявність тільки одного варіанту розміщення виключає застосування умови 3.

Щодо варіанту розміщення з дотриманням умови 1, то існує такий варіант розміщення відвідувачів. В нас є така послідовність:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Сума чисел послідовності становить 45, відповідно за кожним столиком потрібно розмістити такі порядкові номери, щоб загальна сума номерів за столиком дорівнювала 15, що відповідатиме правилу циклічності послідовності.

Таким чином, отримаємо таку сукупність циклів:

[1, 3, 4, 7]; [2, 5, 8]; [6, 9]

Розміщуємо людей за столиками наступним чином (рис. 3.2):

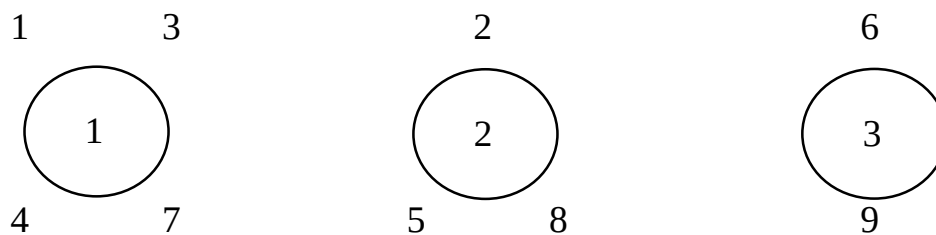


Рис 3.2. Наочний варіант вирішення задачі

Відповідно до розміщення, сума порядкових номерів за кожним столиком однакова. При цьому, дотримано правило зміни кількості осіб за кожним столиком, яка змінюється в арифметичній прогресії, різниця якої дорівнює – 1.

Обчислене число Стірлінга першого роду відповідно до калькулятора становить: 118 124.

Задача 2. Вкажіть, чому дорівнює:

1. Число Стірлінга першого роду, при $n = 6$, $k = 4$;

2. Число Стірлінга другого роду, при $n = 7$, $k = 5$;
3. Число Бернуллі, при $n = 8$;
4. Число Ейлера, обмежившись 15 цифрами після коми;
5. Число Фібоначчі, при $n = 25$ і $n = -6$;
6. Сьому пару дружніх чисел;
7. Четверте досконале число;
8. Число Мерсенна, при $n = 8$;
9. Число Каталана, при $n = 14$;
10. Число Белла, при $n = 10$;
11. Число Люка, при $n = 15$;
12. Наступне значення для числа 0110 1001 1001 0110 1001 0110 0110 1001 1001 0110 0110 1001 1001 0110 1001 1001 0110 послідовності Морзе-Туа.

Розв'язок.

1. 85;
2. 140;
3. $-\frac{1}{30}$;
4. 2,71828 18284 59045;
5. 75 025 і -8 ;
6. 12 285 і 14 595;
7. 8 128;
8. 255;
9. 2 674 440;
10. 115 975;
11. 1 364;
12. 1001 0110 0110 1001 0110 1001 1001 0110 0110 1001 1001 0110 1001 0110 1001.

Задача 3. Створіть генератор простих чисел у програмі excel.

Для виконання цього завдання, учням пропонуються такі методичні матеріали:

Методичні матеріали для виконання задачі 3

I. Спосіб 1 – використовуючи функції:

1. Відкриваємо додаток Excel.
2. Вмикаємо на вкладку формули (Formulas).
3. Натискаємо на вікно «Диспетчер імен» (Name manager) та натискаємо на кнопку «Створити» (New) (рис. 3.3):

