

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти

на тему “Формування математичної компетентності учнів при вивченні трапеції
за допомогою STEM-технологій”

Виконав:

магістрант групи СОМ(М)(З) – 2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Свягли В.М.

(прізвище та ініціали студента)

Керівник: д. ф.- м. н., проф. Пилипів В.М.

(прізвище та ініціали)

Рецензент

_____ (прізвище та ініціали)

Івано-Франківськ – 2024 р.

АНОТАЦІЯ

В даній роботі я проаналізував підручники восьмих класів з геометрії авторства А. Мерзляк, О. Істер, Г. Бевз, А. Єршова та М. Бурда. Запропонував декілька прикладних задач для вивчення трапеції, а також розробив два інтегровані уроки з геометрії та інформатики.

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури, що містить 23 джерел. Перший розділ описує трапецію, її властивості та сфери застосування. Другий розділ описує поняття компетентності та STEM-технологій. В третьому розділі представлена практична частина роботи, аналіз літератури, розроблені задачі, та уроки. Загальний обсяг роботи: 29 сторінки, 23 рисунків, та 3 таблиці.

Ключові слова: трапеція, рівнобічна трапеція, прямокутна трапеція компетентісний підхід, компетентність, математична компетентність, STEM, STEM-технологія, STEM-освіта.

ANNOTATION

In this paper, I analyzed eighth-grade geometry textbooks by A. Merzlyak, O. Easter, G. Bevez, A. Yershov, and M. Burda. He proposed several applied problems for studying trapezoid and developed two integrated lessons in geometry and computer science..

The paper consists of an introduction, three chapters, conclusions, and a bibliography containing 23 sources. The first chapter describes the trapezoid, its properties and applications. The second section describes the concepts of competence and STEM technologies. The third section presents the practical part of the work, literature analysis, developed tasks, and lessons learned. Total volume of work: 29 pages, 23 figures, and 3 tables.

Keywords: trapezoid, equilateral trapezoid, rectangular trapezoid, competence, mathematical competence, STEM, STEM-technology, STEM-education.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет _____ математики та інформатики _____
 Кафедра _____ математики та інформатики і методики навчання _____
 Освітній рівень _____ другий (магістерський) _____
 Спеціальність _____ 014.04 Середня освіта (Математика) _____

Затверджено на засіданні кафедри математики
та інформатики і методики навчання,
протокол № _____ від _____ 2023 р.
Завідувач кафедри _____ Кульчицька Н. В.

**ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТУ**

- _____
Свягла Володимир Михайлович
(прізвище, ім'я, по батькові)
- Тема роботи _____ Формування математичної компетентності учнів при вивченні трапеції за допомогою STEM-технологій _____
 - Керівник роботи _____ Пилипів Володимир Михайлович, док. фіз.-мат. наук, професор _____
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
 - Перелік питань, які потрібно розробити: аналіз інформаційних джерел, поняття прикладної задачі, аналіз шкільних підручників з геометрії, технологічні засоби у забезпеченні практичної компетентності, STEAM-освіта, методика використання ІТ _____
 - Дата видачі завдання _____ 20 жовтня 2023 р. _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	<i>Вибір напрямку та теми дослідження</i>	вересень-жовтень 2023 р.	
2	<i>Аналіз інформаційних джерел за поставленою проблемою</i>	листопад-грудень 2023 р.	
3	<i>Написання розділу I</i>	січень-лютий 2024 р.	
4	<i>Написання розділу II</i>	березень-квітень 2024 р.	
5	<i>Аналіз підручників з геометрії 8 класу на наявність прикладних задач та підбір задач</i>	травень-червень 2024 р.	
6	<i>Розробка інтегрованих уроків з елементами STEAM-освіти для розвитку практичної компетентності.</i>	червень-липень 2024 р.	
7	<i>Написання розділу III</i>	серпень-жовтень 2024 р.	
8	<i>Оформлення роботи та підготовка до захисту</i>	листопад-грудень 2024 р.	

Студент _____ (підпис) _____ Свягла В.М. (прізвище та ініціали)
 Керівник роботи _____ (підпис) _____ Пилипів В.М. (прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 ТРАПЕЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ.....	8
1.1 Історія терміну «трапеція».....	8
1.2 Трапеція та її види	8
1.3 Властивості трапеції.....	10
1.3.1 Властивості будь якої трапеції.....	10
1.3.2 Властивості рівнобедреної трапеції	14
1.3.3 Властивості прямокутної трапеції.....	17
1.4 Площа трапеції.....	18
1.4.1 Площа трапеції через основи та висоту.....	18
1.4.2 Площа трапеції через діагоналі та кут між ними.....	19
1.5 Застосування трапеції.....	20
РОЗДІЛ 2 ПОНЯТТЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА STEM-ОСВІТИ	24
2.1 Компетентнісний підхід	24
2.2 Математичні компетентності.....	26
2.3 Формування математичні компетентності на уроці.	29
2.4 STEM-освіта.....	34
2.5 Реалізація STEM-освіти на уроках математики	37
РОЗДІЛ 3 ПРАКТИЧНІ STEM ЗАДАЧІ З ТЕМИ ТРАПЕЦІЯ	41
3.1 Аналіз наявності STEM-задач в сучасних підручниках	41
3.2 Список прикладних завдань з теми «трапеція».....	43
3.3 Розробка інтегрованого уроку з геометрії 8 клас на тему «Площа трапеція»	48
3.4 Розробка інтегрованого уроку з геометрії 8 клас на тему «Застосування штучного інтелекту для вивчення трапеції».....	50
ВИСНОВКИ.....	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	55

ВСТУП

В сучасному світі, де існують смартфони, онлайн калькулятори, голосові помічники, роботи і системи штучного інтелекту, а мобільний інтернет доступний майже у будь якій точці, учні часто запитують, навіщо їм вивчати ту чи іншу тему, якщо те саме вони можуть порахувати чи визначити за допомогою технологій. Відповідати їм стає все важче, бо вчителі теж використовують усі ці надбання науки, і розуміють їх переваги і саме тут на допомогу можуть прийти сучасні підходи в освіті, які передбачають компетентістний підхід. Адже коли пояснити учню, що математичні задачі, які розглядаються на уроці, покращують ті чи інші вміння, спілкування з учнем стає простішим. Ще краще коли ця задача має зв'язок з реальним світом, і зачіпляє інші галузі окрім математики. Тут нам допоможе STEM підхід, який передбачає навчання в якому перехрещуються різні галузі для формування ключових міжпредметних компетентностей.

Саме спеціалісти, які будуть всебічно розвиненні, будуть найбільш затребуваними в найближчий час. Більшість границь між різними галузями стираються, як наслідок спеціаліст з робототехніки повинен знати не тільки фізику та програмування. Він також повинен бути добре ознайомлений з тою галуззю застосування, для якої створюється роботизована машина. Схожа ситуація і в інших галузях. Спеціаліст, який має хоча б базовий рівень знань в області застосування, стає більш ефективним, і компанії немає необхідності витрачати час на ознайомлення його з основами. Зазвичай такі спеціалісти набагато ефективніше застосовують свої вміння в усіх сферах.

Однією з тем які часто здаються дітям максимально віддаленими від життя є вивчення чотирикутників та їх властивостей. Важливо пояснювати де і як застосовуються конкретна фігура, залучаючи як можна більшу кількість галузей. Трапеція однозначно є фігурою, яка, на перший погляд, далеко не найчастіше зустрічається в повсякденному житті, але якщо придивитися, то вона є дуже важливою для архітектури, будівництва мостів та інших споруд. Важливо знаходити ті приклади для учнів, які будуть для них близькими, чи ті які вони

можуть зустрічати ідучи до ліцею і тд. Очевидно, що вивчення трапеції, як і будь якої іншої теми, передбачає наявність в учня уже набутих певних знань та вмінь, проте в цій роботі будуть згадані усі визначення, формули та терміни, які можуть знадобитися для розв'язування задач.

Трапеція є одним із важливих геометричних об'єктів, вивчення якого має велике значення в шкільному курсі математики. Ця фігура не лише слугує прикладом для засвоєння фундаментальних понять геометрії, таких як паралельність прямих, площа, кути й пропорції, а й знаходить широке застосування у різних сферах практичного життя. Розуміння та вміння працювати з трапеціями допомагає розвивати просторове мислення, аналітичні навички та здатність до моделювання реальних ситуацій, що є важливими компонентами математичної компетентності учнів.

STEM-освіта активно використовується в багатьох передових країнах світу, такий міждисциплінарний підхід не обмежує викладачів окремими предметами. Натомість, викладачі математики можуть вільно використовувати задачі, з фізики, хімії, інженерії, економіки та інших.

Актуальність теми полягає у потребі виховання молодого покоління учнів, які володітимуть як математичними так і міжпредметними компетентностями, і будуть вміло їх застосовувати в професійній діяльності, а також у повсякденному житті.

Важливо розвивати не тільки теоретичну складову, а й практичні навички учнів у вивченні будь якої теми. Одним зі способів це зробити використовувати різнопланові задачі, які будуть мати наближені до реальності умови. Для зацікавлення здобувачів освіти можна використовувати завдання з цікавинками, або інтерактивні задачі. Такий підхід розвиватиме не тільки математичні а і міжпредметні компетентності. Загалом вплив різного роду задач на кінцеві вміння учнів залежить від дуже багатьох факторів, зокрема зацікавленості учня, його рівня підготовки, бажання працювати в конкретний момент та інших. Ця тема ще не до кінця досліджена, і може бути темою для окремих наукових праць.

Метою роботи є окреслити знання про STEM – освіту та її вплив на формування математичних компетентностей учнів при вивченні трапеції; сформувати збірник задач з тема трапеція, з використанням STEM підходу.

Об'єктом дослідження є процес формування математичних компетентностей.

Предмет дослідження – використання STEM-технологій для формування математичної компетентності при вивченні теми трапеція.

В роботі систематизовано інформація про STEM-освіту, та її вплив на формування математичних компетентностей. Також сформовано збірник задач за для вивчення трапеції, який орієнтований саме на STEM-підхід.

РОЗДІЛ 1

ТРАПЕЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

1.1 Історія терміну «трапеція».

Слово «трапеція» через німецьку (нвн. *Trapez(ium)*) мови запозичено з середньолатинської, *trapezium* походить від грецького *τραπέζιον* «столик; трапеція», демінутива від *τράπεζα* «стіл» [Джерело 1]. У країнах північної Америки також використовують *trapezoid*, яке прийшло від грецького *τραπέζοειδής* і означає «подібний до стола». Можна зробити висновок, що трапеція пов'язана зі словами їжа та стіл.

Першочергово термін «трапеція» використовували як синонім до слово чотирикутник, тобто будь який чотирикутник був і трапецією водночас. Вперше в літературі слово з'являється в коментарі Прокля до книги «Начал» авторства Евкліда. Сам Евклід у своїх пізніших роботах теж вживав слово «трапеція», але також не виділяв її як окрему фігуру. Термін також був відомий вавилонцям, які називали трапецію «лобом бика», а древні єгиптяни навіть вміли визначити площу фігури. Сучасного сенсу термін набув у XVIII ст. Хто саме це зробив не відомо, більшість спирається на те, що в силу розвитку геометрії термін еволюціонував сам по собі.

1.2 Трапеція та її види

Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони не паралельні, називаються трапецією [2]. На рис.1. зображено трапецію - ABCD.



Рис. 1. Трапеція

Як уже згадувалося вище трапеція є окремим видом чотирикутника, який при цьому не є паралелограмом, оскільки має тільки одну пару паралельних сторін. Паралелограм, в свою чергу включає в себе і інші фігури. Найкраще цю систему класифікації чотирикутників зображено на рис. 2.



Рис.2. Класифікація чотирикутників

Трапецію в свою чергу класифікуються за сторонами та кутами, а саме рівнобічна і різностороння та прямокутна відповідно. Різносторонню, ще часто називають довільною. Види трапеції зображено на рис. 3.

