

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

**на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти
на тему “Формування математичних компетентностей в учнів при
розв’язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей”**

Виконала:

магістрантка групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Струк Мирослава Русланівна

Керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор

Пилипів Володимир Михайлович

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор

Заторський Роман Андрійович

Івано-Франківськ – 2024 р.

Зміст

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ	6
1.1. Формування математичної компетентності учнів на уроках математики.....	6
1.2. Особливості навчання розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики	10
РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ.....	15
2.1. Рекомендації щодо формування математичної компетентності учнів під час розв'язування рівнянь та нерівностей	15
2.2. Розв'язання ірраціональних рівнянь	19
2.3. Розв'язання ірраціональних нерівностей	28
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ, ЯКІ СПРИЯЮТЬ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ	31
3.1. Розробка методичних та дидактичних матеріал для вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей	31
3.2. Апробація результатів дослідження.....	53
ВИСНОВКИ.....	64
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	66
ДОДАТКИ	71

ВСТУП

Актуальність дослідження. У курсі математики значну частину присвячено дослідженню рівнянь та нерівностей. Поряд із показниковими, тригонометричними, логарифмічними та раціональними варто виділити ірраціональні рівняння та нерівності.

На відміну від перерахованих видів рівнянь – ірраціональні рівняння та нерівності вимагають використання великої кількості теорем рівносильності та наслідку, що значно збільшує обчислювальну складність розв'язків рівнянь із радикалами.

При розв'язанні рівнянь і нерівностей цього виду необхідно врахувати такі принципи:

- немає універсального алгоритму рішення ірраціональних рівнянь;
- внаслідок того, що при розв'язанні рівнянь та нерівностей доводиться використовувати не рівносильні перетворення, то значно підвищується ймовірність появи помилок через знаходження «зайвих» коренів або їх втрати в процесі розв'язання.

Ірраціональні рівняння також використовуються для отримання таких важливих розрахунків як:

- перша космічна швидкість, яка розраховується за формулою $v_I = \sqrt{GRM}$;
- друга космічна швидкість $v_{II} = \sqrt{2gR}$;
- середня швидкість теплового руху молекул;
- у біології для розрахунку щільності довкілля;
- в авіації для обчислення горизонтальної швидкості польоту літака.

Науково доведено, що розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей сприяє підвищенню концентрації людини, що також призводить до розвитку мислення.

Питання взаємозв'язку між поняттями «нерівність», «рівняння» і «функція» широко висвітлено у дослідженнях М.В. Паюл. Дослідження М.П. Комова, Г.Н. Солтан присвячені доведенню і розв'язуванню нерівностей.

Велику увагу приділено внутрішньопредметним зв'язкам при вивченні нерівностей та їх систем в курсі математики середньої школи у дослідженнях Є.Ф. Недошивкіна. Прикладні аспекти вивчення нерівностей та їх систем в середній школі висвітлено у роботах Н.Б. Мельникової, Д.Д. Рибдалової. Питанням математичної компетентності присвячено роботи Н.М. Ведмідь, М. С. Головань.

Актуальність даного дослідження обумовлюється тим, що при підготовці до складання НМТ учні стикаються з описаними рівняннями та нерівностями.

Мета дослідження – розкрити особливості формування математичних компетентностей в учнів при розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Об'єктом нашого дослідження виступає процес навчання учнів загальноосвітніх шкіл розв'язуванню ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Предмет дослідження – особливості формування математичних компетентностей в учнів при розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Завдання дослідження:

1. Висвітлити формування математичної компетентності учнів на уроках математики.
2. Описати особливості навчання розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики.
3. Розробити рекомендації щодо формування математичної компетентності учнів під час розв'язування рівнянь та нерівностей.
4. Розкрити розв'язання ірраціональних рівнянь.
5. Проаналізувати розв'язання ірраціональних нерівностей.
6. Розробити методичні та дидактичні матеріали для вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей.
7. Здійснити апробацію результатів дослідження.

Методи дослідження – теоретичний аналіз літератури, порівняння, синтез.

База дослідження – Білоославський ліцей імені Марійки Підгірянки Делятинської селищної ради.

Апробація результатів. За матеріалами науково-дослідної роботи я розробила 3 заняття на тему «Розв’язування ірраціональних рівнянь» та провела їх у Білоославському ліцеї імені Марійки Підгірянки Делятинської селищної ради у період з 06.02.2024 до 15.03.2024 під час педагогічної практики. Отримано акт використання результатів виконаної науково-дослідної роботи. (Додаток А)

Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновку, списку використаної літератури, додатків.

РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1.1. Формування математичної компетентності учнів на уроках математики

Концепція математичної освіти заснована на ідеї особистісно-орієнтованого навчання. Зміни у шкільній освіті призвели до того, що відбулося зростання навчального навантаження. Зменшення навчальних годин при збереженні обсягу навчального матеріалу компенсується збільшенням домашньої роботи та інших форм самостійних робіт. Від питання «чому учити» школа переходить до вирішення проблем «як навчати», «за допомогою чого вчити», «як перевірити та оцінити досягнення учня» та «хто вчитиме».

Українські стандарти визначають вимоги не лише до випускника як результату освіти, а й до якості освіти, а також, певною мірою до самого освітнього процесу. Стандарти виступають як активний засіб регулювання суспільних відносин та організації виробничих процесів.

Стандартизація якості освіти орієнтована на досягнення результатів у навчанні (рис.1.1).



Рисунок 1.1. Результати у навчанні

Математична компетентність школяра – системна властивість особистості, що виражається у наявності глибоких і міцних знань з предмета, в умінні застосовувати наявні знання у новій ситуації, здатності досягати значних результатів та якості у діяльності [3].

Цілями навчання математики в школі є розвиток математичного мислення учнів, придбання ними глибоких та міцних теоретичних знань елементарних початків математичної науки, необхідні для продовження освіти у вузі та для практичної діяльності, а також уміння та навичок застосування цих теоретичних знань у різних конкретних ситуаціях. Також виділяють розуміння учнями наукових засад сучасної техніки та сучасного виробництва, в тій частині, в якій це стосується використання математичних методів у техніці та на виробництві.