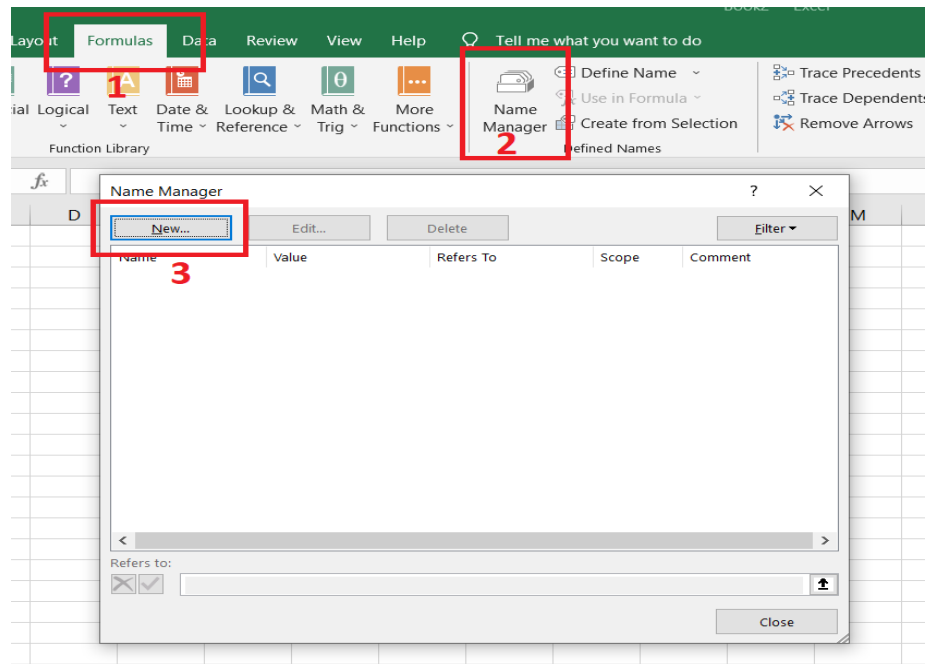


Рис. 3.3. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

4. У вікні, яке відкрилося вводимо назву оператора «range», в рядку для формули вводимо наступну формулу:

`=ROW(INDIRECT(Лист1!$B$1&":"&Лист1!$B$2` (рис. 3.4):

Лист1 означає лист у якому проводиться робота.

\$B\$1 і \$B\$2 – це номери клітинок, якими обмежуватиметься проміжок для пошуку простих чисел.

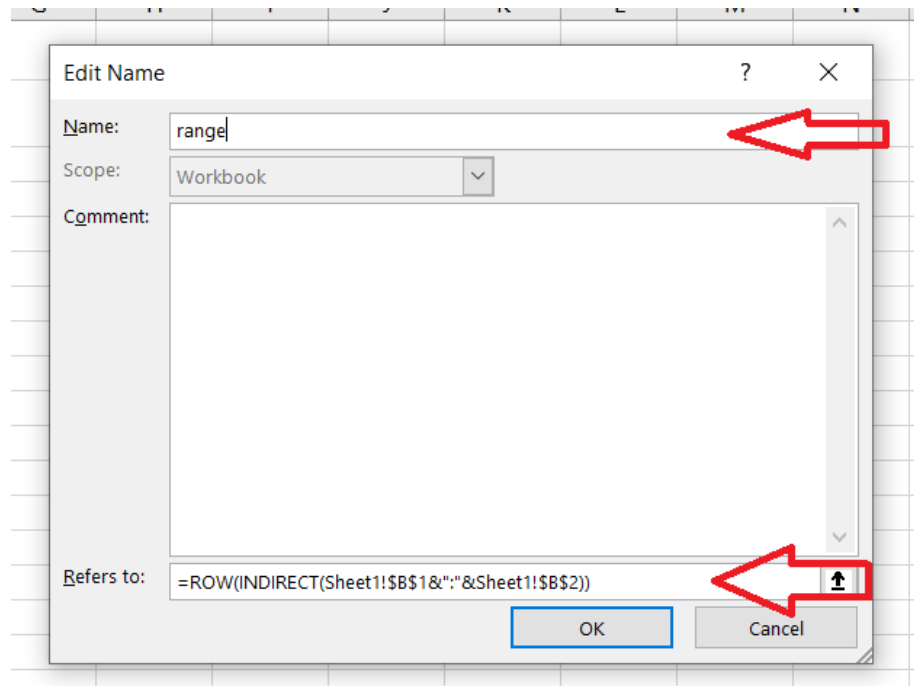


Рис. 3.4. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

5. Повторюючи кроки 2 і 3 створюємо ще одного оператора, вводячи назву «prime» та наступну формулу:

=SMALL(IF(MMULT(--(IF(range>TRANSPOSE(range-Лист1!\$B\$1+2),MOD(range,(range>TRANSPOSE(range-Лист1!\$B\$1+2))*TRANSPOSE(range-Лист1!\$B\$1+2)))=0), range-Лист1!\$B\$1+2)=0,range),ROW(INDIRECT("1:"&Лист1!\$B\$2))) (рис. 3.5):

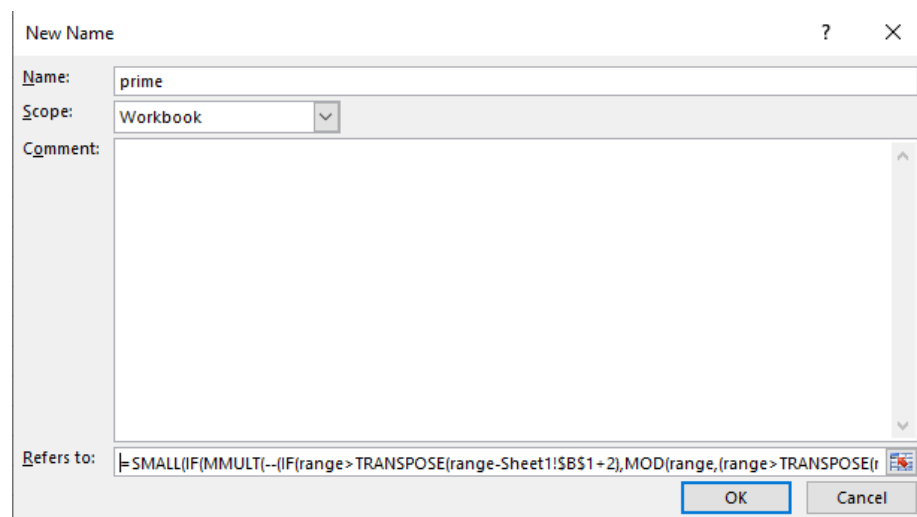


Рис. 3.5. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

6. Після цього вводимо в клітинка В1 та В2 числа, які утворять діапазон для пошуку простих чисел.

7. Обираємо будь-який стовпець, крім стовпця В і вводимо у одній з перших клітинок стовпця таку формулу:

=IFERROR(prime,"")

Після введення формули натискаємо комбінацію клавіш CTRL + SHIFT + ENTER, яка поширить формулу на весь стовпець. У вибраному стовпці мають з'явитися числа, які є простими на заданому в попередньому кроці проміжку.

II. Через режим розробника

1. Якщо у верхньому рядку немає рядка «Розробник», вмикаємо такий режим через налаштування: Файл – Налаштування – Налаштування меню, знаходимо пункт «Розробник» і ставимо галочку щоб ввімкнути даний пункт.

2. Після цього вмикаємо Visual Basic на вкладці розробник або натискаємо комбінацію клавіш ALT = F11.

3. У відкритому вікні натискаємо на вкладку «Вставити» (Insert) та обираємо форму «Модуль» (Module) (рис. 3.6 і 3.7).