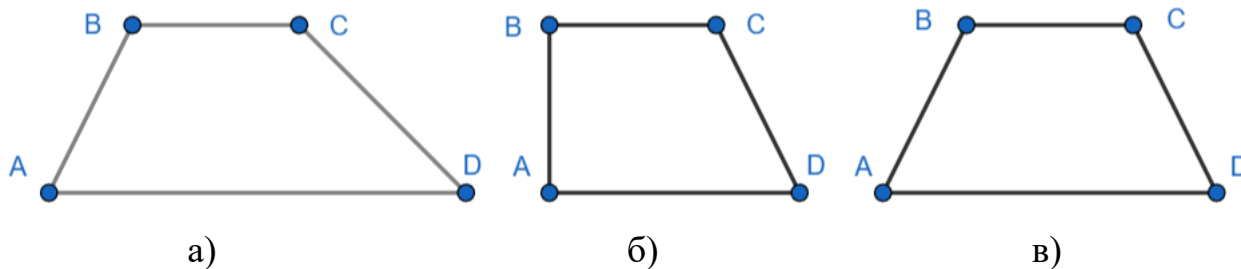


Рис. 3. Види трапеції: а) довільна, б) прямокутна, в) рівнобічна

Трапеція складається з наступних елементів рис. 4.:

- Сторони (AB, BC, CD, DA);
- Основи ($BC \parallel AD$);
- Бічні (AB, CD);
- Середні лінії (MN, SF). MN – сполучає середини бічних сторін, SF – сполучає середини основ, її рідше використовують і називають другою середньою лінією;
- Висота (CK). Висотою може бути будь який перпендикуляр, проведений, від однієї основи до іншої, або до її продовження;
- Діагоналі (AC, BD);

- Кути ($\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$).

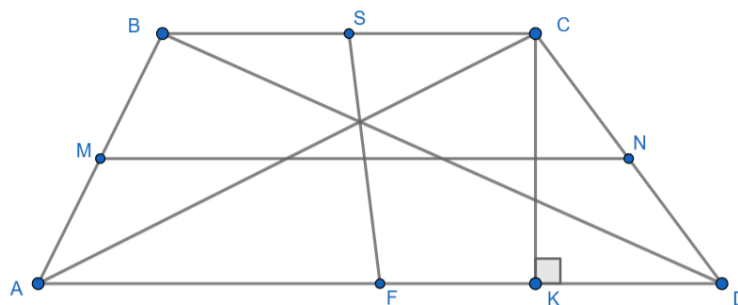


Рис. 4. Елементи трапеції

1.3 Властивості трапеції

1.3.1 Властивості будь якої трапеції

Властивість 1: Сума внутрішніх кутів трапеції дорівнює 360° .

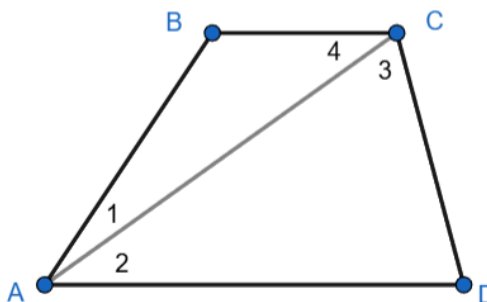


Рис. 5.

Якщо у трапеції $ABCD$, де $BC \parallel AD$, проведено діагональ AC і утворено два трикутники ABC та ACD рис.5. Сума кутів кожного з трикутників дорівнює 180° . $\angle BAD = \angle 1 + \angle 2$, а $\angle BCD = \angle 3 + \angle 4$. Сума кутів трапеції дорівнює сумі кутів двох утворених трикутників, тобто 360° .

Властивість 2: Сума кутів трапеції, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180° .

У трапеції $ABCD$, $BC \parallel AD$ (рис. 5), а AB та CD їх січними, тоді кути $\angle A$ і $\angle B$ та $\angle C$ і $\angle D$ – є попарно внутрішніми односторонніми. Відповідно робимо висновок, що $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle C + \angle D = 180^\circ$ за властивістю паралельних прямих та їх січної.

Властивість 3: середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ та є паралельною до них.

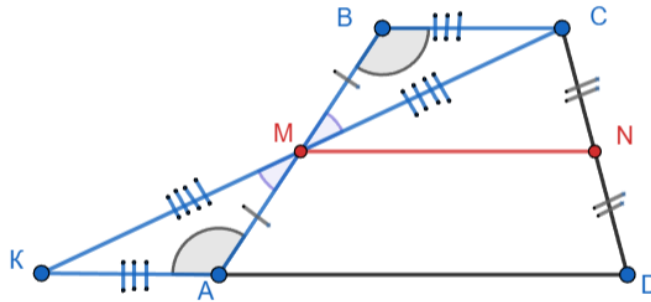


Рис. 6

Для доведення цієї властивості потрібно побудувати додаткову пряму через точки C та M та перетинає, в точці E, продовжену основу AD (рис. 6). $\triangle MAK = \triangle MBC$ за II ознакою рівності трикутників ($MA = MB$, $\angle BMC = \angle KMA$, $\angle MBC = \angle MAK$). З рівності трикутників виходить, що $MC = MK$, а MN – середня лінія $\triangle KCD$. Знаючи, що середня лінія трикутника паралельна до протилежної сторони трикутника $MN \parallel KD$. Оскільки $AD \parallel BC$ то $MN \parallel BC \parallel AD$. Аналогічно знаючи, що середня лінія трикутника дорівнює половині протилежної сторони $MN = \frac{KD}{2}$, а $KD = KA + AD$, де $KA = BC$ (за рівністю трикутників), як наслідок отримуємо $KD = BC + AD$ та формулу 1, для визначення середньої лінії трапеції.

$$MN = \frac{BC + AD}{2} \quad [1]$$

Властивість 4: Відрізок, що з'єднує середини діагоналей трапеції лежить на середній лінії і дорівнює піврізниці основ.

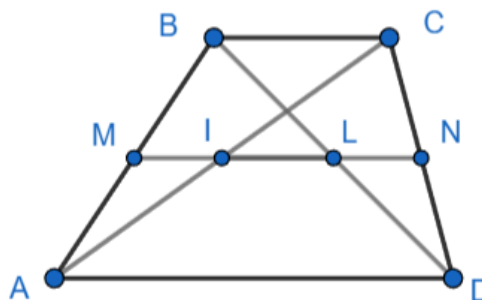


Рис. 7

Спершу доведемо, що IL належить середній лінії MN . У $\triangle ABD$ та $\triangle ACD$ середніми лініями є ML та IN відповідно (рис. 7), вони паралельні до AD , тому точки I та L є MN . За властивістю $ML = \frac{AD}{2}$ і $IN = \frac{AD}{2}$, звідси отримуємо, що $ML +$

$IN = \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2}$, звідси $ML + IN = AD$. Також $ML = MI + IL$ та $IN = IL + LN$, якщо додати ці рівності отримаємо $ML + IN = MI + IL + IL + LN$, відповідно $AD = MI + IL + IL + LN$. Аналогічно в $\triangle ABC$ та $\triangle BCD$ середніми лініями є MI та LN відповідно, звідки випливає що $MI = \frac{BC}{2}$, а $LN = \frac{BC}{2}$, застосуємо це до попередньої рівності та виконаємо спрощення і отримаємо, $AD = 2\frac{BC}{2} + 2IL$ з якою випливає що $IL = (AD - BC) / 2$.

Властивість 5: В трапеції точка перетину діагоналей, середини основ та точка перетині прямих які є продовженням бічних сторін, належать одній прямій.

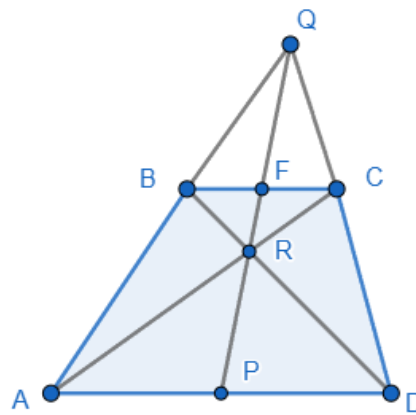


Рис. 8.

Гомотетія з центром R і коефіцієнтом $\frac{AR}{RC}$, як і гомотетія з центром Q і відображує відрізок AD у CB , а середину P відрізка AD відповідно у середину F відрізка BC (рис. 8). Отримуємо, що точки R, P, F і точки Q, P, F колінеарні, це означає, що точки R, P, F, Q належать одній прямій.

Властивість 6: якщо бісектриси кутів при одній основі перетинаються на іншій основі, то друга основа дорівнює сумі бічних сторін.

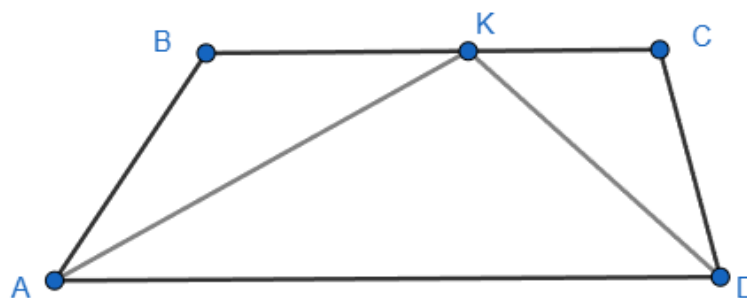


Рис. 9.

АК бісектриса $\angle BAD$, а DK бісектриса $\angle CDA$ (рис. 9), відповідно $\angle BAK = \angle KAD$, $\angle CDK = \angle KDA$. $\angle ADK = \angle CKD$ і $\angle DAK = \angle BKC$, як внутрішні різносторонні при січних АК та DK і паралельних ВС та AD. Можемо зробити висновок, що $\triangle ABK$ і $\triangle DKC$ – рівнобедрені, звідси маємо $AB = BK$ і $KC = CD$. Очевидно, що $BC = BK + KC$, замінимо значеннями з попередніх рівностей. В результаті отримаємо $BC = AB + CD$.

Властивість 7: Якщо менша основа дорівнює бічній стороні трапеції дорівнює меншій основі, то діагональ, яка об'єднує їх, є бісектрисою для кута утвореного бічною стороною та більшою основою.

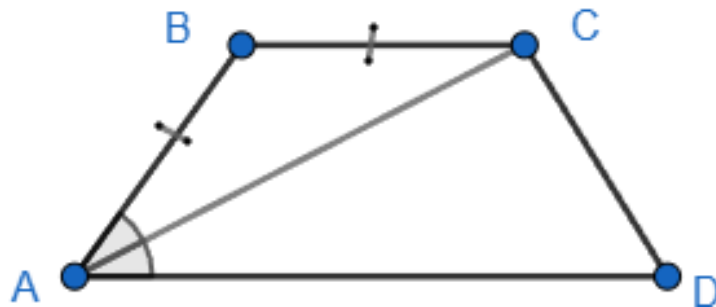


Рис. 10.

Якщо $AB = BC$, то отримуємо рівнобедрений трикутник $\triangle ABC$ (рис. 10), у якого $\angle BAC = \angle ACB$. Також $\angle ACB = \angle CAD$, як внутрішні різносторонні при січній AC, звідси отримуємо що $\angle BAC = \angle CAD$, а значить діагональ AC є бісектрисою кута $\angle A$, який утворений бічною стороною та більшою основою.

Властивість 8: бісектриси кутів при одній бічній стороні трапеції перетинаються під кутом 90° .

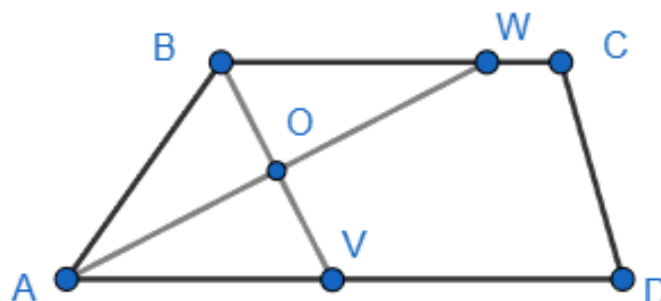


Рис 11.

BV – бісектриса $\angle ABC$, а AW – бісектриса $\angle BAC$. Знаючи, що сума кутів трапеції при одній бічній стороні дорівнює 180° , а $\angle ABO$ дорівнює половині $\angle B$ і $\angle BAO$ половині $\angle A$, можемо зробити висновок $\angle ABO + \angle BAO = 90^\circ$. З $\triangle ABO$

$\angle AOB = 180^\circ - (\angle ABO + \angle BAO) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Тобто кут на перетині бісектрис – прямий.

Властивість 9: Трикутники, які утворюються при перетині діагоналей трапеції, і лежать на їх основах подібні.

На рис. 8. $\angle BRC = \angle ARD$ – вертикальні, а $\angle RBC = \angle RDA$ – внутрішні різносторонні ($BC \parallel AD$, AC – січна). Відповідно, за I ознакою (двома кутами), тому $\triangle BRC \sim \triangle ARD$.

Властивість 10: в трапецію можна вписати коло, якщо сума основ трапеції дорівнює сумі її бічних сторін.

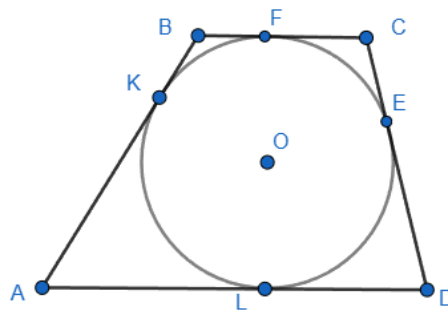


Рис. 12.