Активне навчання математики, яке розуміється як навчання математичної діяльності, передбачає кілька етапів, які повинні освоїти школярі. На першому етапі пряме застосування у знайомій ситуації відомих фактів, стандартних прийомів, розпізнавання математичних об'єктів і властивостей, застосування відомих алгоритмів, робота з стандартними, знайомими виразами та формулами, безпосереднє виконання обчислень. На другому - репродуктивна діяльність з розв'язанням завдань, які, хоч і не є типовими, але все ж знайомі учням або виходять за рамки відомого лише дуже мало.

Третій етап будується як розвиток попереднього рівня. Для розв'язання завдань цього рівня потрібні певна інтуїція, роздуми та творчість у виборі математичного інструментарію, інтегрування знань із різних розділів курсу математики; самостійна розробка алгоритму дій.

Нерідко останній рік навчання у школі для учнів зводиться до підготовки до випускних іспитів. Часто така підготовка має формальний характер.

Не приділяється належної уваги систематизації вже здобутих знань та їх поглибленню. Актуальним видається розв'язок суто конкретних, штучно

ускладнених прикладів та вміння застосувати (а точніше сказати, вгадати) так званих «штучних прийомів» замість систематичного вивчення методів розв'язання ретельно класифікованих завдань.

Математика — це єдиний предмет, при вивченні якого учням доводиться виконувати відразу кілька видів діяльності (рис. 1.2)

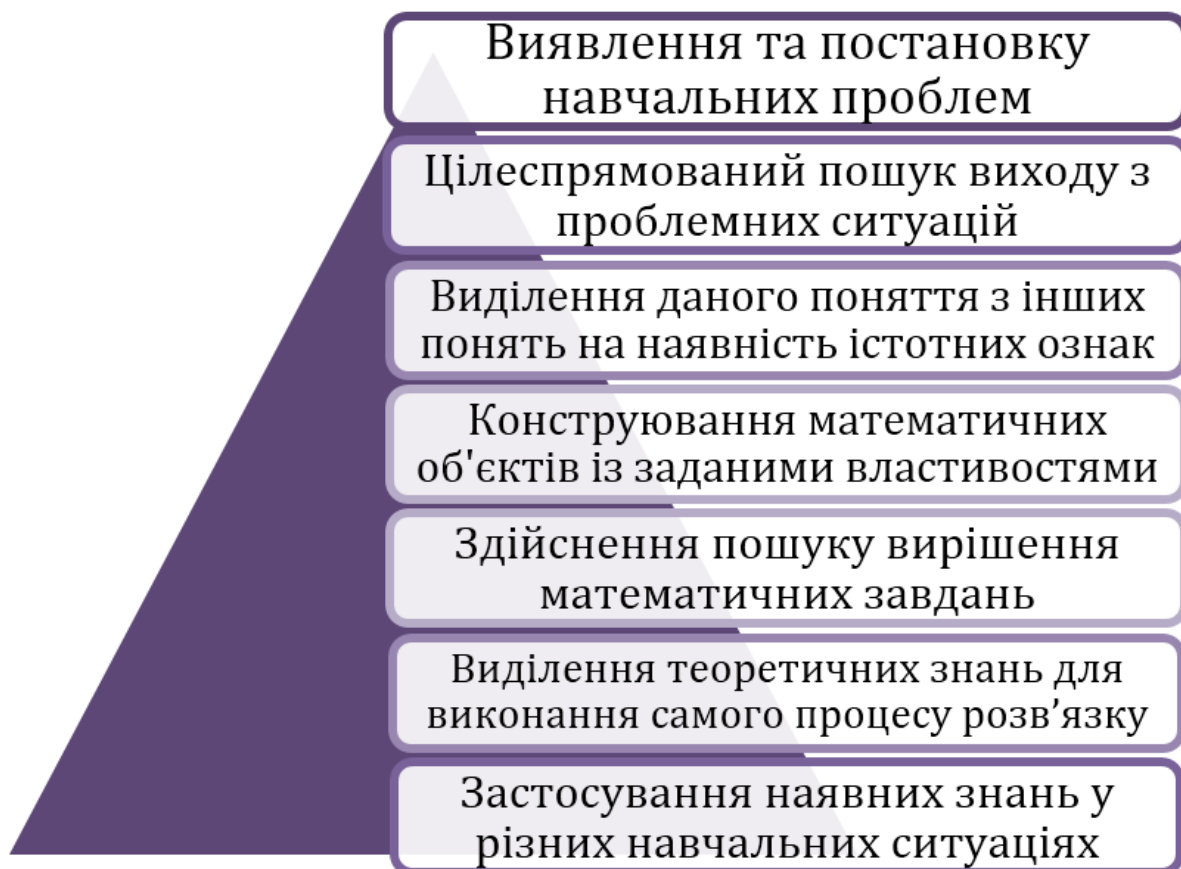


Рисунок 1.2. Види діяльності

Основними цілями математичної освіти є:

- інтелектуальний розвиток особистості учнів, формування таких видів навчально-пізнавальної діяльності, які з самого початку включають задану систему знань і забезпечують їх застосування у заздалегідь встановлених межах;
- формування таких якостей мислення, які характерні для математичної діяльності та необхідні людині для повноцінного життя в суспільстві (усвідомленість, гнучкість, глибина, широта, критичність мислення);

- формування уявлень про методи математики, і насамперед про метод математичного моделювання [28].

Математика є невід'ємною складовою системи загальної освіти всіх країн світу. Пояснюється це насамперед роллю та значимістю навчального предмета математики у формуванні особистості учня в силу того, що освітній, виховний та розвиваючий потенціал математики величезні.

На утримання шкільної математичної освіти великий вплив має математична наука, яка є складним, багатогранним і багатоаспектним явищем: це і вивчення реального світу з кількісного боку, і мова опису науки, і абстрактна модель світу, і логічно збудована структура науково-теоретичних фактів.

Специфічні риси математики як науки та як навчального предмета визначають її особливе становище у ряді базисних напрямів розвитку особистості [29].