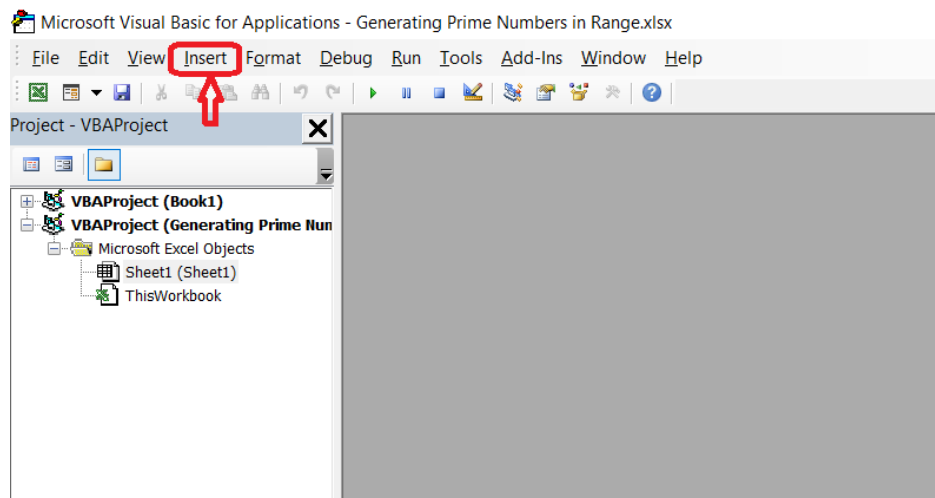


Рис. 3.6. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

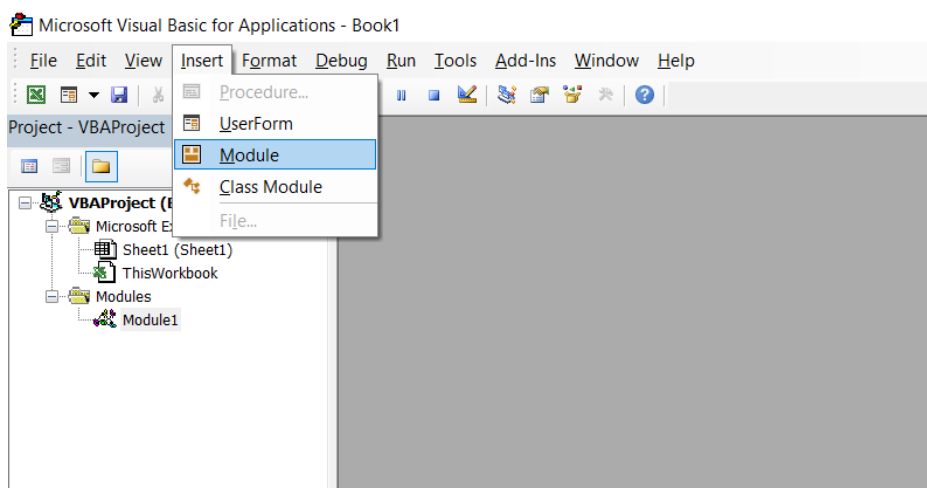


Рис. 3.7. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

4. У відкритому вікні вводимо наступний код:

Function PRIME(Start_val, End_val As Long)

'Updateby Extendoffice 20160613

Dim val As String

For i = Start_val To End_val

For j = 2 To i - 1

If i Mod j = 0 Then GoTo 20:

Next j

val = val & i & ", "

20:

Next i

PRIME = val

End Function

Введений код має бути наступного вигляду (рис. 3.8):

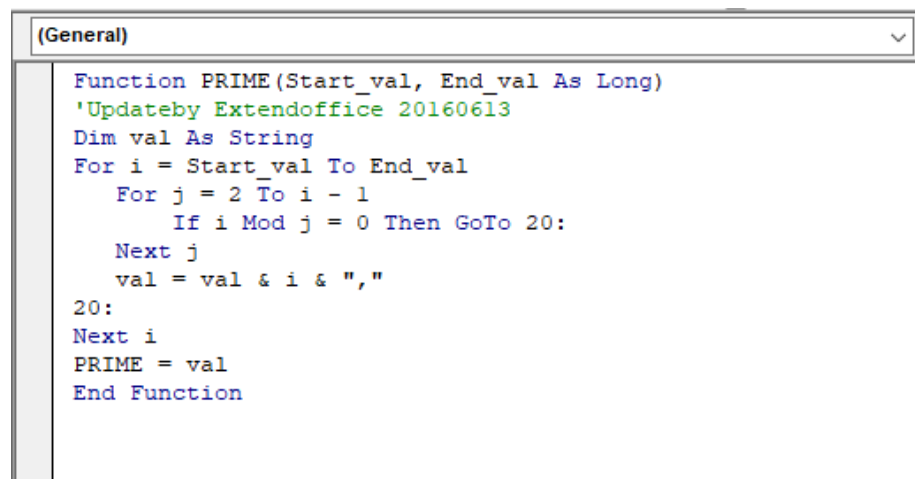


Рис. 3.8. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

5. Натискаємо комбінацію клавіш CTRL + S, щоб зберегти даний файл і після цього закриваємо віртуальне середовище Visual Basic.