Застосувавши властивість дотичних, які проведені до кола з однієї точки, отримаємо: $AK = AL$, $BK = BF$, $CE = CF$, $DE = DL$ (рис. 12). Додавши почленно ці рівності, отримаємо: $AK + BK + CE + ED = AL + LD + BF + FC$, тобто:

$$AB + CD = BC + AD \quad [2].$$

Властивість 11: якщо сума кутів при більшій основі трапеції дорівнює 90° , то друга середня лінія дорівнює піврізниці основ.

Застосуємо продовження бічних сторін на рис. 8. $\triangle AQD \sim \triangle BQC$, за двома кутами ($\angle AQD = \angle BQC$ та $\angle QBC = \angle QAD$). $\angle QAD + \angle QDA = 90^\circ$, а отже і $\angle QBC + \angle QCB = 90^\circ$. З $\triangle BQC$ отримаємо, що $\angle Q = 180^\circ - (\angle QBC + \angle QCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, отже трикутник прямокутний. За властивістю кутів вписаних в коло $QP = PD = \frac{AD}{2}$. З подібності трикутників можемо скласти пропорцію:

$$\frac{QF}{QP} = \frac{BC}{AD}; \frac{\frac{AD}{2} - FP}{\frac{AD}{2}} = \frac{BC}{AD}; \frac{AD - 2FP}{AD} = \frac{BC}{AD}; AD - 2FP = BC; FP = \frac{AD - BC}{2}.$$

1.3.2 Властивості рівнобедреної трапеції

Властивість 1: у рівнобічній трапеції кути при будь якій з основ рівні.

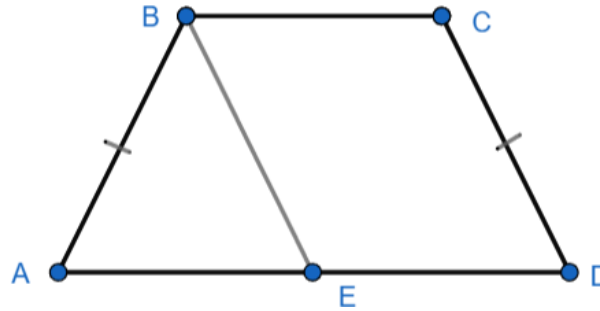


Рис. 13.

Для доведення даної властивості, через одну з вершин меншої основи проведено пряму BE так, що $BE \parallel CD$. Утворився паралелограм BCDE рис. 13, (протилежні сторони попарно паралельні) у якому $CD = BE$. Оскільки трапеція рівнобічна то $AB = CD$. Отримуємо $BA = BE$, а $\triangle ABE$ – рівнобічний. Як наслідок $\angle BAE = \angle BEA$, а кут $\angle BEA = \angle CDE$, як відповідні кути. Отже $\angle BAE = \angle CDE$.

Властивість 2: Діагоналі в рівнобічній трапеції рівні, і нахилені до основи під однаковим кутом.

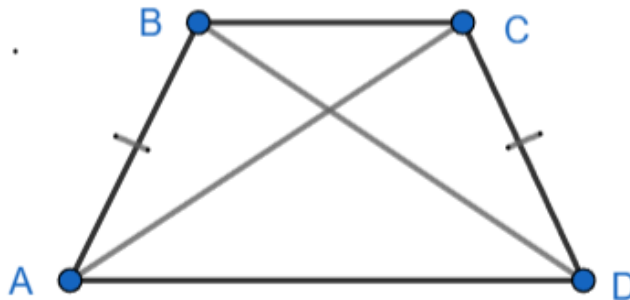


Рис 14.

З рис.14 видно що $\triangle ABC = \triangle DCB$ за двома сторонами (BC – спільна, $AB = CD$, як бічні) і кутом між ними ($\angle B = \angle C$, як кути при основі рівнобічної трапеції). Звідси маємо $AC = BD$. Оскільки трикутник рівні то і всі їхні кути рівні, а отже $\angle BDC = \angle BAC$. Тоді $\angle CAD = \angle BDA$.

Властивість 3: Сума протилежних кутів 180° .

Як відомо кути при одній бічній стороні в сумі мають 180° , тобто $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$ (Рис. 13). $\angle A = \angle D$, а $\angle B = \angle C$, як кути при більшій та меншій основах відповідно. Ввівши відповідні зміни отримаємо, $\angle A + \angle C = \angle D + \angle B = 180^\circ$.

Властивість 4: якщо трапеція рівнобічна, то навколо неї можна описати коло.

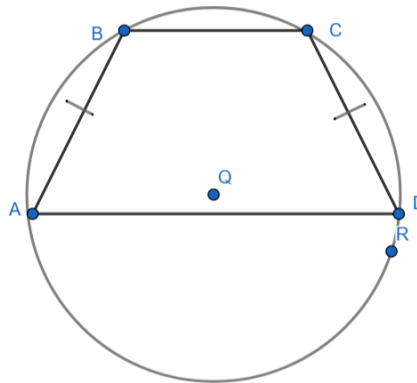


Рис. 15.

Оскільки $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$, то за властивістю кутів вписаного чотирикутника навколо трапеції ABCD можна описати коло (рис.15).

Властивість 5: квадрат висота рівнобічної трапеції, яку можна вписати коло, дорівнює добутку основ.

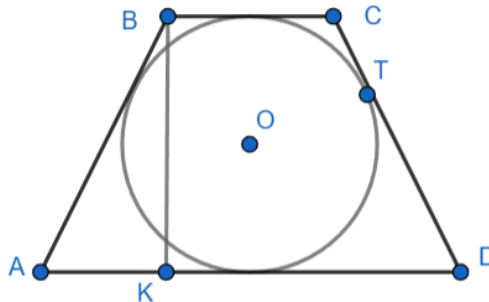


Рис. 16

Так, як і для будь якого чотирикутника в який можна вписати коло, і для трапеції справджується рівність [2]. Оскільки трапеція рівнобічна, то $AK = (AD - BC) : 2$, $AB = CD$. З $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора отримаємо $AB^2 = AK^2 + BK^2$ (рис.16). Проведемо заміну $AB^2 = ((AD - BC) : 2)^2 + BK^2$. Проведемо деякі перетворення з рівністю [2]: $AB + CD = BC + AD \Rightarrow (AB + CD)^2 = (BC + AD)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB^2 + 2 \cdot AB \cdot CD + CD^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AB^2 + 2 \cdot AB^2 + AB^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 \Rightarrow 4 \cdot AB^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 \cdot ((AD - BC) : 2)^2 + 4 \cdot BK^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD^2 - 2 \cdot BC \cdot AD + BC^2 + 4 \cdot BK^2 = BC^2 + 2 \cdot BC \cdot AD + AD^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4 \cdot BK^2 = 4 \cdot BC \cdot AD \Rightarrow BK^2 = BC \cdot AD.$

Властивість 6: висота, яка проведена до більшої основи трапеції, ділить її на два відрізки, один з яких дорівнює півсумі основ, а інший їх піврізниці.

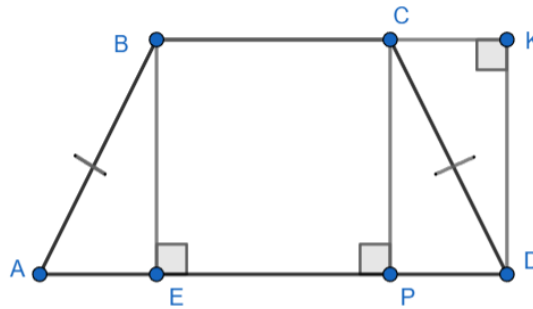


Рис. 17

На рис. 17 $\triangle ABE = \triangle CDP$ за трьома сторонами, оскільки обидва є прямокутними. З рівності випливає, що $AE = PD$. Також, чотирикутник $BCPE$ – прямокутник. Як наслідок, $BC = EP$, звідси $AD = AE + EP + PD = 2AE + EP$. $AE = PD = (AD - BC):2$.

DK – висота проведена до продовженої меншої основи (рис. 17). Аналогічно до попереднього абзацу $\triangle CKD = \triangle CDP$ за трьома сторонами, звідси $PD = CK$. $BC = EP$, $AE = PD = CK$. Тоді $AD = AE + ED = CK + ED = ED - BC + ED = 2 \cdot ED - BC$, $ED = (AD - BC):2$.

Властивість 7: з'єднавши всі середини сторін рівнобічної трапеції, то отримаємо ромб.

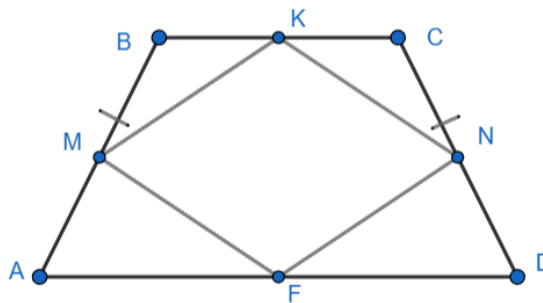


Рис. 18

Діагоналі трапеції AC і BD – дорівнюють одна одній. Відповідно рівними будуть і середні лінії MK , KN , NF , FM трикутників ABC , BCD , CDA , DAB . Також $MK \parallel KN \parallel NF \parallel FM$. Звідси за означенням паралелограм Варіньона є ромбом.

1.3.3 Властивості прямокутної трапеції

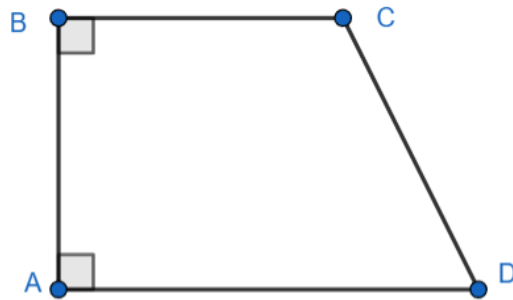


Рис. 19. Прямокутна трапеція

На рис. 19. $ABCD$ – трапеція, $BC \parallel AD$. AB , CD – бічні, $AB \perp BC$, $AB \perp AD$.

Властивість 1: у прямокутній трапеції два кути прямі, один гострий і ще один тупий.

Властивість 2: у прямокутній трапеції одна з бічних сторін перпендикулярна до її основ і є її висотою.

Властивість 3: Бічна сторона, яка утворює прямий кут з основами менша за іншу бічну сторону.

1.4 Площа трапеції

Площа поверхні – це кількість матеріалу, необхідного для її повного «покриття» [3]

1.4.1 Площа трапеції через основи та висоту

Теорема 1: Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти [4].

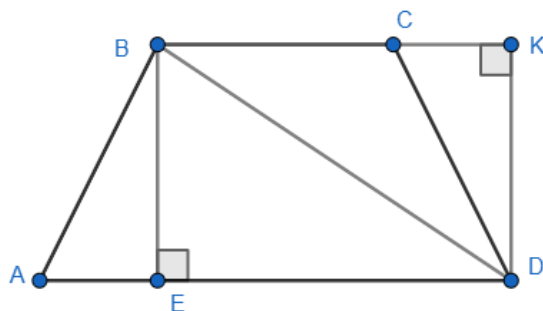


Рис. 20. Площа трапеції через основи та висоту

Доведення: На рисунку 20, $ABCD$ – трапеція ($BC \parallel AD$), AC – діагональ, BE , KD – висоти трапеції. В свою чергу BE є висотою $\triangle ABD$, а KD – $\triangle BDC$. Площа трапеції можна знайти, як сума площ трикутників ABD і BDC . Площу

трикутників шукатимемо, як половину від добутку висоти на сторону до якої проведена ця висота. Маємо: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2}BE \cdot AD + \frac{1}{2}DK \cdot BC$. Оскільки $BE = DK$, як висоти, можемо з попередньої рівності винести висоту за дужки і отримаємо формулу, для знаходження площі будь якої трапеції: $S = \frac{(AD+BC)}{2}BE$. Якщо замінити основи літерами a , b і висоту літерою h отримаємо:

$$S = \frac{(a+b)}{2}h \quad [3]$$

Застосувавши формулу [1] про середню лінію, можна стверджувати, що площу трапеції також можна знайти як добуток середньої лінії і висоти:

$$S = m \times h \quad [4]$$

1.4.2 Площа трапеції через діагоналі та кут між ними.

Знайти площу трапеції можна скориставшись загальною для всіх чотирикутників формулою, тобто знайти її площу через діагоналі та кут який вони між собою утворюють [5].