Самостійне застосування знань учнями у різних сферах наукових знань стане можливим у тому випадку, якщо вони оволодіють теоретично узагальненими структурами понять, систем понять, різними видами математичних тверджень (леми, теореми), методами їх доведення, методами та прийомами розв'язання різних типів математичних завдань, вміннями аналізувати, узагальнювати, порівнювати, класифікувати, висувати різні гіпотези (спростовувати їх чи доводити), користуватися аналогіями.

Математичні, філософські, психолого-педагогічні дослідження показують, що математична освіта не зводиться до передачі учню бази готових теоретичних знань [1]. Головне – це розкрити логіко-гносеологічну природу математичних знань, механізми та закономірності їх виникнення, подальшого розвитку, поглиблення та подальшої інтеграції.

Звідси впливають проблеми, пов'язані з побудовою змісту шкільної математичної освіти:

1) не розширюючи обсяг навчального матеріалу дати учням необхідний запас теоретичних знань;

- 2) розкрити логіко-гносеологічну природу формованих понять;
- 3) сприяти об'єднанню понять у системи (підсистеми), здійснювати подальший розвиток та вдосконалення систем, поєднуючи в більш загальні теоретичні системи сутнісних знань [30].

При такому підході на перший план мають висуватися такі компоненти: змістовно-цільовий, процесуально-діяльнісний, контрольно-оцінний та оціночно-рефлексивний.

Одним з основних компонентів реалізації компетентнісного підходу залишається використання набутих знань та умінь у повсякденному житті. Шкільна дисципліна математика поділяється на чотири нерозривні складові: арифметика, алгебра, геометрія та елементи комбінаторики та теорії ймовірності. У межах кожної з них, враховуючи компетентнісний підхід, до практичних навичок повинні пред'являтися такі вимоги:

- Арифметика. Розв'язок елементарних практичних розрахункових завдань, проведення нескладних усних розрахунків та попередня оцінка результатів, здійснення перевірки результату обчислення за допомогою різних способів.

- Алгебра. Виконання розрахунків за готовими формулами; виведення формул, що показують залежність між реальними об'єктами; вміння описати залежність між фізичними величинами під час проведення нескладних експериментів.

- Геометрія. Опис розрахунків реальних ситуацій на геометричній мові; розв'язання прикладних завдань, спрямованих на знаходження геометричних величин; вміння виконувати побудову геометричними інструментами [31].

- Елементи комбінаторики та теорії ймовірності. Обчислення ймовірності будь-якої події для здійснення практичних розрахунків.

1.2. Особливості навчання розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей у шкільному курсі математики

Розглянемо важливі для вивчення ірраціональних рівнянь положення. По-перше, учні повинні знати умови піднесення ірраціонального рівняння до квадрату. Дуже поширений прийом розв'язання ірраціональних рівнянь – піднесення до квадрату. Тим не менш, важливо знати умови піднесення до квадрату, інакше можна допустити багато помилок. По-перше, підносячи до квадрату обидві частини рівняння, можна розширити область допустимих значень невідомого, що може призвести до появи сторонніх коренів. По-друге, часто в результаті цієї операції виходить рівняння з громіздкими коефіцієнтами, працювати з якими важко. Зрештою, може відбутися збільшення вдвічі рівняння. Піднісши обидві частини до квадрату, можна позбутися ірраціональностей, але отримати раціональне рівняння другого степеня, способи розв'язання якого в загальному вигляді школярам не завжди відомі або взагалі не існують. Якщо підносити до квадрату таки доводиться, потрібно уважно стежити за тим, щоб не включити у відповідь сторонні корені. Зокрема, якщо рівняння має вигляд $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то для коренів має виконуватися умова $g(x) \geq 0$ (при цьому $f(x)=g(x) \geq 0$ і умову $f(x) \geq 0$ окремо ставити не потрібно). Ще один спосіб виявити сторонні корені – перевірка всіх знайдених коренів підстановкою їх у початкове рівняння.

По-друге, учні повинні розуміти важливість виконання рівносильних перетворень. Повинні знати, що всі перетворення рівнянь можна поділити на два типи:

- рівносильні, тобто перетворення, після застосування будь-яких з них вийде рівняння, рівносильне вихідному рівнянню;
- нерівносильні, тобто перетворення, після застосування яких може статися втрата чи надбання сторонніх коренів.

Повинні знати, які з таких типів перетворень призводять до рівносильних рівнянь, а які ні. Розглянемо ці типи перетворень.

Перенесення членів рівняння з однієї частини до іншої, тобто перехід від рівняння

$$f(x)=\varphi(x) + g(x) \quad (1)$$

до рівняння

$$f(x) - \varphi(x) = g(x). \quad (2)$$

Вказане перетворення призводить до рівносильного рівняння.

Приведення таких членів, тобто перехід від рівняння

$$f(x) + \varphi(x) - \varphi(x) = g(x) \quad (3)$$

до рівняння

$$f(x) = g(x). \quad (4)$$

Справедливо наступне твердження: для будь-яких функцій $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ рівняння (4) є наслідком рівняння (3), тобто (3) (4).

Перехід від рівняння (3) до рівняння (4) є допустимим перетворенням, при якому втрата коренів неможлива, але можуть з'явитися сторонні корені.

Таким чином, при наведенні таких членів, а також при відкиданні однакових доданків у лівій та правій частинах рівняння виходить рівняння, що є наслідком вихідного рівняння. Зведення обох частин рівняння до натурального степеня, тобто перехід від рівняння

$$f(x) = g(x) \quad (6)$$

до рівняння

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

$$, n \in N, n \geq 2. \quad (7)$$

Справедливі такі твердження:

за будь-якого $n \in N, n \geq 2$ рівняння (7) є наслідком рівняння (6);

якщо $n = 2k + 1$ (n – непарне число), то рівняння (6) та (7) рівносильні;

якщо $n = 2k$ (n – парне число), то рівняння (7) рівносильне рівнянню

$$|f(x)| = |g(x)|, \quad (8)$$

а рівняння (8) рівносильне сукупності рівнянь

$$f(x) = g(x),$$

$$f(x) = -g(x). \quad (9)$$

Отже, виходячи із тверджень 1 і 2, піднесення обох частин рівняння до непарного степеня та вилучення з обох частин рівняння кореня непарного степеня є рівносильним перетворенням.