6. Відкриваємо робочий лист у Excel і вводимо таку формулу:

=prime(10, 50), в якій цифри 10 і 50 визначають проміжок, на якому будуть визначені прості числа. Натискаємо клавішу Enter і у комірці, в якій було введено дану формулу буде відображено прості числа на визначеному проміжку (рис. 3.9):

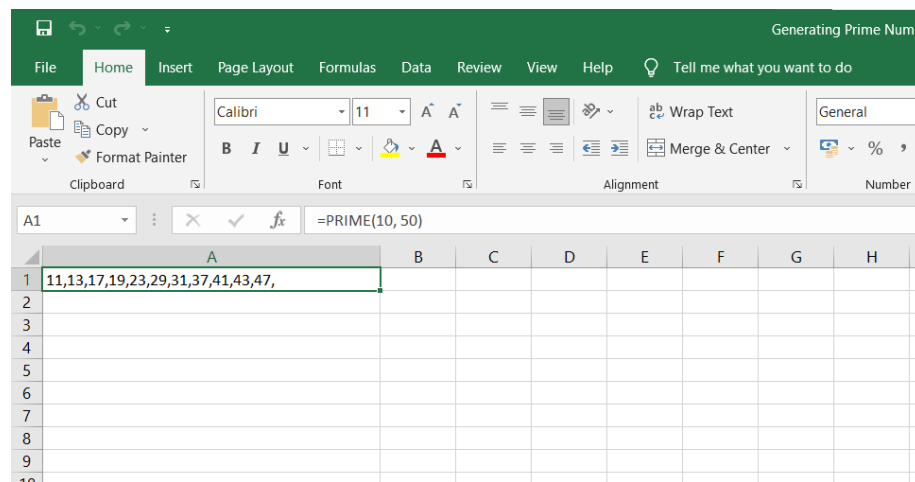


Рис. 3.9. Ілюстративний матеріал до методичних вказівок

Завдання даного розділу дозволять самостійно пропрацювати тему

3.3. Матеріали для перевірки рівня засвоєння матеріалу

Завдання даного підрозділу призначені для перевірки рівня засвоєння учнями теоретичного матеріалу на факультативному занятті, присвяченому темі спеціальних чисел у математиці. Одним із найбільш обґрунтованих форм

- а) початковим значенням послідовності;
- б) способом обчислення;
- в) тим, що послідовність чисел Люка не поширюється на від'ємні числа, на відміну від чисел Фібоначчі;
- г) тим, що послідовність чисел Фібоначчі є нескінченною, а послідовність чисел Люка має граничні значення.

II. Встановіть відповідність:

7. Встановіть відповідність між формулами обчислення та величиною, яку вони дозволяють обчислити:

- 1. Число Стірлінга другого роду;
- 2. Число Фібоначчі;
- 3. Число Люка;
- 4. Досконалі числа.

а) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$;

б) $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k * S(n-1, k)$;

в) $B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n c_{n+1}^{k+1} B_{n-k}$;

г) $2^{p-1} (2^p - 1)$;

д) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Встановіть відповідність між формулами обчислення та величиною, які вони дозволяють обчислити:

- 1. Число Стірлінга першого роду;
- 2. Число Мерсенна;
- 3. Число Каталана;
- 4. Число Бернуллі.

а) $B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^n c_{n+1}^{k+1} B_{n-k}$;

б) $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$;

в) $M_n = 2^n - 1$;

г) $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-1-i}$;

д) $s(n+1, k) = -n * s(n, k) + s(n, k-1)$.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Встановіть відповідність між числами та способом їх обчислення:

1. Число Люка;
2. Досконалі числа;
3. Число Стірлінга другого роду;
4. Послідовність Морзе-Туа.

а) обчислюється шляхом співставлення суми дільників числа за вирахуванням самого числа;

б) визначається як розбиття множини чисел на відповідні підмножини за відсутності порожніх множин;

в) утворюється шляхом поетапної зміни значень чисел 0 і 1;

г) кожне наступне значення обчислюється шляхом додавання двох попередніх значень;

д) обчислюється як кількість перестановок згідно кількості їх циклів, беручи за основу нерухомі точки як цикли довжиною 1.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

III. Оберіть дві правильні відповіді

10. Виберіть характеристики, які притаманні числу Бернуллі:

- а) значення числа Бернуллі при $n = 1$ має два значення;
- б) число Бернуллі визначається як сума двох попередніх значень числа;
- в) для значень числа Бернуллі характерне правило знакозміни;
- г) для $n = 0$ число Бернуллі дорівнює 0.