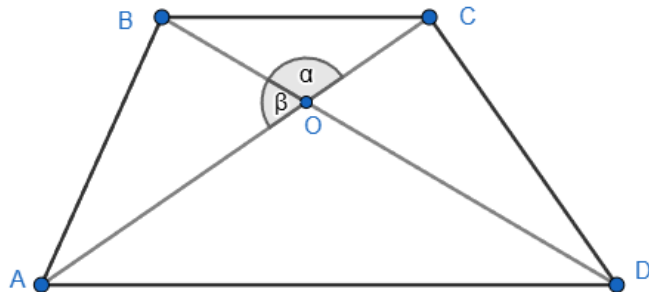


Рис. 21. Площа трапеції через діагоналі

AC і BD діагоналі трапеції $ABCD$, $BC \parallel AD$ (рис. 21), $\angle BOC = \angle AOD = \alpha$ і $\angle BOA = \angle COD = \beta$ як вертикальні. $AC = AO + OC$, $BD = BO + OD$, Площу трапеції подаймо у вигляді суми площ трикутників, $S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$. Площу цих трикутників визначимо як пів добутку сторін на синус кута між ними, $S = \frac{1}{2}a \cdot b \sin \gamma$. Отже площу трапеції можна розписати, як:

$S = \frac{1}{2}AO \cdot OB \sin \beta + \frac{1}{2}BO \cdot OC \sin \alpha + \frac{1}{2}CO \cdot OD \sin \beta + \frac{1}{2}OD \cdot AO \sin \alpha$, зважаючи на те що $\angle BOC$ і $\angle BOA$ суміжні, тобто $\alpha + \beta = 180^\circ$ і що $\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$, можемо винести спільне за дужки і переписати формулу наступним чином:

$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + OD \cdot AO) , \text{ зведемо спільні,}$$

$$S = \frac{1}{2} \sin \alpha (BO(AO + OC) + OD(CO + AO)) = \frac{1}{2} \sin \alpha (AO + OC)(BO + OD) ,$$

Зробивши відповідні заміни отримаємо: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$, причому не вадливо який з кутів між діагоналями брати, фіналізована формула матиме вигляд:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \alpha \quad [5]$$

1.5 Застосування трапеції

Як уже згадувалося раніше, трапеція не та фігура, яку можна побачити на кожному кроці, але деякі її унікальні властивості є корисними в окремих сферах. Таких як архітектура, мостобудування, дизайнерство. Насправді форма трапеції забезпечує високу стійкість, і водночас, дозволяє з економити в матеріалах. Далі буде розглянуто найбільш важливі і популярні приклади використання трапеції в реальному житті.

Архітектура та будівництво

Трапеція часто використовується під час будівництва, та різних архітектурних рішеннях. Форма рівнобічної трапеції дозволяє забезпечити симетрію в будівлі. Наприклад ще в стародавньому Єгипті входи в храм часто робили у вигляді трапеції, звуженої у верхній частині. Так вхід в Храм Дендури [6] виконаний саме у такій формі.

В сучасних реаліях трапецевидні форми найчастіше зустрічають в дахах будівель. Така конструкція, покращує відвід води, і при цьому є достатньо стійкою щоб, витримувати пориви віру. Також ця форма дозволяє забезпечити додаткову житлову площу під дахом – мансарди.

Інженерне, та конструкторське проектування.

Справа в тому що форма трапеції може витримувати дуже велике навантаження і ефективно розподілювати вагу, тому таку форму часто обирають для будівництва мостів та інших інженерних споруд. Трапецієподібні конструкції в мостах можна зустріти будь де, в тому числі в м. Івано-Франківську. Вони

використовуються як в опорах (рис. 22.а) так і у верхній частині конструкції (рис. 22.б).



а)

б)

в)

Рис. 22. а) міст Патона (м. Київ), б) залізничний міст (м. Івано-Франківськ), в) зрошувальний канал (м. Запоріжжя)

Також в якості інженерної загороджувальної споруди використовують дамби, для убезпечення житлових районів від підтоплення, такі загорожі найчастіше у формі трапеції. Це пов'язано і з простотою реалізації і ефективністю, бо така загорожа є міцною і не змиється легко водою.

Ще одним інженерним рішенням де використовуються трапеції це річкові дамби, при гідроелектростанціях. Оскільки водосховища під такі проекти найчастіше роблять в каньйонах або схожих до них за рельєфом місцевостях, форма трапеції ідеальна для будівництва загорожі.

Зрошувальні водні канали (рис. 22.в) у більшості випадків теж мають форму трапеції, це пов'язано в першу чергу з простотою викопування таких траншей, а значить і пришвидшення виконання робіт. Такі канали є дуже важливим джерелом прісної води в тих регіонах, де переважає сухий клімат. Зазвичай на цих каналах також розташовують шлюзні засувки, для регулювання потоку води, ці засувки часто теж мають форму трапеції, для того щоб повністю закрити канал.

Механіка

В механічних системах використовуються трапецевидні елементи. Наприклад, в механізмі шківів для передачі потужності, можуть використовуватися паси або ланцюги у форму трапеції, що в свою чергу буде забезпечувати більш ефективну та плавну роботу обертового механізму.

На конвеєрних стрічках теж можуть використовуватися обертові елементи з зубчастими пасами і ці паси теж роблять у формі трапеції, вона забезпечує надійне зчеплення, а відповідно і безперебійну роботу усього механізму.

Дизайнерська та мистецька галузь

Форма трапеції може використовуватися як в дизайні інтер'єру так і екстер'єру. Наприклад в середині приміщення може використовуватися, для створення більш динамічних композицій, підкреслення якихось окремих елементів дизайну. Окремі елементи меблів чи полиць можуть повністю або частково містити трапецію (рис.23.а). Також часто сходинок роблять у схожій до трапеції формі. Елементи вікон чи самі вікна можуть бути теж у формі трапеції, наприклад, у мансардних кімнатах, або таких де немає достатнього простору. Завдяки ширшій одній зі сторін в приміщення забезпечується додаткове освітлення. Сюди також варто віднести дизайнерів одягу, модельєрів і т.д. Вони використовують різні геометричні фігури для створення нових образів. Наприклад жіночі сумочки дуже часто мають форму схожу до трапеції.

Також варто згадати про деякі музичні інструменти, які мають форму трапеції. Наприклад, українські цимбали (рис.23.б). Дерев'яний музичний інструмент, який має трапецієвидну форму з натягнутими струнами. Схожу форму мають: ксилофон, маримба, деякі види гітар та інше.



Рис.23. а) Трапецієвидний стіл; б) Цимбали

Графіка та комп'ютерне моделювання

Трапеції знаходять застосування в комп'ютерній графіці та моделюванні, зокрема для відображення двовимірних фігур і створення візуальних ефектів. Вони слугують основою для численних алгоритмів і методів, що

використовуються в системах автоматизованого проектування (CAD), анімації та розробці відеоігор.

Також варто згадати про автомобілі і їхнє лобове скло (рис 24.а). Найчастіше його форма це рівнобічна трапеція, це покращує аеродинаміку авто (через зменшення опору повітря), а також покращує видимість в нижній частині вікна. За аналогічним принципом працює і дзеркало заднього виду, яке в нижній частині дає широкий кут для огляду, а у верхній навпаки є зменшеним.

Ще одним прикладом можуть бути туристичні намети (рис 24.б). Для туристів чи експедиторів, важливо зменшувати об'єм та вагу рюкзаку, при цьому не втрачаючи в комфорті та якості свого спорядження. Намети у формі трапеції дозволяють отримати багато простору в нижній частині намету, і навпаки звужуються ближче до гори, для економії ваги, покращення водовідведення та покращення стійкості конструкції.



Рис. 24. а) автомобіль; б) намет

Фінанси та економіка

Правило трапецій використовується у фінансових розрахунках, таких як оцінка площі під кривою для чисельного інтегрування. Воно допомагає наблизити значення визначених інтегралів, що дає змогу оцінити фінансові величини, такі як ціноутворення опціонів або вимірювання портфельних ризиків [7].

РОЗДІЛ 2

ПОНЯТТЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ТА STEM-ОСВІТИ

2.1 Компетентнісний підхід

Колишній підхід до навчання, який передбачав тільки збагачення кількості інформації та знань, що є все менш актуальним. На перший план виходять ті вміння і якості, які учні можуть здобути, під час навчання, до таких навичок відносять, вміння критично мислити, аналізувати та опрацьовувати інформацію.

Важливо розрізнати поняття «компетенція» та «компетентність». Перший вживається і має сенс коли мова йде про повноваження людини. Натомість «компетентність» більше пов'язана з кваліфікованістю, обізнаністю та авторитетністю. У педагогічній діяльності варто використовувати саме цей термін.

Компетентнісне навчання – це про динамічне поєднання знань, умінь та цінностей [8]. Воно спрямоване на роботу з інформацією, а не запам'ятовування її. Цей підхід, повинен сформувати конкурентних працівників на ринку праці у майбутньому. За такого підходу на перший план виходять не знання, а вміння використовувати ці знання у реальному світі. Також під цим поняттям розуміють орієнтацію освітнього процесу на формування ключових, міжпредметних та предметних компетентностей. На рис. 25 зображено ієрархію компетентностей.



Рис. 25. Ієрархія компетентностей

Ключові компетентності повинні формуватися в учня, протягом всього навчання в закладі освіти, як на уроках усіх предметів, так і на позаурочних заходах. Виділяють наступні ключові компетентності [9]:

1. Спілкування державною (і рідною у разі відмінності) мовами;
2. Спілкування іноземними мовами;
3. Математична компетентність;
4. Основні компетентності у природничих науках і технологіях;
5. Інформаційно-цифрова компетентність;
6. Уміння вчитися впродовж життя;
7. Ініціативність і підприємливість;
8. Соціальна та громадянська компетентності;
9. Обізнаність та самовираження у сфері культури;
10. Екологічна грамотність і здорове життя.

Міжпредметна компетентність – здатність учня застосовувати знання, уміння та навички, щодо міжпредметного кола проблем, які належать до однієї освітньої галузі. Ці компетентності тісно пов'язані з предметними компетентностями, і по суті уособлюють ідеї інтегрованого навчання, бо можуть розвиватися протягом усього часу навчання в школі і водночас протягом одного року на різних предметах однієї галузі.

Предметна компетентність – це сукупність знань, умінь та рис у межах конкретного предмета, які необхідні для розв'язання учнями навчальних задач, проблем чи ситуацій. Проте вона не передбачає володіння абсолютно усіма знаннями, які передбачені навчальною програмою, а більше зорієнтована на покращення міжпредметних вмінь, за рахунок набуття вмінь з цього предмета. Насправді предметна компетентність не має сенсу без вміння застосовувати ці вміння на міжпредметному рівні. В свою чергу міжпредметні компетентності можуть бути незалежними від ключових, проте саме формування ключових компетентностей є одним з основних завдань закладів освіти.

Якщо порівнювати традиційний та компетентісний підходи у вивчанні математики, можна виділити наступні відмінності:

- мотивацією учнів в традиційному підході є їх «обов'язок навчатися» натомість в компетентісному зацікавленні у навчанні і отримують задоволення від отриманих результатів;
- у компетентісному підході учні самі несуть відповідальність за своє навчання;
- традиційний підхід вказує на необхідність навчання саме в юному віці, як найкращий час для накопичення знань і навпаки ідея «навчання протягом життя» є важливим аспектом іншого підходу;
- зсув на само оцінювання на противагу традиційному оцінювання вчителем під час контрольних робіт;
- в компетентісному підході дисципліна на уроці тримається за рахунок взаємоповазі, самі уроки є більш динамічними і не завжди мають чітку і стабільну структуру.

2.2 Математичні компетентності

Попри те що математична компетентність є однією з ключових компетентностей в цьому розділі ми будемо розглядати її саме як предметну компетентність в межах вивчення предметів алгебри та геометрії.

У документах Європейської довідкової системи «Ключові компетентності для навчання впродовж життя» під математичною компетентністю мають на увазі вміння застосовувати у повсякденних ситуаціях елементарні математичні операції, а саме додавання, віднімання, множення, ділення та пропорції. Допускається їх обчислення як усній так і письмовій формі. Також під математичною компетентністю згадується здатність використовувати логічне та просторове мислення та виклад понять у вигляді рівнянь чи формул.

У різних джерелах використовують і інші пояснення для поняття математична компетентність, зокрема С. Раков вважає, що математична компетентність учня, це його вміння застосовувати математик в реальному житті,

розуміти методи математичного моделювання, а також вміння складати та розв'язувати математичну модель.

Натомість у Постанові Кабінету Міністрів «Про затвердження Державного стандарту початкової загальної освіти» математичну компетентність пояснюють так «особистісне утворення, що характеризує здатність учня (учениці) створювати математичні моделі процесів навколишнього світу, застосовувати досвід математичної діяльності під час розв'язування навчально-пізнавальних і практично орієнтованих задач».