Виходячи із затвердження 1 і 3, зведення обох частин рівняння до парного степеня та вилучення з обох частин рівняння кореня парного степеня є нерівносильним перетворенням, при цьому виходить рівняння, що є наслідком вихідного.

Застосування формули $\sqrt[n]{f(x)} \cdot \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{f(x) \cdot g(x)}$, $m \in \mathbb{N}$ при $n = 2k + 1$ є рівносильним перетворенням, за $n = 2k$ – нерівносильним.

І по-третє, учні повинні проводити контроль та самоконтроль рішення ірраціонального рівняння. Учням слід пам'ятати, що при розв'язанні ірраціональних рівнянь необхідна перевірка всіх знайдених коренів шляхом їх підстановки у вихідне рівняння або знаходження ОДЗ та наступний аналіз коренів (при рішенні методом приведення до рівносильної змішаної системи рівнянь і нерівностей (необхідність у цьому відпадає). В іншому випадку можуть з'явитися сторонні корені.

При роботі з ірраціональними рівняннями важливо відпрацювати одне правило, яке не слід забувати при перетворенні рівнянь: не можна виконувати перетворення, які можуть призвести до втрати коренів.

При розв'язанні рівнянь, у тому числі ірраціональних, використовують загальноматематичні методи (рис. 1.3).



Рисунок 1.3. Загальноматематичні методи

При розв'язанні ірраціональних рівнянь важливо пам'ятати правило, що зводити рівняння у квадрат забороняється за тих значень невідомої, за яких ліва та права частини рівняння мають різні знаки.

Отже, з метою формування математичних компетентностей в учнів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей необхідно:

1. Під час вивчення ірраціональних рівнянь у основній школі доцільно застосовувати процесний підхід до навчання [28], при якому навчання математики сприймається як мережу взаємозалежних процесів: проектування навчання змісту теми, навчання поняттям, навчання математичним методам, зокрема методам розв'язання ірраціональних рівнянь та інших.

2. Вивчення стандартних методів розв'язання ірраціональних рівнянь супроводжується розглядом доцільно підібраних прикладів, що створюють основу розуміння учнями навчального матеріалу [29].

3. Найважливішим завданням навчання є закріплення всіх основних прийомів розв'язання ірраціональних рівнянь в умовах урочної та позаурочної діяльності.

4. Доцільне активне залучення поняття параметра щодо ірраціональних рівнянь. Розв'язання рівнянь із параметрами, використання графічної, знаково-символічної та словесної форм подання математичного змісту, а також організація перекладу з однієї форми подання інформації до інших дозволяють ефективно освоювати математичний зміст.

5. Розгляд різноманітних нестандартних методів розв'язання ірраціональних рівнянь (метод мажорант, функціонально-графічні методи) розширює сферу розуміння учнів [30].

6. Можлива розробка спеціальної програми позаурочної діяльності учнів із вивчення ірраціональних рівнянь у основній школі.

РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

2.1. Рекомендації щодо формування математичної компетентності учнів під час розв'язування рівнянь та нерівностей

Математична компетенція – це здатність структурувати дані, виокремлювати математичні відношення, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати. Тому математична компетенція учня сприяє адекватному застосуванню математики на розв'язання проблем, що виникають у повсякденному житті.

Формувати компетентності учнів можна на різних етапах уроку:

1) *Перевірка домашнього завдання*

- Рецензування відповідей (домашнього завдання)

Ціль: активувати розумову діяльність учнів, розвивати критичне мислення, вчити оцінювати знання учнів.

Результативність: формування комунікативної компетентності

- Математичний диктант, тест, с/р

Ціль: розвивати самостійність мислення, формувати гнучкість та точність думки, розвивати увагу та пам'ять

Результативність: формування самоосвітньої компетентності

2) *Вивчення нового матеріалу*

- Доказ теорем

Ціль: вивчати дослідницьку роботу

Результативність: формування дослідницької компетентності

- Проблемна лекція з використанням отриманої учнями інформації

Ціль: вчити короткого раціонального запису, відпрацьовувати вміння робити висновки та узагальнення

Результативність: формування інформаційної компетентності [32]

3) *Закріплення, тренування, відпрацювання умінь та навичок*

- С/р частково-пошукового, дослідницького характеру;

Ціль: вивчити властивості, правила.

Результативність: формування пізнавальної компетентності

- Дослідження різних видів пам'яті

Ціль: закріпити знання; розробити правила запам'ятовування

Результативність: формування компетентності саморозвитку

- Розв'язання задач, прикладів з коментуванням, індивідуальна робота із самоперевіркою, ігрові форми

Ціль: закріпити вміння розв'язувати завдання та приклади, формувати вміння перевіряти, слухати, думати

Результативність: формування пізнавальної компетентності

- Розв'язання задач декількома способами

Ціль: розвивати особисту позицію учнів, спираючись на їхнє знання теми

Результативність: формування інтелектуально-пізнавальної компетентності

- Робота з підручником (навчальна практична робота) [33]

Ціль: навчати роботі з інформацією; закріпити знання тексту, розуміння теми

Результативність: формування комунікативної та пізнавальної компетентностей

4) *Творча робота*

- Створення проектів

Ціль: показати на основі вивченого матеріалу вміння учнів створювати проекти

Результативність: формування дослідницької компетентності

5) *Контроль*

- Створення реклами (презентації) теми уроку, що вивчається.