11. Визначіть які характеристики притаманні числу Ейлера:

- а) обчислюється як кількість всіх можливих варіантів розподілу множини між певними підмножинами так, щоб жодна підмножина не була порожня;
- б) є парою чисел, які за певними ознаками є рівними одне одному;

в) є нескінченним неперіодичним десятковим дробом;

г) є арифметичним числом.

12. Вкажіть твердження, які характеризують досконалі числа:

а) існує 10 досконалих чисел на проміжку $n \in (0; 100)$;

б) найменшим досконалим числом є число 6;

в) усі відомі математиці досконалі числа є парними;

г) математиці відомий вичерпний перелік досконалих чисел (153 досконалі числа).

Ключ до тесту перевірки рівня засвоєння знань учнями:

1. Б);

2. Г);

3. Г);

4. В);

5. Г);

6. А);

7.

	А	Б	В	Г	Д
1		Х			
2					Х
3	Х				
4				Х	

8.

	А	Б	В	Г	Д
1					Х
2			Х		
3				Х	
4	Х				

9.

	А	Б	В	Г	Д
1				Х	
2	Х				
3		Х			
4			Х		

10. А, В);

11. В, Г);

12. Б, В).

Висновки до розділу 3.

Задля кращого закріплення знань, крім опрацювання теоретичного матеріалу, учні мають здійснювати вирішення практичних завдань. В даному розділі матеріали для практичної роботи розподіляються на 3 категорії: матеріал для аудиторної роботи, самостійної роботи учнів та матеріалу для перевірки рівня засвоєння матеріалу.

Матеріали для аудиторної роботи містять завдання, які пропонується вирішувати безпосередньо під час заняття. До таких завдань запропоновано одну задачу, яка передбачає і логічні роздуми і графічне зображення вирішення завдання. Друге запропоноване завдання більш акцентоване на пошук значень тих чи інших чисел у таблицях значень таких чисел або за допомогою онлайн калькуляторів чи шляхом обрахунків із застосуванням відповідних формул – на вибір учнів. Основна умова – щоб було отримано коректне значення відповідного числа.

Матеріали для самостійної роботи частково дублюють матеріали для аудиторної роботи. Це зроблено для того, щоб учні пропрацювали тему повторно виконавши схоже за змістом завдання самостійно. Крім задачі та завдання на пошук відповідних чисел, для самостійної роботи пропонується певного роду лабораторна робота. Зміст такої роботи полягає у завданні щодо створення генератора простих чисел. Пропонується створення такого генератора на базі програми Excel, оскільки дана програма є базовою у пакеті Microsoft office, і, як

припускається, є встановленою у кожного учня. Звісно створення генератора не забороняється і з використанням інших додатків, проте методичні матеріали будуть акцентовані саме на програму Excel. Виконання такої лабораторної роботи крім закріплення теоретичних знань сприятиме розвитку навичок користування програмою Excel та базовим навичкам програмування.

Щодо перевірки рівня засвоєння матеріалу, то таку перевірку варто проводити шляхом проведення тестування учнів з даної теми. Тестування як форма перевірки рівня засвоєння учнями знань на факультативних заняттях буде доцільне з двох причин: перша – тестування є загальновизнаною формою перевірки рівня знань у багатьох сферах і активно використовується в системі національної та міжнародної освіти. Друга причина використати тестову форму перевірки рівня засвоєння учнями матеріалу – це власне формат проведення заняття. Оскільки мова йде про факультативне заняття, то доцільніше буде провести перевірку знань саме у тестовій формі, оскільки саме заняття є позапрограмним і не повинно нести додаткового «навантаження» на учнів і вчителя, то й відповідно проведення такої перевірки у тестовій формі дозволить учням доволі швидко виконати тестові завдання, а вчителю – без особливих труднощів перевірити виконані учнями завдання та визначити результати обсягу засвоєного учнями матеріалу.

ВИСНОВКИ

У даній магістерській роботі я змогла виконати визначені переді мною завдання та досягти мети виконання магістерського дослідження.