Математична компетентність – це здатність учня до правильного розв'язання запропонованих задач та ситуацій, вирішення реальних життєвих ситуацій, на основі глибоких і міцних знань із предмету, здобутих математичних навиків та умінь [10]. Її поділяють на наступні складові:

- Логічне мислення – вміння за допомогою дедукції доводити та спростовувати твердження;
- Когнітивна складова – наявність в учня (учениці) теоретичних та практичних знань з сучасної математики;
- Геометрична складова – здатність бачити геометричні фігури в реальному світі, та застосовувати знання для роботи з ними;
- Технологічна складова – вміння користуватися сучасними технологіями для математичної діяльності;
- Процедурна складова – здатність розв'язувати типові задачі;
- Методологічна складова – здатність до само оцінювання та взаємо оцінювання;
- Особистісна складова – прагнення до самовдосконалення математичними засобами.

Загалом виділяють три рівня володіння математичними компетентностями. Перший рівень, так званий рівень відтворення, учень (учениця) здатні до використання знань у знайомих ситуаціях, використовувати готові алгоритми для розв'язування задач, знайомий з формулами та властивостями. На другому рівні

учні вже здатні до використання набутих навичок в задачах які тільки віддалено нагадують типові. Цей рівень ще називають рівнем встановлених зв'язків. Третій рівень або рівень міркування, тут учням потрібно окрім наявних знань також застосувати знання з інших галузей, інтуїцію, творчість, тощо. Учень здатен самостійно обирати необхідні алгоритми, формули чи комп'ютерні засоби.

Вивчення математики повинне бути спрямоване не тільки на майбутню математичну діяльність, а навпаки для загальної орієнтації в усіх соціальних сферах, та розв'язування практичних життєвих задач. Відомий німецький філософ сказав «Навчати треба не думати, а розмірковувати», ця цитата дуже співпадає з ідеями компетентісного підходу. Для досягнення третього рівня математичної компетентності, учень чи учениця повинні не просто подумати який з відомим їм спосіб можна застосувати, а саме порозмірковувати і знайти свій підхід до вирішення проблеми.

Серед інтелектуальних здібностей, таких як пам'ять, увага, мова та мислення, саме логічне мислення займає центральне місце. Математика – це не просто сукупність формул і теорем. Це, перш за все, потужний інструмент для розвитку логічного мислення. Навчаючись математики, учні оволодівають навичками аналізу, синтезу та узагальнення. Ці якості формують здатність учня до мислення, розвиває їх вміння виражати думки чітко, обґрунтовано і в логічному порядку.

Навчання математики, повинне також робити свій внесок в формування ключових компетентностей і встановлення взаємозв'язку між ними та математикою. Формування таких компетентностей входить до загальних завдань математики у школі. Сюди можна віднести формування:

- в учнів ставлення до математики як до невід'ємної складової повноцінного життя людини у теперішньому світі, яке сприймає математику як одну з ознак загальної культури людини. Реалізовується завдяки ознайомленню з ідеями застосування математики, як універсальної мови в світі науки та техніки, а також ефективного способу пізнання світу за допомогою математичного моделювання;

- вивчення учнями математичної мови, яка включає символи, формули, моделі, завдяки яким можна описувати властивості процесів та явищ;
- здатності до обґрунтування та логічного викладення думок, завдяки доведенню теорем та властивостей;
- вміння працювати з літературою, через роботу з підручником в тому числі, опрацьовувати тексти, виділяти важливе, аналізувати вміст, робити висновки;
- здатності використання математичних вмінь на уроках інших галузей;
- можливості учнів оцінювати правильність розв'язків задачі, їх обґрунтування;
- здатність приймати рішення в умовах невизначеності, неповної чи навпаки надлишкової інформації;

2.3 Формування математичні компетентності на уроці.

Розвиток математичної компетентності учнів досягається через активне засвоєння ними нових знань та вмінь під час вивчення математики. Для досягнення якісних результатів учителі повинні використовувати такі інноваційні методи як проблемне, проектне та особистісно-орієнтоване навчання, а також застосовувати інформаційні технології на своїх заняттях. Головна мета такого підходу – не лише передача знань, а й розвиток математичних здібностей учнів та формування в них ключових компетентностей.

Для формування математичних компетентностей потрібні [11]:

- здатність творчо мислити, послідовно міркувати та презентувати свої ідеї;
- вміти працювати в команді (визначати пріоритети, планувати результати і нести відповідальність за їх реалізацію);
- ефективно застосовувати знання в реальному житті.

Розв'язання математичних задач є ключовим елементом навчального процесу. Головна мета якого полягає в тому, щоб навчити учнів застосовувати шкільні знання. Задачі виникають з практичних проблемних ситуацій, коли людина стикається з певними перешкодами і усвідомлює наявні труднощі та прагне їх подолати, в такі моменти вмикається її розумова активність. Процес подолання проблеми передбачає вихід за її межі та погляд на ситуацію неупереджено, збоку. Саме такий аналіз і опис проблемної ситуації перетворює її на математичну задачу. Важливою особливістю задачі є те, що вона стає самостійним об'єктом, яким можна ділитися з іншими людьми.

Під математичною задачею розуміють будь-яку вимогу обчислити, побудувати, довести що-небудь, що стосується кількісних відношень і просторових форм, побудованих людським розумом на матеріалістичній основі знань про навколишній світ [10].

Арифметичною задачею називають вимогу знайти числове значення деякої величини, якщо дано числові значення інших величин і лінійну залежність, яка пов'язує ці величини як між собою, так і з шуканою.

У сюжетних математичних задачах наводяться конкретні значення величин, що описують кількісні характеристики певного явища, а також взаємозв'язки між цими значеннями, які можуть включати числові показники. Існує два типи математичних задач:

1. Прості задачі - це задачі, математичну модель яких можна представити числовим виразом з однією арифметичною дією.
2. Складені задачі - це задачі, для розв'язання яких потрібно виконати дві або більше арифметичних дій.

Кожна задача – це свого роду інтелектуальний виклик, який потребує нестандартного мислення.

Процес розв'язування математичної задачі для школяра є набагато ширшим, ніж просте обчислення. Під час розв'язання задачі учень знайомиться з описаною в ній ситуацією, вивчає математичну теорію, опановує нові методи розв'язання та поглиблює знання з уже відомих розділів математики. Таким чином, розв'язання

математичних задач є потужним інструментом навчання, який допомагає школярам не лише здобувати математичні знання, але й підвищувати свою математичну компетентність.

Також розв'язування задач впливає на формування мислительської діяльності, пам'яті та розумові вміння, але також потребує багатьох зусиль та вмінь:

- аналізувати ситуацію, порівнювати задану задачу, з іншими, які розв'язувалися в минулому, знаходити приховані залежності між даними та шуканими розв'язками;
- створювати елементарні математичні моделі;
- відбирати та систематизувати корисну інформацію від надлишкової, подавати це у вигляді формул, символів та графіків;

Успішне опанування математики є фундаментальною основою для подальшого навчання. Кожна прогалина у вивченні математики створює серйозну перешкоду для подальшого навчання. Більше того, навіть на наступному уроці математики відсутність попередніх знань може сильно ускладнити нормальне засвоєння нового матеріалу.

Математичні задачі мають надзвичайно важливе значення для розвитку учнів, через:

1. комплексний розвиток особистості – завдяки розв'язанню математичних задач відбувається всебічний розвиток учня; задачі стимулюють різні пізнавальні процеси: сприйняття, уяву, увагу, пам'ять, мислення та мовлення;
2. розвиток творчих здібностей – процес розв'язання задач вимагає креативного підходу, учні вчаться знаходити найраціональніші способи розв'язання, розвивають математичну та логічну кмітливість.
3. усвідомлення практичної значущості математики – задачі допомагають учням зрозуміти, що математика – це не абстрактна наука, а потужний інструмент пізнання світу. Вони формують стиль логічних міркувань, вчать чітко аргументувати свою думку та знаходити причинно-наслідкові зв'язки.

4. мотивація та професійний розвиток: Цікаві та різноманітні задачі підвищують інтерес школярів до математики. Вони сприяють розвитку математичних здібностей, формують культуру математичного мовлення та навички грамотного й акуратного запису розв'язань.

Таким чином, математичні задачі – це не просто інструмент навчання, а потужний засіб інтелектуального та особистісного розвитку учнів.

Вплив математичної підготовки виходить далеко за межі самого предмета математики. Брак математичних знань ускладнює вивчення інших шкільних дисциплін. Наприклад, на уроках фізики це може проявлятися в нездатності зрозуміти графік руху $S=vt$. Однак проблема набагато глибша: відсутність навичок логічного мислення, сформованих під час вивчення математики, заважає розумінню літературних творів, історичних подій, географічних закономірностей тощо. Прогалини в знаннях можуть також вплинути на вступ до вищих навчальних закладів, адже навіть на гуманітарних дисциплінах перевіряють вміння логічно мислити та виконувати елементарні обчислення в своїх абітурієнтів.

В середній школі для формування математичних компетентностей потрібно реалізувати такі завдання:

- розширення уявлення про число, від натуральних чисел до дійсних та розвиток обчислювальних навичок з відповідними числами;
- формування функціонального мислення, для розуміння учнями залежностей між величинами, а також вміння будувати графіки;
- оволодіння алгебраїчною мовою, вміння розв'язувати рівняння, нерівності в тому числі в задачах наближених до реальності;
- формування в учнів основних понять статистики та теорії ймовірності, поняття ряду даних, особливості їх визначення, способи одержання числових характеристик рядів даних;
- оволодіння геометричною мовою, вміння виконувати побудови з використанням стандартних інструментів, а також розвиток уяви та просторового мислення;

- формування в учнів знань пов'язаних з основними геометричними величинами, а також способи їх визначення, як математичні так і фізичні.
- формування уявлення учнів про геометричні фігури як на площині так і в просторі, знання для визначення геометричних величин цих об'єктів;
- формування розуміння різниці між стереометричними та планіметричними задачами.
- формування розуміння в учнів про векторний простір.

Уроки математики в основній школі побудовані навколо кількох основних тем: числа, вирази, рівняння, нерівності, функції, геометричні фігури та величини, елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики. Ці теми вивчаються поступово, від простого до складного. Спочатку, у 5-6 класах, діти освоюють основи математики, а потім, у 7-9 класах, поглиблюють свої знання, вивчаючи окремо алгебру та геометрію.

На першому етапі основної школи (5-6 класи) основна увага приділяється формуванню уявлень учнів про число, величину, вираз та рівняння. Паралельно відбувається розвиток геометричної інтуїції та просторових уявлень. Матеріал про вирази, рівняння, нерівності, величини, геометричні поняття, йде на прощеному рівні для введення учнів до свідомого вивчення відповідних тем на курсах алгебри і геометрії.

Алгебра спрямована на формування вмінь для тотожних перетворень виразів, як цілих та дробових, розв'язування рівнянь та нерівностей різного степеня, для застосування, втому числі і на інших предметах. Важливо залучати учнів до використання цих знань, для опису процесів реального життя за допомогою моделювання. Також в курсі алгебри вводяться поняття дійсних чисел, а сам курс включає велику кількість перетворень раціональних так ірраціональних виразів. Загалом курс алгебри маж великий вплив на розвиток логічного мислення і алгоритмічного мислення.

Основна ціль курсу геометрії усвідомлення учнем основних понять, зокрема: точка, пряма, площа. Ці поняття є неозначуваними, натомість інші визначаються шляхом доказових міркувань. Також учень повинен розуміти, що

при доведення теорем він повинен користуватися виключно відомими властивостями, аксіомами, а також уже доведеними раніше теоремами. Протягом курсу вивчаються наступні фігури: відрізок, кут, трикутник, чотирикутник, багатокутник, коло та круг на площині та призма, циліндр, конус, піраміда та куля в просторі. Учень повинен вміти самостійно сформулювати визначення вище згаданих планіметричних фігур, а також вміти їх класифікувати. Натомість стереометричні поняття обмежуються здатністю учнів уявляти прямих і площин у просторі, призму, циліндр, конус, кулю, а також зображати їх на рисунку.

У цій роботі розглядається тема трапеції, яка вивчається у 8 класі, а тому далі буде розглядатися курс 8 класу та його вплив на учнів. У курсі геометрії 8 класу учні поглиблюють свої знання про трикутники, починаючи з розв'язання прямокутних трикутників за допомогою тригонометричних функцій та теореми Піфагора. Далі вивчаються довільні трикутники, для яких вводяться теореми синусів та косинусів. Паралельно розглядається аналітична геометрія, що дозволяє описувати геометричні фігури за допомогою рівнянь і координат. Це значно розширює можливості для розв'язання геометричних задач. Також поглиблюються знання про такі величини як: довжина, градусна міра кута, площа та об'єм.

Саме у 8 класі вивчається поняття чотирикутника, зокрема і трапеції, вводиться поняття рівнобічної трапеції та прямокутної трапеції. Вивчаються окремі властивості трапеції, її середня лінія та інше. Також вводиться поняття площі, це поняття є дуже важливим в усьому курсі геометрії. Часто учні вважають це поняття одним з найскладнішим. Введення формул для обчислення площі і доведення цих формул спираючись на основні властивості фігури.