Ціль: вчити дітей уяві та вмінню абстрагуватися

Результативність: формування самоосвітньої, дослідницької компетентності

- Різномірнева с/р (взаємоперевірка, самоперевірка, контроль вчителя);

Ціль: вчити дітей, спираючись на здобуті знання, самостійно працювати

Результативність: формування самоосвітньої, соціальної компетентності

6) Домашнє завдання

- Скласти питання, завдання та приклади на тему уроку

Ціль: перевірити засвоєння матеріалу уроку, формувати вміння підбирати приклади

Результативність: формування самоосвітньої компетентності [34]

- Різномірневі завдання;

Ціль: перевірити знання учнів відповідно до їхнього рівня підготовки

Результативність: формування інтелектуально-пізнавальної компетентності

Найважливішим видом навчальної діяльності під час навчання учнів математики є розв'язання задач. Причому основну увагу спрямовано на розвиток здібності учнів застосовувати отримані у школі знання та вміння у життєвих ситуаціях. Але як показують підсумки досліджень PISA (Програма міжнародної оцінки учнів: Моніторинг знань та умінь у новому тисячолітті), виявляються характерні недоліки математичної підготовки вітчизняних школярів. До них відносяться недостатнє засвоєння низки тем, що мають широке практичне застосування: відношення чисел, пропорційні величини, розв'язання задач на відсотки, визначення периметрів та площ фігур, оцінка результатів, читання графіків реальних залежностей. Саме вміння розв'язувати більшість із цих практичних завдань перевіряється на ЗНО [5].

Тому одним із шляхів формування ключових компетентностей та реалізацією компетентнісний підхід у навчанні математики є використання на уроках спеціальних компетентнісно-орієнтованих завдань.

У шкільному курсі алгебри рівняння посідають важливе місце. Лінія рівнянь і нерівностей заснована на побудові та вивченні математичних моделей, включає вироблення та вдосконалення техніки алгебраїчних перетворень для розв'язання рівнянь, нерівностей та систем. У процесі вивчення цієї теми в учнів формуються можливості будувати і досліджувати математичні моделі під час розв'язання завдань із суміжних дисциплін. Значна більшість завдань про кількісні відносини та про просторові форми навколишньої дійсності розв'язується за допомогою рівнянь.

Навчання розв'язання рівнянь починається з найпростіших їх видів. Навчальна програма створює умови для поступового накопичення як видів рівнянь, так і «фонду» тотожних та рівносильних перетворень, за допомогою яких можна навести довільне рівняння до найпростіших.

На основі аналізу теоретико-методичних засад вивчення рівнянь у шкільному курсі сформулюємо етапи навчання школярів розв'язання рівнянь (рис.2.1)

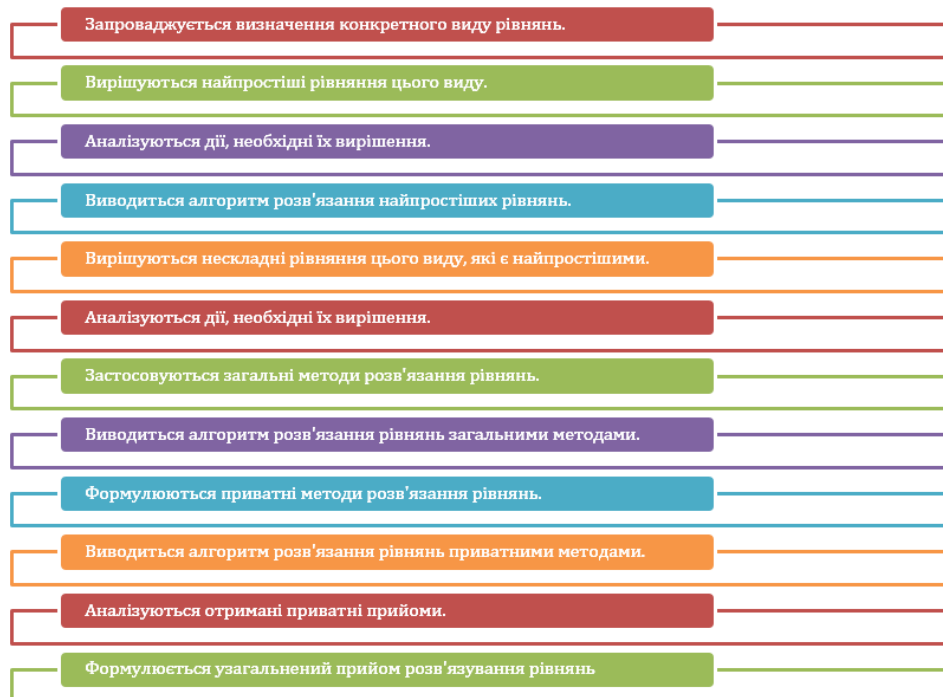


Рисунок 2.1. Етапи навчання школярів розв'язання рівнянь

Щоб формувати вміння розв'язувати рівняння, необхідно навчати способам розв'язування рівнянь. Кожен спосіб розв'язання рівнянь складається

з окремих дій, отже потрібно формувати вміння у школярів виконувати дії, пошуку розв'язання рівнянь.

2.2. Розв'язання ірраціональних рівнянь

Ірраціональним рівнянням (далі за текстом ІР) називається рівняння, що містить невідоме під знаком кореня.

$$\sqrt{A(x)} = B(x), \sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}.$$

1. Формальний метод розв'язання ІР.

Основна ідея розв'язування ІР полягає в тому, що для позбавлення рівняння від радикала необхідно спочатку привести його до раціонального, яке в свою чергу має бути рівносильним вихідному ІР або ж бути його наслідком.

Зведення обох частин рівняння до однакового степеня дозволить позбавитися радикала і отримати більш просте раціональне рівняння.

Зводити необхідно в той степінь, який має корінь, що містить невідоме. Для описаного методу є формула $(\sqrt[n]{\varphi(x)})^n = \varphi(x)$, де n - натуральне число [6].

Розглянемо застосування даного методу для розв'язання ІР виду $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ [7].

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x + 6} = 2\sqrt{2x}$.

Розв'язок. Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрату

$$(\sqrt{2x + 6})^2 = (2\sqrt{2x})^2.$$

і отримуємо наступне рівняння-наслідок

$$8x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Його корені

$$x = 1 \text{ або } x = -0,75.$$

Перевірка. $x = 1$: $\sqrt{2 \cdot 1 + 6} = 2\sqrt{2} \cdot 1 \Leftrightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Це вірна числова рівність, отже, число 1 є коренем вихідного рівняння.

Перевіримо другий знайдений корінь.