Факультативні заняття є важливим доповненням до основного курсу математики, оскільки, на основних уроках з математики не можливо досягнути весь обсяг матеріалу, що можна опрацювати з учнями в ході додаткових факультативних занять.

Факультативні заняття дозволяють учням доповнити свої знання новою інформацією, створюють умови для самостійного навчання та розвитку знань та математичних навичок. Факультативи не є новою формою занять, оскільки були впроваджені в окремих школах ще в ХХ столітті.

Найбільш доцільною формою проведення факультативів буде саме дистанційна форма проведення, оскільки в такому занятті беруть участь не всі учні і дистанційна форма проведення буде не такою обтяжливою для учнів. Крім того, у разі необхідності, факультативне заняття можна провести аудиторно, що дозволить максимально гнучко підійти до процесу навчання.

Щодо методики, то на факультативах варто поєднувати теоретичне та практичне навчання, з акцентом на роботу учнів, зокрема щодо підготовки теоретичного матеріалу та вирішенням пропонованих вчителем практичних завдань.

Щодо стимулювання та заохочення учнів, то, однозначно, такі заходи мають впроваджуватись вчителем. Основна мета цих заходів – зберегти бажання в учнів, які відвідують факультатив продовжувати його відвідування та сприяти виникненню бажання в учнів, які не беруть участі у факультативі, почати його відвідування.

Складні числа та числові послідовності мають важливе значення для вирішення задач на основі законів комбінаторики, оскільки вони відображають сутність певного закону комбінаторики і дозволяють швидко вирішити задачу з використанням сформованого правила вирішення завдань відповідного типу.

В комбінаториці та математиці існує чимало таких чисел та послідовностей. Числа Стірлінга є числом, яке відображає кількість перестановок певного роду відповідно до кількості циклів. Дане число існує у двох варіаціях, які різняться між собою правилом додержання порядковості розміщення чисел, що входять до послідовності та їхньої циклічності. Числа Бернуллі дозволяють обчислити значення відповідного значення для кожної парної змінної, передбачаючи значення 0 для всіх непарних змінних.

Число Ейлера (Непера), або як його прийнято називати – натуральне число. Це спеціальне число в математиці, яка стала константою, яка відображає нескінчений степеневий розрахунок значення для відповідного значення n . Оскільки степеневе значення є нескінченим, то й число Ейлера є нескінченим десятковим дробом.

Числа Фібоначчі є складною послідовністю чисел, яка відображає порядкове додавання двох попередніх значень послідовності для знайдення наступного члена послідовності. З цією послідовністю тісно пов'язане число Люка, основною відмінністю якого є початкові значення послідовності, при однаковому способі обчислення всіх наступних значень чисел послідовності.

Дружні числа є особливими парами послідовностей чисел, в якій сума дільників кожного числа (за винятком його власного значення) дорівнює його дружньому числу. Пари дружніх чисел є встановленими і не можуть бути розширені. Дещо схожими до таких чисел є досконалі числа. Досконалими є ті числа, в яких аліквотна сума значень дільників якого дорівнює самому числу. Оскільки сума може бути більшою чи меншою за саме число, то й відповідно існують поняття надлишкових та недостатніх чисел, що не є предметом дослідження даної роботи. Досконалі числа пов'язані з числами Мерсенна, які є числовою послідовністю, в якій кожен член послідовності є значенням піднесеного до степеня числа 2 за вирахуванням одиниці. У зв'язку з цим, всі значення числа Мерсенна є непарними.

Числа Каталана за своєю сутністю є схожими до числа Стірлінга, які відображають можливість впорядкованого розбиття певної n -елементної

множини на частини. Дана послідовність має сталі значення, які також дозволяють знайти відповідь на варіативність вирішення відповідного формату завдання. Протилежним числу Каталана є число Белла, яке відображає невпорядковане розбиття певної множини на частини, що дає відмінні значення при тих самих значеннях множин. Послідовність Морзе-Туа відображає логічну заміну числових значень при наявності двох числових значень один на одне. Дана послідовність корисна при наявності двох можливих варіантів вирішення задачі у разі наявності нескінченно великого значення кількості умов. Крім розглянутих існують інші спеціальні числа та числові послідовності, які не розглядались у даній роботі через їхнє непоширене застосування.