Поняття площі є одним з найбільш прикладним в геометрії. Його застосування дуже легко побачити в реальному житті. Хоча саме практичне застосування цих формул рідко застосовуються на самому уроці.

2.4 STEM-освіта

Для того, щоб Україна могла успішно конкурувати з країнами Європейського Союзу, необхідно впроваджувати сучасні технології та активно розвивати підготовку висококваліфікованих фахівців у галузі інженерії, нанотехнологій та інформаційних технологій. Саме ці напрямки, об'єднані поняттям STEM-освіти, є ключовими для розвитку сучасного суспільства.

STEM-освіта – це низка чи послідовність курсів або програм навчання, яка готує учнів до успішного працевлаштування, до освіти після школи або для того й іншого, вимагає різних і більш технічно складних навичок, зокрема із застосуванням математичних знань і наукових понять [12].

Абревіатура STEM означає:

- Science – Наука;
- Technology – Технології;
- Engineering – Інженерія;
- Mathematics – Математика.

Крім природничих наук, технологій, інженерії та математики, до сучасного освітнього процесу активно інтегруються мистецькі дисципліни, позначають літерою A – Arts або All. Такий підхід, відомий як STEAM, поєднує в собі точні науки та творчість. Це дозволяє розвивати в учнів не лише аналітичні навички, а й креативність, уяву та естетичний смак, що є особливо важливим для таких сфер як промисловий дизайн, архітектура та індустриальна естетика.

STEM-освіта є пріоритетним напрямом розвитку освіти, що базується на поєднанні наукових, технічних, інженерних і математичних знань та їх практичному використанні й орієнтується на перспективні прикладні дослідження і нагальні проблеми сталого розвитку, подолання втрат через воєнні дії [13].

В Україні концепція STEM є відносно новою, але її формування відбувається на державному рівні. Освіта в галузі STEM є основою підготовки робітників в області високих технологій, тому багато країн, такі як Австралія, Китай, Великобританія, Ізраїль, Корея, США проводять державні програми в галузі STEM-освіти [14].

Основною метою STEM-підходу є формування в учнів особистісних компетентностей в галузях, які є основою STEMу, а саме:

- Наукова компетентність – здібність учнів до пізнання навколишнього світу через призму наукових природничих знань;
- Технологічна компетентність – набуття учнями розуміння сучасних технологій та їх видів та навичок роботи з ними;
- Інженерна компетентність – сукупність знань, навичок та особистісних якостей, які забезпечують учням можливість вирішувати практичні завдання інженерного характеру.
- Математична компетентність – здатність учня використовувати математичні знання в майбутній професії та реальному житті.

Основним завданням STEM-освіти є формування найбільш затребуваних на ринку праці XXI ст. компетенцій і навичок [15]:

- готовність до розв'язання комплексних практичних проблем;
- критичне мислення;
- креативність;
- організаційні здібності;
- уміння працювати в команді;
- емоційний інтелект;
- оцінювання проблеми і прийняття рішення;
- здатність до ефективної взаємодії;
- уміння домовлятися;
- когнітивна гнучкість;
- різнобічний розвиток індивідуальності дитини;
- становлення у підростаючого покоління наукового світогляду;
- формування соціально-компетентної особистості ;
- виховання в особистості любові до праці.

Ключовою ідеєю STEM-освіти є інтегрованість. Вона передбачає, що предмети природничих, математичних та технічного циклу, будуть поєднуватися

один з одним, що вплине покращення навчального матеріалу та самого змісту навчання, через його модернізацію. Зокрема може з'явитися значно більше прикладних задач та прикладів застосування вивчених знань в реальному світі.

Для успішного перехреснування цих дисциплін потрібно робити акцент на вчителів, які будуть достатньо обізнані у відповідних галузях. Вчитель повинен бути експертом не тільки з відповідних галузей, а й в педагогічному сенсі, адже попри важливість інтегрованого навчання, учень повинен також отримати достатній рівень знань з конкретного предмету. Інтегроване навчання може зацікавити учня, який любить математику, наприклад, якоюсь природничою дисципліною, завдяки правильному поясненні того де ці дисципліни перетинаються. Також дуже важлива взаємодія між вчителем та учнем, яка повинна будуватися на взаєморозумінню та взаємоповазі.

Якщо всі ці фактори складуться, то в результаті можна отримати кваліфікованого фахівця у якого будуть сформовані такі характеристики як:

- Уміння бачити проблему;
- Уміння правильно сформулювати задачу;
- Здатність до швидкого переходу на нову тему;
- Здатність до аналізу;
- Здатність до генерації ідей.

2.5 Реалізація STEM-освіти на уроках математики

Завдяки урокам з використанням STEM-технологій, учні не лише запам'ятовують правила, а й застосовують їх на практиці, а навчання перетворюються на захопливу гру. Не зважаючи на складність теми, що вивчається, такі уроки можуть зацікавити учнів і не викликати в них неприйняття.

Аналіз психолого-педагогічної і методичної літератури свідчить, що концептуальні підходи та практичні напрями реалізації STEM-освіти цікавлять багатьох науковців, зокрема фахівців з методики навчання математики [15].

STEM-технології надають учням унікальну можливість не лише здобувати теоретичні знання, а й розвивати практичні навички, творче мислення та формувати стійку мотивацію до постійного навчання, що є запорукою їхнього успіху в подальшому житті.

Один за навиків який можна розвивати на уроці математики, є інженерне проектування, наприклад проект в якому учні повинні самостійно з підручних матеріалів, як сучасних так і найпростіших, створити макет якоїсь просторової фігури, шукаючи процесі інженерні компроміси. Учні отримають досвід, як комбінуючи різні матеріали можна отримати готовий продукт, Також засвоять властивості деяких матеріалів, зрозуміють якісь структурні елементи, складності їх з'єднання та інше. При цьому покращать своє розуміння створених фігур, та їх особливостей.

Критичне мислення – це ще одна компетентність, яку розвиває STEM. Критично мислячий підліток чи студент, буде здатен краще взаємодіяти зі світом, знаходити суперечності та неправдиві факти. Зазвичай в учнів є багато крутих ідей, які вони можуть розвивати тільки ставлячи собі додаткові запитання і дивлячись на це під різними кутами. І ці ідеї можуть змінювати життя в будь якій сфері. Це можна добитися даючи учням, завдання на пошук помилок, на доведення або спростування якихось фактів. Також хорошою практикою буде взаємо перевірка між учнями, де вони будуть критично дивитися на роботу свого однокласника чи однокласниці.

Ще один зі способів STEM-уроку може стати проблемний урок, який передбачає постановку якогось проблемного питання, обов'язково з реалістичної ситуації, яке б могло бути вирішене за допомогою математики, наприклад, рівнянням, нерівністю чи теоремою Піфагора. Цей підхід добре працює у природничих науках, але також може бути застосований і в математиці.

Обов'язково потрібно згадати і про використання інформаційних технологій в STEM-освіті. Сучасний світ вимагає від фахівців знань та вміння застосовувати інформаційні технології на практиці. Використання комп'ютерного моделювання дозволяє учням не лише отримати глибокі знання з природничих наук, але й

розвинути практичні навички, необхідні для роботи в сучасних високотехнологічних компаніях. Створення цифрових прототипів стимулює творче мислення та готує учнів до вирішення складних реальних проблем. На уроках математики можна використовувати різні сервіси та додатки. Можна використовувати також інтегровані уроки з учителями інформатики, якщо не має можливість використати комп'ютери в інший спосіб. На цих уроках можна застосовувати безкоштовне програмне забезпечення таке як сервіс GeoGebra, програми R, Gran1 та інші. Ці системи можна використовувати для побудови просторових чи плоских об'єктів, динамічної математики, розв'язування системи рівнянь чи шукати статистичні величини.

Інтерактивні динамічні креслення та моделі перетворюють навчання математики на активний процес дослідження. Учні зможуть самостійно експериментувати, висувати гіпотези та робити висновки.

Не можливо переоцінити і перспективу використання штучного інтелекту на уроках математики. Технологій, які використовують штучний інтелект сьогодні є в усьому. Учні уже використовують їх в повсякденному житті. А використовуючи їх на уроках можна не тільки навчати дітей нового, але й зацікавити їх у вивченні предмету. Навчати дітей шукати правильні відповіді за допомогою штучного інтелекту може розвинути в них критичне мислення, бо на даний ця технологія ще не до кінця розвинута. Потрібно уважно читати і аналізувати відповіді штучного інтелекту і вибирати тільки правильні і обґрунтовані відповіді.

STEM-освіта, збагачена використанням мобільних додатків та інших гаджетів, перетворює математику на інтерактивну та захопливу науку. Завдяки цьому учні зможуть не лише опанувати теоретичний матеріал, але й розвинути навички дослідження, аналізу даних та вирішення проблем, що є необхідними для успіху в сучасному світі.

Можливості STEM-освіти набагато ширші за описані. Майбутнє STEM-освіти залежить від кожного вчителя. Вчителі, як творці освітнього процесу, відіграють ключову роль. Саме від їхньої креативності, ентузіазму та бажання експериментувати залежить, наскільки швидко ми зможемо перейти до широкого

використання інноваційних технологій у навчальному процесі. Від того, наскільки успішно ми розвиватимемо STEM-напрямки, залежить наше місце в глобальному співтоваристві.

На STEM-уроках знання перетворюються на практичні навички. Кожен учень має можливість безпосередньо працювати з обладнанням, проводити експерименти та створювати власні проекти. Однак, розробка таких уроків вимагає від вчителя не лише глибоких знань предметів, але й уміння організувати ефективну навчальну діяльність.

Щоб покращити STEM-урок можна скористатися наступними порадами:

1. Вирішуйте реальні проблеми та ситуації залучаючи учнів.
2. Завдання має бути чітким та з чітко сформульованими критеріями, зрозумілі для учнів.
3. Організуйте командну роботу та взаємодію між учнями.
4. Застосовуйте інженерне проєктування, щоб покращити ефективність.
5. Максимально занурюйте учнів у процес дослідження.

РОЗДІЛ 3

ПРАКТИЧНІ STEM ЗАДАЧІ З ТЕМИ ТРАПЕЦІЯ

3.1 Аналіз наявності STEM-задач в сучасних підручниках

В ході виконання було опрацьовано 5 підручників з геометрії 2021 року. В кожному з підручників зверталось увагу на кількість завдань загалом і окремо на кількість завдань в яких описуються реальні ситуації, або прикладні проблеми, як це передбачається STEM-освітою. Зокрема працював з підручниками таких авторів: А. Мерзляк [4], О. Істер [16], Г. Бевз [17], А. Єршова [18] та М. Бурда [19]. Результати аналізу задач наведено в таблиці 1. У таблиці під словами «STEM-завдання» потрібно розуміти завдання, які пов'язані з реальними життєвими ситуаціями, тобто тими які навчають учнів застосовувати математичні знання в майбутньому на практиці.

Таблиця 1. Порівняння кількості завдань в підручниках різних авторів

Назва підручника	К-сть завдань	К-сть STEM-завдань	Відсоток STEM-завдань	К-сть завдань з теми трапеція	К-сть STEM-завдань з теми трапеція
Геометрія 8 клас А. Мерзляк, 2021р.	860	25	2,9 %	142	3
Геометрія 8 клас О. Істер, 2021р.	1085	81	7,5 %	169	2
Геометрія 8 клас Г. Бевз, 2021р.	1285	64	5 %	186	5
Геометрія 8 клас А. Єршова, 2021р.	755	22	2,9 %	104	1
Геометрія 8 клас М. Бурда, 2021р.	1191	85	7,2 %	156	12

У підручнику авторства Мерзляка є 23 параграфи, серед яких можна знайти тільки 25 прикладні задачі, що в середньому складає одна на параграф, або 2,9% від загальної кількості задач. На рік у 8 класі учні мають близько 70 уроків геометрії. Якщо припустити, що учні розв'яжуть усі 25 задач такого виду, це ставатиметься рідше ніж один раз на два урок, що на мою думку не буде формувати у них вмінь по використанню математики.

Аналогічна ситуація у підручнику авторства Єршової. Там на 24 параграфи тільки 22 відповідні задачі. Це означає, що тільки на третині уроків учні можуть розв'язувати прикладні задачі. Варто зауважити, що у даному підручнику в кожному параграфі присутні зображення, які демонструють приклади відповідної фігури в світі, проте ці приклади без підписів та пояснень, відповідно учень повинен сам знайти і здогадатися що це за приклад. В обох книжках, такі задачі знаходяться не впорядковано, у відносно випадкових місцях. Варто також сказати, що більшість задач доволі примітивні та одноманітні і не зачіпляють інших галузей наук, через що їх важко впевнено віднести до категорії STEM.