$x = -0,75$: $\sqrt{2 \cdot (-0,75) + 6} = 2\sqrt{2} \cdot (-0,75) \Leftrightarrow 4,5 = -1,5\sqrt{2}$. Це неправильна числова рівність, отже, число $-0,75$ не є коренем даного рівняння.

Відповідь: $x = 1$.

Тепер розглянемо той самий метод, але вже для рівнянь виду ${}^{2k+1}\sqrt{f(x)} = g(x)$. [7]

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{-2x^2 + 4x - 1} = x$$

Розв'язок. Для розв'язку цього рівняння необхідно піднести обидві його частини до третього степеня, і так як корінь у нас непарного степеня, це означає перетворення буде рівносильним та перевірка не знадобиться.

$$\left(\sqrt[3]{-2x^2 + 4x - 1}\right)^3 = x^3$$

Користуючись визначенням кореня непарного степеня перепишемо рівняння

$$-2x^2 + 4x - 1 = x^3.$$

Тепер нам необхідно знайти рішення вищезгаданого вже раціонального рівняння, що спрощує завдання у кілька разів.

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0.$$

За теоремою Безу серед дільників вільного члена знаходимо перший корінь рівняння $x_1 = 1$. Ділимо вираз, що стоїть у лівій стороні рівняння на вираз $(x - 1)$ та одержуємо квадратне рівняння

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

$$\text{коренем якого } x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Так усі перетворення, які ми проводили в ході рішення ІР були рівносильними, можна відразу записати відповідь.

$$\text{Відповідь: } x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x - 1 + \sqrt{x + 15}} = 2$$

Розв'язання: $x-1+\sqrt{x+15}=4$, ОДЗ: $x \geq -15$; $5-x \geq 0$; $x \leq 5$.

$$\sqrt{x+15} = 5-x; \quad x+15 = (5-x)^2;$$

$$25 - 10x + x^2 - x - 15 = 0;$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0;$$

$$x_1 = 10 - \text{сторонній корінь}; \quad x_2 = 1 - \text{розв'язок}$$

Відповідь: $x=1$.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$$

Розв'язання: ОДЗ: $x+3 \geq 0$; $7-x \geq 0$; $x \geq -3$; $x \leq 7$.

$$x+3 - 2\sqrt{x+3} \sqrt{7-x} + 7-x = 4;$$

$$2\sqrt{x+3} \sqrt{7-x} = 6; \quad \sqrt{x+3} \sqrt{7-x} = 3;$$

$$(x+3)(7-x)=9; \quad -x^2 + 4x + 21 - 9 = 0; \quad x^2 - 4x - 12 = 0; \quad x_1 = 6; \quad x_2 = -2 - \text{сторонній корінь}.$$

Відповідь: $x = 6$.

2. Метод зведення до еквівалентної системи рівнянь та нерівностей

За допомогою даного методу також відбувається звільнення від радикала, тільки при цьому обов'язково ставиться умова, щоб від рівняння $\sqrt{f(x)} = g(x)$ перейти до еквівалентної системи рівнянь та нерівностей.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Умова $g(x) \geq 0$ допускає піднесення обох частин рівняння до парного степеня без втрати та набуття кореня. Отже, перевірку робити не треба [19].

Умовну нерівність $f(x) \geq 0$ додавати до цієї системи не потрібно, оскільки вона автоматично виконується для коренів умови $f(x) = g^2(x)$. Це досить часта і поширена помилка учнів. [10]

Приклад 3. Розв'яжемо рівняння з Прикладу 1 розглянутим методом зведення до системи

$$\sqrt{2x + 6} = 2\sqrt{2}x.$$

Розв'язок. Представимо рівняння у вигляді еквівалентної системи:

$$\begin{cases} 2x + 6 = 8x^2 \\ 2\sqrt{2}x \geq 0. \end{cases},$$

Перше рівняння перепишемо рівносильною йому рівністю

$$8x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Його корені $x_1 = 1$ та $x_2 = -0,75$.

Корінь $x_2 = -0,75$ не задовольняє нерівності $2\sqrt{2}x \geq 0$ системи та є стороннім коренем як системи, так і вихідного рівняння. А корінь $x_1 = 1$ належить проміжку $x \in [0; +\infty)$, значить є розв'язком даного рівняння.

Відповідь: $x = 1$.

Методом зведення ІР до еквівалентної системи рівнянь та нерівностей також зручно розв'язувати і ІР виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Таке рівняння рівносильне кожній із двох систем

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки після зведення до парного степеня отримуємо рівняння-наслідок $f(x) = g(x)$. Ми повинні, розв'язавши його, з'ясувати, чи належить знайдений корінь ОДЗ вихідного рівняння, тобто чи виконується нерівність $f(x) \geq 0$ (або $g(x) \geq 0$). На практиці із цих систем обирають для розв'язування ту, у якій нерівність простіша [10].

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$$

Подамо його у вигляді еквівалентних систем

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ x^2 + x - 3 \geq 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ 1 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, що друга система розв'язується швидше, але ми розглянемо обидва випадки, щоб переконатися у дієвості методу.

$$1) \begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ x^2 + x - 3 \geq 0; \end{cases}$$

Розв'язуючи перше рівняння із системи переходимо до рівносильного $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Його корені $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Розв'язуючи нерівність, знаходимо що $x \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$.

Тоді рішенням системи та, відповідно, вихідного рівняння буде корінь $x_2 = -4$.

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 3 = 1 - 2x, \\ 1 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

Корені першого рівняння аналогічні, як і в першому випадку $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Розв'яжемо другу нерівність системи. Її розв'язком буде проміжок $x \in (-\infty; 1/2]$. Отже, знову отримуємо, що розв'язком системи та вихідного рівняння є корінь $x_2 = -4$.

Відповідь: $x = -4$.

Таким чином, ми розглянули метод зведення до еквівалентної системи рівнянь і нерівностей та переконалися у його дієвості.