Задля кращого закріплення знань, крім опрацювання теоретичного матеріалу, учні мають здійснювати вирішення практичних завдань. В даному розділі матеріали для практичної роботи розподіляються на 3 категорії: матеріал для аудиторної роботи, самостійної роботи учнів та матеріалу для перевірки рівня засвоєння матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богородова Д. Ю. Числа Каталана. Харків: Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі: збірник тез доповідей IV Всеукраїнської (з міжнародною участю) науково-практичної конференції молодих вчених (м. Харків, 11-12 травня 2022 року), 2022. С. 43-44. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/34051/1/b.pdf>.
2. Болдарєва О. М., Пивоварчик В. М., Яковлева О. М. Дискретна математика (частина 1). Навчальний посібник. Одеса: ПНПУ імені К. Д. Ушинського, 2022. 145 с. URL: <http://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/14760/1/Pyvovarchyk%20Viacheslav%20Mykolayov%D1%83ch%202022.pdf>. (73-75 Стірлінга і Белла 133-138 Каталана).
3. Ганюшкін О. Г. Комбінаторний аналіз: Навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2024. 346 с. URL: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2024/02/comb-anal.pdf>. (52-64 Стірлінг).
4. Гетта В. Г., Єрмак С. М., Джевага Г. В., Шульга О. М., Повечера І. В., Носовець Н. М., Коляда А. М. Дистанційне навчання: дидактика, методика, організація [Текст]: монографія. Чернігів: Чернігівський національний педагогічний університет імені Тараса Шевченка, 2017. 286 с. URL: <http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/6650/1/8F.pdf>.
5. Дубовик В. Організація та методика проведення факультативних занять з математики. Умань, 2013. 2 с. URL: https://library.udpu.edu.ua/library_files/stud_konferenzia/2011_2/visnuk_16.pdf.
6. Інтерактивна енциклопедія цілочислових послідовностей. URL: <https://oeis.org/?language=ukrainian>.
7. Мазур К. В., Сіра І. Т. Досконалі числа та числа Мерсенна. Харків: Інноваційні педагогічні технології в цифровій школі: збірник тез доповідей IV Всеукраїнської (з міжнародною участю) науково-практичної конференції молодих вчених (м. Харків, 11-12 травня 2022 року), 2022. С. 197-199. URL:

<https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/657e58ba-22da-459d-8a4c-3cb44486d8e1/content>.

8. Оглобліна О. І., Сушко Т. С. Шрамко Ю. В. Елементи теорії чисел: навчальний посібник. Суми: Сумський державний університет, 2015. 186 с. URL: https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/42788/1/teoriya_chisel%20.pdf;jsessionid=0BAF1554423D63F5089A3FFA3BCFE10F.

9. Олексенко М. П., Коваль О. О. Історичні відомості про число Ейлера. Перша та друга чудові границі. 2022. С. 61-63. URL: <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/fad3bdf0-8da0-4307-bedb-bbc65eb1c2b6/content>.

10. Сіра І. Т., Галяс А. С., Рой О. С. Числа Фібоначчі та їх властивості. Харків: Наумовські читання: збірник тез доповідей XIX науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених (м. Харків, 23-24 листопада 2021 року), 2022. С. 128-130. URL: <https://dspace.hnpu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/ed11b969-34fa-4cb8-8968-b0d04d10c5ca/content>.

11. Тлумачний словник української мови. URL: <https://slovnyk.ua/>.

12. Тменова Н.П. Дискретна математика. Навчальний посібник. Частина 1. К.: 2018. 122 с. URL: https://kiis.knu.ua/wp-content/uploads/2018/04/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%9B%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%94%D0%9C1_%D0%92%D0%9F%D0%A6_%D0%9F%D1%802_A5.compressed.pdf. (83-87 Стірлінга, Белла, 87-88 Фібоначчі).

13. Хомутовський О., Кривонос О. М. Числа Стірлінга, їх властивості та застосування. 2017. С. 117-120. URL: http://eprints.zu.edu.ua/24849/1/Homutovskiy_APSI2017.pdf.

14. Щодо інструктивно-методичних рекомендацій із базових дисциплін: Лист МОН № 1/9-426 від 01.06.2012 р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v-426736-12#top>.