Краща ситуація в підручнику авторства Бевза. Тут кількість задач близька до кількості уроків у навчальному році. Вони складаються близько 5% віз загальної кількості. Ці задачі все ще розкидані по розділах, але коло більшості з них з'являються позначки про специфіку задачі. Присутні задачі за сферами «Здоров'я та безпека», «Фінансова грамотність», «Екологія» та «Громадянська відповідальність» менша кількість задач на інженерію. Потрібно також зазначити, що, майже, після кожного параграфу присутній розділ «Геометрія навколо нас», у якому представленні зображення реального світу де можна побачити застосування фігури, але нажаль як і в попереднього автора часто зі зображення не мають підписів.

Лідерами за кількістю прикладних задач є підручники авторів Істер та Бурда. В цих підручниках після кожного розділу присутні пункти «Життєва математика» та «Проявіть компетентність» відповідно. У цих розділах розташовані задачі, які є різногалузевими. В Бурди в цьому розділі є і задачі які не відносяться до STEM, але мають інші переваги. Важливим також є те, що ці задачі є більш цікавими, та

справді чіпляють сусідні галузі зокрема інженерію та природничі. Більший акцент все таки зроблений на інженерію. У Істера задачі більш однотипні, а у Бурди майже усі задачі унікальні. Також важливо, що в обох авторів цих задач багато, більше ніж одна на урок за стандартною програмою, у вчителя є можливість обирати, які розв'язувати, а які упустити.

Абсолютно в усіх авторів, зазвичай в кінці книжки, є теми для проєктної діяльності. В когось їх більше в когось менше, але більшість проєктів заточенні на використанні Інформаційно комунікаційних систем, а це точно єознакою STEM-піходу.

Важливо зазначити, що в цьому аналізі не включені задачі на доведення та побудову, які є важливі для формування таких математичних компетентностей як: логічного та критичного мислення. Це зумовлено тим, що ці задачі важко віднести до категорії STEM, адже вони по суті свої відносяться виключно до математики.

Підбиваючи підсумки можна зробити висновок, що не всі автори адаптуються під вимоги сучасності. В Україні початком STEM освіти був покладений в 2015р, а план заходів до реалізації був прийнятий в 2016. В усіх вище зазначених авторів підручники були видані як в 2016 так і в 2021. Враховуючи все вище сказане можна зробити висновок, що деякі автори за два цикли видань, не хочуть використовувати принципи суміжного навчання або не розуміють його важливості.

3.2 Список прикладних завдань з теми «трапеція»

Зважаючи на те, що в сучасних українських підручниках та збірниках, не вистачає прикладних задач, які б поєднували різні галузі, а також могли б зустрітися учню в реальному житті, я зібрав ці задачі в цьому пункті.

1. Листок фікуса має трапецієподібну форму. Нижня основа листка дорівнює 12 см, верхня - 8 см, висота листка - 6 см. Обчисліть площу листка. Відповідь: 60 см².

2. Дах будинку має форму трапеції. Нижня основа даху 10 м, верхня основа 6 м, висота даху 4 м. Обчисліть площу даху та його периметр. Відповідь: 32 м^2 .

3. Зрошувальний канал має трапецієподібний переріз. Ширина дна каналу 2 м, ширина верху 4 м, глибина 1,5 м. Обчисліть площу поперечного перерізу каналу. Визначте об'єм води, який проходить через канал за 1 годину, якщо швидкість течії 0,5 м/с.

Відповідь: $S = \text{м}^2$; 8100 м^3 .

4. Земельна ділянка має форму прямокутної трапеції. Паралельні сторони мають довжину 120 м та 80 м, відстань між ними 50 м. Розрахуйте: площу ділянки в гектарах, периметр ділянки.

Відповідь: $S = 0,5 \text{ га}$; $P = 230 \text{ м}$.

5. Проектується клумба трапецієподібної форми. Нижня основа 6 м, верхня основа 4 м, висота 3 м. Розрахуйте: а) площу клумби та б) кількість рослин, які можна висадити, якщо на одну квітку потрібно 40 см^2 . Відповідь: а) 15 м^2 ; б) 3750.

6. Глибина зрошувального каналу становить $3\sqrt{2} \text{ м}$, ширина на дні становить 4 м, а на поверхні 10 м. Який кут утворює стінка каналу з його дном, якщо в перерізі форма каналу це рівнобічна трапеція? Відповідь: 45° .

7. Горище, переобладнане під спальню, має дві стіни у формі рівнобічної трапеції. Відомо, що потрібно штукатуркою покрити 22 м^2 , яка висота стін якщо зі сторони даху основа трапеції дорівнює 4 м, а кут між нею та бічною стороною дорівнює 120° , а сама бічна дорівнює 3. Кутом нахилу даху знехтувати. Відповідь: 2 м.

8. На рисунку 26 зображено поперечний переріз контейнера. Компанія, що виробляє такі контейнери, хоче провести лінію вздовж бокової стінки контейнера, яка б позначала рівень заповнення наполовину. Склавши систему рівнянь, використовуючи наведені розміри, знайдіть: а) Довжину лінії x ; б) Висоту у лінії над основою;

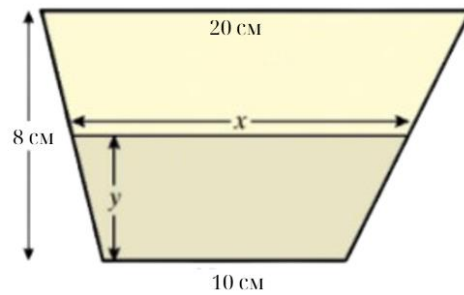


Рис. 26

Відповідь: а) 15 см; б) 4 см.

9. Кондитер хоче виготовити торт висотою 15 см, в основі якого буде трапеція з основами 10 см та 16 см і висотою 12 см. Але в нього є розраховані інгредієнти на торт квадратної форми розміром 20 см на 20 см тієї ж висоти. На який коефіцієнт потрібно помножити усі інгредієнти, щоб отримати правильні значення. (підказка потрібно знайти відношення площі основ торта)
Відповідь: 0,39.

10. Сара хоче оформити клумбу внизу перед своїм будинком розміри вказані на рисунку 27. Вона хоче засадити всю клумбу кущами троянд. Для кожного куща потрібно 1.5 m^2 щоб коріння могло рівномірно розповсюджуватися. Яку максимальну кількість кущів троянд вона може посадити на своїй клумбі?

Відповідь: 14 кущів.

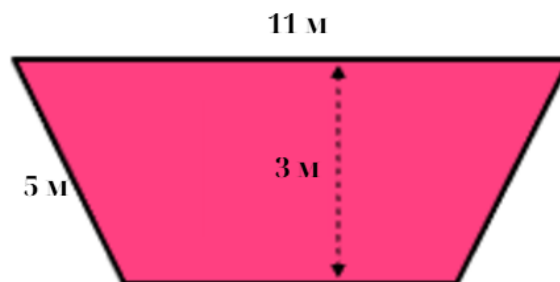


Рис. 27

11. Васирина має спідницю у формі рівнобічної трапеції, кут між бічною стороною, яка дорівнює 440 мм та більшою основою дорівнює 60° , сума основ дорівнює 820 мм. Знайти напівобхват спідниці. Чому дорівнюватиме радіус поясної частини спідниці якщо припустити, що утвориться коло.
Відповідь: 340 мм; 100 мм.

12. Клумбу у формі трапеції з меншою основою та бічною стороною по 6 метрів і тупим кутом 135° потрібно облицювати плиткою з трьох сторін, що утворюють прямі кути. Визначте кількість плиток, якщо на метр периметра потрібно 10 штук.

Відповідь: 240 шт.

13. Ділянка підприємства має форму рівнобічної трапеції з бічними сторонами по 300 метрів і відстанню між їхніми серединами 400 метрів. Основи трапеції відносяться як 7:3. За який час охоронець, що рухається зі швидкістю 4 км/год, обійде периметр цієї ділянки?

Відповідь: 21 хв.

14. Для саду відвели ділянку землі, що має форму трапеції. Довша паралельна сторона на 50 метрів більша за кожну іншу сторону. Відстань між серединами бічних сторін становить 90 метрів. Навколо цього саду планують облаштувати алею шириною 2 метри. По обидва боки цієї алеї хочуть посадити дерева з відстанню між ними 3 метри. Скільки дерев потрібно для цього? Яка загальна вартість дерев, якщо одне дерево коштує 150 гривень?

Відповідь: 212 дерев; ціна – 31800 грн.

15. В основі призми лежить трапеція з основами 5 см і 3 см. Висота трапеції дорівнює висоті призми і складає 4 см. Половину об'єму призми займає розчин Натрій гідроксиду, що містить 1,44 мг розчиненої речовини. Знайдіть молярну концентрацію розчину [20].

Відповідь 1,125 ммоль/л.

16. Перпендикулярний переріз силосної ями глибиною 6 м має форму трапеції з основами 8 м і 20 м і довжиною 100 м, скільки тонн силосу вміщується в цю яму якщо об'ємна маса силосу 1,2 т [21]?

Відповідь: 5054 т.

17. Інженерам потрібно побудувати дамбу для утримання води у великому водосховищі. Ширина цієї дамби у її нижній основі складатиме 6 м., а у верхній 14 м. Дамба планується висотою в 5 м. та товщиною у 3 м. Скільки тон бетону необхідно для побудови такої дамби, якщо на 1 м^3 необхідно 2450 кг бетону.

Відповідь: 367,5 т.

18. Існує деяке сховище для зберігання цінних металів. Але воно має обмежені розміри: висота 0,45 м, ширина 0,35 м. Товщина достатня щоб помістити один злиток золота, яке має форму трапеції, та відповідні розміри основи 10 і 2, бічна сторона 8, а кут при більшій з основ складає 30° . Яку кількість таких злитків можна захистити у сховищі.

Відповідь: 33.

19. Скільки плиток бруківки у формі трапеції з розмірами основ 10 см і 20 см і висотою 8, потрібно взяти щоб закласти площу форми прямокутної трапеції у якої більша діагональ дорівнює 17 м, а висота 8 м, а менша основа – 5 м.

Відповідь: 4167 плиток.

20. Петро й Василь вирішили зустрітися в парку. У парку є 4 входи та кілька стежок, як зазначено на малюнку 28. Хлопці завчасно не домовилися, де саме вони зустрінуться. Тому Петро, зайшовши через вхід А, вирішив перейти парк до протилежного входу С. Василь діяв аналогічно. Він зайшов через вхід D і пішов до входу В. Коли вони підійшли до стежки, розташованої посередині парку, то побачили один одного і їм стало цікаво, на якій відстані між ними вони помітили один одного. Маючи доступ до інтернету, вони дізналися, що відстані між входами А і D та В і С відповідно дорівнюють 200 м та 150 м. Чи достатньо хлопцям даних, щоб відповісти на їхнє запитання? [22]

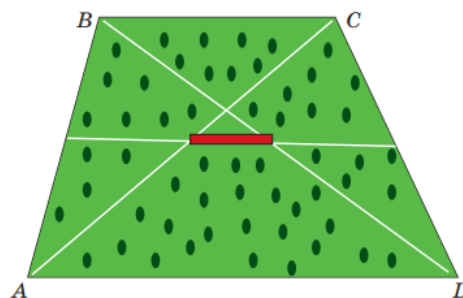


Рис. 28

Відповідь: 25м.

21. У металевій деталі потрібно зробити отвір, який матиме форму рівнобічної трапеції за розмірами на рис. 29. Який повинен бути кут нахилу бічної грані до більшої основи?

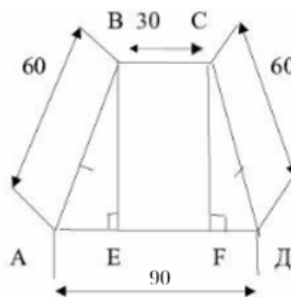


Рис. 29

3.3 Розробка інтегрованого уроку з геометрії 8 клас на тему «Площа трапеція»

Тема: Розв'язування задач з теми трапеція за допомогою мови програмування Python.

Мета: засвоїти знання за темою «трапеція», розвинути навички використання інформаційних технологій.

Тип уроку: інтегрований (геометрія та інформатика).

Обладнання: комп'ютери, підручники, роздаткові матеріали.

Перебіг уроку

Вступ (5 хвилин):

Розпочнемо урок з пригадування, що таке трапеція. Учні вже знайомі з основними властивостями фігурами. Пригадуємо основи мови Python. Поняття типів даних змінних, математичних операторів. Пояснимо, що сьогодні ми будемо вивчати, як можна використовувати комп'ютерні програми для роботи з трапеціями. Повторюємо правила безпеки роботи за комп'ютером.