3. Метод відокремлення кореня

При розв'язанні ІР перед піднесенням обох його частин до деякого степеня корисно «відокремити радикал», тобто перенести сам радикал в один бік рівняння, а все інше в інший

$$C(x) = \sqrt[n]{D(x)}.$$

Після зведення вихідного рівняння до такого виду слід розв'язати його як описано у попередніх двох пунктах.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$x + \sqrt{2x + 3} = 6.$$

Розв'язання. Метод усамітнення радикалу призводить до рівняння $\sqrt{2x + 3} = 6 - x$. Тепер це рівняння можна розв'язати попереднім методом зведення до еквівалентної системи рівнянь та нерівностей.

$$\begin{cases} 2x + 3 = (6 - x)^2, \\ 6 - x \geq 0. \end{cases}$$

Після перетворень перше рівняння перетворюється на рівняння

$$x^2 - 14x + 33 = 0,$$

І його корені $x_1 = 11$ та $x_2 = 3$, але за умовою системи $6 - x \geq 0$ розв'язком вихідного рівняння є лише другий корінь $x = 3$.

Відповідь: $x = 3$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3 - x} - 2x + 3 = 0.$$

Розв'язок. Відразу відокремимо радикал у лівій частині рівняння

$$\sqrt{3 - x} = 2x - 3.$$

Тепер рівняння, що вийшло, представимо у вигляді рівносильної системи рівнянь та нерівностей

$$\begin{cases} 3 - x = (2x - 3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0. \end{cases},$$

Розглянемо коротко розв'язок першого рівняння системи

$$3 - x = (2x - 3)^2,$$

$$4x^2 - 11x + 6 = 0,$$

Корені квадратного рівняння: $x_1 = 2$, $x_2 = 3/4$.

Відновимо вигляд нашої системи

$$\begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{3}{4}, \\ x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

З огляду на умову $x \geq \frac{3}{2}$, отримуємо, що серед знайдених коренів $x = 2$ – розв'язок вихідного ірраціонального рівняння, а $x = \frac{3}{4}$ – сторонній корінь.

Відповідь: $x = 2$.

4. Метод введення нової змінної.

Це досить цікавий та діючий метод рішення ІР. Він зазвичай застосовується у разі, коли в рівнянні неодноразово зустрічається деякий

вираз, що залежить від невідомої величини. У цьому випадку цей найпоширеніший вираз позначають деякою буквою, і розв'язують рівняння, що вийшло, щодо нової введеної невідомої. І лише потім, повертаючись до заміни, знаходять значення основної змінної [6; 19].

Розглянемо цей спосіб на наступному прикладі.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = t$, $t \geq 0$ а після піднесення обох частин цієї рівності до квадрату отримуємо, що $x + \sqrt{x^2 - 16} - 6 = \frac{t^2}{2}$, тоді вихідне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{t}{2} = \frac{t^2}{2} - 6.$$

Перетворимо його на звичайне квадратне рівняння

$$t^2 - t - 12 = 0.$$

Корені цього рівняння $t_1 = 4$, $t_2 = -3$. Оскільки ми маємо умову, що t має бути більшим або дорівнювати 0, залишається тільки $t = 4$.

Повертаючись у підстановку, розв'язуємо просте ІР

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4.$$

Застосуємо метод зведення до рівносильної системи рівнянь та нерівностей

$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} = 16, \\ x \geq 4; \end{cases}$$

І знову доводиться розв'язувати ІР, тепер система вже має вигляд

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2, \\ 4 \leq x \leq 8; \end{cases}$$

І, нарешті, розв'язуючи лінійне рівняння, одержуємо корінь $x = 5$, який задовольняє умову системи, а отже є розв'язком вихідного рівняння.

Відповідь: $x = 5$.

Заміна особливо корисна, якщо в результаті досягається нова якість, наприклад, ІР перетворюється на квадратне.

Приклад 8. Розв'язати рівняння

$$x^2 + x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0.$$

Розв'язок. Оскільки корінь $x = 0$ не є розв'язком рівняння, то сміливо можемо ділити наше Р на x^2 . Отримуємо рівносильне рівняння даному:

$$1 + \frac{\sqrt{x+1}}{x} - \frac{2(x+1)}{x^2} = 0,$$

Нехай $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = t$, тоді після заміни та перетворення отримуємо звичайне квадратне рівняння

$$2t^2 - t - 1 = 0.$$

Розв'язуючи отримане квадратне рівняння, знаходимо його корені $t_1 = 1$ і $t_2 = -1/2$.

Повертаючись до підстановки, маємо:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = 1, \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Потім акуратно розв'язуємо кожне рівняння

$$\begin{cases} \begin{cases} x+1 = x^2, \\ x > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+4 = x^2, \\ -1 \leq x < 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = 2-2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ або $x = 2-2\sqrt{2}$.

5. Метод зведення до еквівалентних систем раціональних рівнянь

Рівняння виду $\sqrt[m]{ax+b} \pm \sqrt[n]{cx+d} = p$ (де a, b, c, d – дійсні числа, m, n – натуральні) та ряд інших рівнянь часто вдається розв'язати за допомогою запровадження двох додаткових змінних: $\sqrt[m]{ax+b} = y$ та $\sqrt[n]{cx+d} = z$, де $y, z \geq 0$ та наступного переходу до еквівалентної системи раціональних рівнянь [19].

Розглянемо цей спосіб на прикладі нижче.

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3.$$

Розв'язання. Позначимо дві нові змінні x і y :

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}, y = \sqrt[3]{7 + \sqrt{x}}.$$

Тоді отримуємо

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо значення x і y :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy = 3, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

А тепер розглянемо, як можна застосувати ірраціональні рівняння у повсякденному житті.

Задача. У підземному акваріумі, де використовується спеціальна система фільтрації води, глибина акваріума вимірюється за допомогою спеціальних датчиків, що дають показання за формулою: $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$, де x — це глибина акваріума в метрах, яку потрібно визначити.