Аналіз опорних знань (10 хвилин):

Відповіді на питання вчителя математики:

- Яка фігура називається трапецією?
- Які є види трапеції? Які їх особливості?
- Як обчислити площу трапеції?

Відповіді на питання вчителя інформатики:

- Що таке тип даних? Які є типи даних?
- Які математичні оператори? Як їх використовувати?
- Що роблять команда `print()` і команда `input()`?

Застосування умінь і навичок (25 хв):

Учні виконують завдання за комп'ютером, програмуючи ідею розв'язку чи обчислення якогось значення. Виконують наступні завдання.

Завдання 1. Створити програму для обчислення периметра трапеції. Сторони трапеції вводяться за допомогою функції `input()`. Вивід результату через функцію `print()`. Обчислити для наступних вхідних даних:

Таблиця 2. Дані для перевірки задачі 1

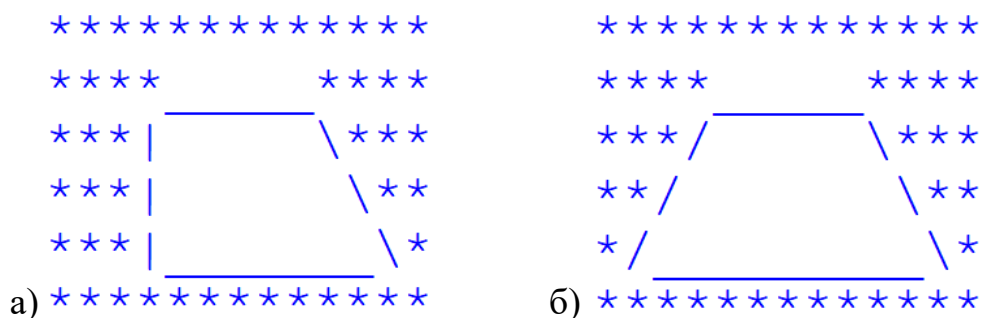
INPUT				OUTPUT
a	b	c	d	P
4	8	5	5	22
32	48	10	12	102
18	15	10	9	52

Завдання 2. Створити програму для обчислення площі трапеції. Основи трапеції та її висота вводяться за допомогою функції `input()`. Вивід результату через функцію `print()`. Обчислити для наступних вхідних даних:

Таблиця 3. Дані для перевірки задачі 2

INPUT			OUTPUT
a	b	h	S
40	60	10	500
8	14	5	55
15	19	13	221

Завдання 3*. За допомогою змінних та функції `print()` малюнка трапеції за допомогою символів «`*`», «`_`», «`|`», «`/`», «`\`». Наприклад:



Підсумок уроку (5 хв):

- Учні діляться досвідом між собою.
- Чого ви навчилися на цьому уроці?
- Що було складним на уроці?

Домашнє завдання:

Знайти дома трапеціє подібну річ і описати усі її характеристики.

3.4 Розробка інтегрованого уроку з геометрії 8 клас на тему «Застосування штучного інтелекту для вивчення трапеції»

Тема: Застосування штучного інтелекту для вивчення трапеції

Мета: засвоїти знання за темою «трапеція», навчитися використовувати технології штучного інтелекту.

Тип уроку: інтегрований (геометрія та інформатика).

Обладнання: комп'ютери, підручники, роздаткові матеріали.

Перебіг уроку

Вступ (5 хвилин):

Розпочнемо урок з пригадування, що таке трапеція. Учні вже знайомі з основними властивостями фігурами. Пояснимо, що сьогодні ми будемо вивчати, як можна використовувати технології штучного інтелекту для роботи з трапеціями. Повторюємо правила безпеки роботи за комп'ютером.

Аналіз опорних знань (10 хвилин):

Відповіді на питання вчителя математики:

- Яка фігура називається трапецією?

- Які є види трапеції? Які їх особливості?
- Як обчислити площу трапеції?

Відповіді на питання вчителя інформатики:

- Що таке Штучний інтелект?
- Які ви знаєте приклади технологій штучного інтелекту?
- Що таке prompt?

Застосування умінь і навичок (25 хв):

Учні виконують завдання за комп'ютером:

Завдання 1. Розв'яжіть задачу: Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

Завдання 2. Оберіть дві технології штучного інтелекту серед найпопулярніших генеративних ШІ (Chat GPT, Gemini, Claude AI, Copilot AI). Попросіть їх розв'язати Завдання 1. Порівняйте результати між технологіями та з тими що ви отримали самостійно. Дайте відповідь на питання. Чи помилилася одна з систем? Які стратегію розв'язання вони використовували? Чий розв'язок вам зрозуміліший?

Завдання 3. Спробуйте створити малюнок до задачі 1 за допомогою однієї з технологій для генерування зображень. Наприклад: Image Creator in Bing, Firefly, DeepAI, Playground чи Leonardo AI.

Підсумок уроку (5 хв):

- Учні діляться досвідом між собою.
- Чого ви навчилися на цьому уроці?
- Що було складним на уроці?

Домашнє завдання:

Згенерувати цікаву картинку про математику чи трапецію.

ВИСНОВКИ

Отже, головним завданням освіти в Україні сьогодні є впровадження STEM-технологій та створення умов для розвитку спеціалістів нового рівня. Такий працівник буде сформованою особистістю, з наявними критичним мисленням, ціннісними орієнтирами та сформованими між предметними компетентностями, які відповідатимуть сучасними вимогам.

STEM-навчання фокусується на практичних завданнях, вчить учнів шукати рішення через експерименти та співпрацю. Це розвиває критичне мислення, навички вирішення проблем та творчість.

Проте в контексті вивчення геометрії у 8 класах, з цим є проблеми, адже не всі затверджені підручники реально відповідають вимогам часу і часто не даються відповідних можливостей для вчителів. Тому вчителям доводиться самостійно і додатково шукати матеріали, для заохочення дітей і формування в них тих вмінь які будуть корисним у дорослому житті. Зокрема підбирати такі теми уроків, щоб учням не було нудно на уроці і не виникало питань «А нащо це нам». Звичайно через STEM заняття не повинні перетворюватися на гру, на першому місці завжди повинен бути навчальний процес.

Ті компетентності які на сучасному етапі формуються у закладах освіти, є хорошим стартом і в майбутньому обов'язково дадуть результат у вигляді спеціалістів високого класу. Тому якість впровадження STEM-освіти в повинна покращуватися за рахунок плавного приросту використання специфічних, прикладних завдань.

Ключовим як і в компетентісному підході так і в STEM є роль вчителя в цьому процесі. Педагог повинен готувати учнів до пізнання світу через одну загальну призму, а не декілька ізольованих частин. Тільки такий процес дасть результат в майбутньому.

Трапеція одна з тих фігур, яка має прихований вплив на цей світ, і хоч це всього лише один вид чотирикутника, вона є дуже важливою в контексті розуміння планіметрії. За межами школи ця фігури також часто зустрічається, як

вдома так і по дорозі туди. Розуміння цієї фігури впливає на загальне розуміння учнями тем та формування в них математичних компетентностей.

У цій роботі я проаналізував популярні підручник з геометрії для 8 класів, після чого зробив висновок, що тільки двоє з п'яти авторів активно впроваджують у програму новітні елементи. Нажаль інші не показали такої ефективності у застосування задач з реального життя в своєму курсі. Тому мною був зібраний перелік з 20 задач, які не тільки відповідають категорії STEM а я й по справжньому є міжгалузевими. Бо там зібрані задачі з біологів фізики, хімії, медицини, аграрного сектору та купи інших. Окрім того були розроблені конспекти двох інтегрованих уроків з геометрії та інформатики, які мають на меті зацікавити учнів у використанні комп'ютера. Акронім STEM включає в себе Technology і ці уроки спрямовані на використання таких сучасних ситем.

В цих роботах використовувалися такі дві важливі сфери майбутнього як програмування та штучний інтелект. За допомогою них учні можуть вчитися досліджувати світ. Ці сфери є майбутнім усього світу і важливо розвивати в дітей навички роботи з ним з підліткового віку. В такому випадку учень швидше зрозуміє чи йому це цікаво, чи можливо варто змінити свій шлях.

Загалом STEM-освіта виконує своє завдання з точки зору формування у учнів відповідних компетентностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Горох. Етимологія терміну "трапеція" [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://goroh.pp.ua/Етимологія/трапеція>
2. Нелін Г. Геометрія в таблицях: Навчальний посібник для старших класів. – Х.: Світ дитинства, 1997. ISBN 966-544-005-5 – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://sagevg.wordpress.com/>
3. Weisstein, Eric W. "Area." From MathWorld – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://mathworld.wolfram.com/Area.html>
4. Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – К. : Гімназія, 2021. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/8-klas-geometriya-merzlyak-2021.pdf>
5. Верещак Р. Формули для обчислення площі трапеції [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.mathros.net.ua/formuli-dlya-rozrachunku-perimetra-ta-ploshhi-trapeci%D1%97.html>
6. Temple of Dendur [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/Temple_of_Dendur
7. Smith W. Understanding Trapezoids – Properties, Types, and Applications [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.storyofmathematics.com/trapezoid/>
8. Державна служба якості освіти: Що таке компетентнісний підхід у навчанні [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://nus.org.ua/questions/zo-take-kompetentnisnyj-pidhid-u-navchanni-vidpovidaye-derzhavna-sluzhba-yakosti-osvity/>
9. EDera. Ключові компетентності [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://edera.gitbook.io/mathmon59-new/vstup/poyasnuvalna_zapyska/kompetentnyst
10. Шпак С. Формування математичних компетентностей [Електронний ресурс]. – Режим доступу:

<https://naurok.com.ua/formuvannya-matematichnih-kompetentnostey-v-uchniv-za-novimi-programami-26147.html>

11. Сафонова І. Я. Формування математичної компетентності у старшокласників // Актуальні проблеми державного управління, педагогіки та психології. – 2013. – Вип. 2. – С. 397-402. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/apdytp_2013_2_87

12. Гнезділова В.І. Інноваційні технології у STEM-освіті: навчальний посібник для студентів спеціальності 014 Середня освіта (за предметними спеціалізаціями). Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2021. 76 с. – Режим доступу: <https://ciot.pnu.edu.ua>

13. Методичні рекомендації STEM-освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://osvita.ua/doc/files/news/928/92801/List_IMZO_Metodichni_rekomendaciyi_STEM-.pdf

14. Грузін Д. В. АКТУАЛЬНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ STEM-ТЕХНОЛОГІЙ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ : матеріали І Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції «Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи» – Режим доступу:

<http://conf.fizmat.tnpu.edu.ua/media/magazin/2017/09.11.2017.pdf>

15. Використання елементів STEM-освіти на уроках математики. Збірник матеріалів роботи творчої групи викладачів математики. – Рівне: НМЦ ПТО, 2019. – 95 с. – Режим доступу: https://wp.nmc-pto.rv.ua/DOK/TG2019/TG_STEM_2019.pdf

16. Істер О. С. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер. — 2-ге вид., переробл. — Київ : Генеза, 2021. — 240 с. ISBN 978-966-11-1191-1. – Режим доступу:

<https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/8-klas-geometriya-ister-2021.pdf>

17. Бевз Г. П. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти – Київ : Видавничий дім «Освіта», 2021 – 273 с. – Режим доступу:

<https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/8-klas-geometriya-bevz-2021.pdf>

18. Єршова А. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти / — 2ге вид., перероб. — Харків.: Вид-во «Ранок», 2021. — 256 с. ISBN 9786170969781 — Режим доступу:

<https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/8-klas-geometriya-ershova-2021.pdf>

19. Бурда М. Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти, Київ: УОВЦ «Оріон», 2021. 195 с. — Режим доступу: <https://files.pidruchnyk.com.ua/uploads/book/8-klas-geometriya-burda-2021.pdf>

20. Сулімова Т. В. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕННЯ ІНТЕГРОВАНИХ УРОКІВ МАТЕМАТИКИ І ХІМІЇ В КЛАСАХ ПРИРОДНИЧОГО ПРОФІЛЮ:

Кваліфікаційна робота, Кривий Ріг, 2023 — Режим доступу: <https://elibrary.kdpu.edu.ua>

21. Математика в сучасному технічному університеті : матеріали III Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 25–26 груд. 2014 р.). — К. : НТУУ «КПІ», 2015. — 386 с. — Укр., рос., англ., білорус. ISBN 978-617-7021-10-9 — Режим доступу: <https://matan.kpi.ua/public/files/mvstu3/mvstu3-abstracts.pdf>

22. Бурда М. І., Волошена В. В., Тарасенкова Н. А. Практикум з геометрії для 7–9 класів [електрон. вид.] : збірник практико-орієнтованих задач. Київ: УОВЦ «Оріон», 2024. 152 с. : іл. ISBN 978-966-991-341-8 — Режим доступу: <https://lib.iitta.gov.ua>