Алгоритм розв'язання:

1. Аналіз рівняння. Ми маємо ірраціональне рівняння, тому для його розв'язку потрібно позбутися ірраціональності (квадратних коренів).

$$\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x + 1} + 1$$

2. Піднесення до квадрату. Тепер піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$2x + 3 = (\sqrt{x + 1} + 1)^2$$

3. Розкриття дужок. Розкриємо квадрат:

$$2x + 3 = x + 2 + 2\sqrt{x + 1}$$

4. Зводимо подібні доданки:

$$-2\sqrt{x + 1} = -x - 1$$

5. Спрощуємо та розв'язуємо рівняння:

$$4(x + 1) = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

6. Розв'язуємо квадратне рівняння. Це квадратне рівняння, яке можна розв'язати за допомогою методом розкладання на множники:

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, \text{ або } x = -1$$

7. Перевірка розв'язків. Оскільки x — це глибина акваріума, вона не може бути від'ємною, тому $x = -1$ відкидаємо

Отже, глибина акваріума $x = 3$ метри.

Відповідь: глибина акваріума дорівнює 3 метри. У даній задачі поєднуються ірраціональні рівняння та логіка їхнього застосування в реальних умовах. Формується інтелектуальна та пізнавальна компетентності.

2.3. Розв'язання ірраціональних нерівностей

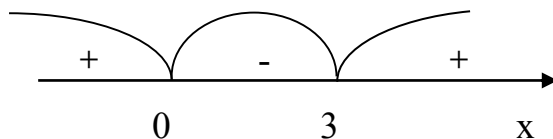
Для прикладу розв'яжемо нерівності:

$$1. (\cos x - \sin x)\sqrt{3x - x^2} \geq 0.$$

Складемо систему:
$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, \\ \cos x - \sin x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x \leq 0, \\ \cos x - \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо першу нерівність: $x^2 - 3x \leq 0$, $x^2 - 3x = 0$, $x(x - 3) = 0$,

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 3; \end{cases}$$



$$x \in [0; 3].$$

Розв'яжемо другу нерівність: $\cos x - \sin x \geq 0$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x \geq 0, \quad 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} \geq 0, \quad \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 0,$$

$$2\pi n \leq \frac{\pi}{4} - x < \pi + 2\pi n, \quad -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq -x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} +$$

$$2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо розв'язок системи:



$$x \in [0; \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}.$$

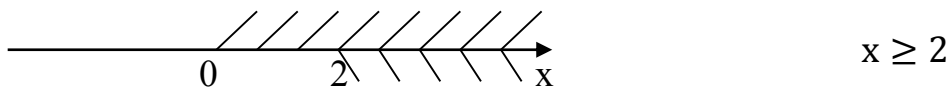
Відповідь: $x \in [0; \frac{\pi}{4}] \cup \{3\}$.

$$2. \sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2.$$

Складемо системи нерівностей:

$$2. \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \frac{x^3+8}{x} > (x-2)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \frac{x^3+8}{x} > x^2-4x+4; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \frac{x^3+8-x^3+4x^2-4x}{x} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{4x^2-4x+8}{x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ 4(x^2-x+2)x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x > 0 \end{cases}$$



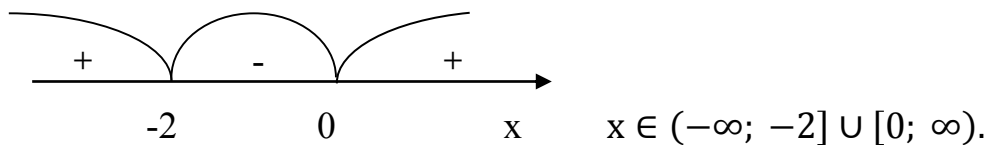
Оскільки $D = 1 - 8 = -7 < 0$, і $(x^2 - x + 2)x > 0$, то $x > 0$. Отже, $x \in [2; \infty)$.

$$3. \begin{cases} x-2 < 0, \\ \frac{x^3+8}{x} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2, \\ (x^3+8)x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ (x+2)(x^2+2x+4)x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

Оскільки $D = 2 - 16 = -14 < 0$, тому дана система рівносильна системі

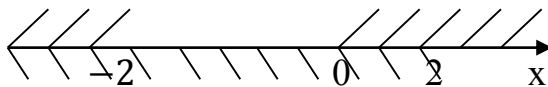
$$\begin{cases} x < 2, \\ (x+2)x \geq 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

Нерівність $(x+2)x \geq 0$, $(x+2)x = 0$, $x_1 = -2$; $x_2 = 0$.



Розв'язком системи буде:

$$x \in (0; 2) \cup (-\infty; -2].$$



Відповідь: $x \in (0; 2) \cup (-\infty; -2]$.

$$3. \sqrt{x^2 - 18x + 72} \leq x - 1.$$

Користуючись теоремою, маємо:

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 18x + 72 \leq (x - 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 18x + 72 \leq x^2 - 2x + 1; \end{cases}$$

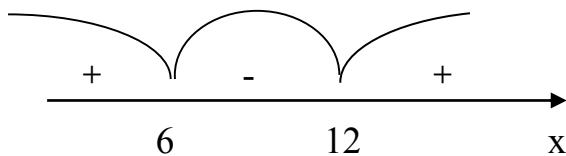
$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0, \\ x^2 - 18x - x^2 + 2x \leq 1 - 72; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x \geq 1, \\ -16x \leq -71; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x \geq 1, \\ x \geq \frac{71}{16}; \end{cases}$$

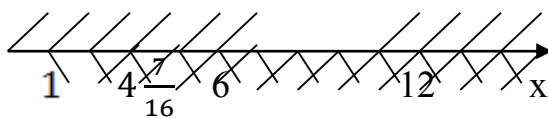
$$\begin{cases} x^2 - 18x + 72 \geq 0, \\ x \geq 1, \\ x \geq 4\frac{7}{16}; \end{cases}$$

Розв'яжемо першу нерівність системи: $x^2 - 18x + 72 \geq 0$, $x^2 - 18x + 72 = 0$,
за теоремою Вієта $x_1=6$, $x_2=12$.



$$x \in (-\infty; 6] \cup [12; \infty).$$

Розв'язком системи є:



$$x \in \left[4\frac{7}{16}; 6\right] \cup [12; \infty).$$

Відповідь: $x \in \left[4\frac{7}{16}; 6\right] \cup [12; \infty).$

РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ, ЯКІ СПРИЯЮТЬ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ

3.1. Розробка методичних та дидактичних матеріал для вивчення ірраціональних рівнянь та нерівностей

При навчанні розв'язання ірраціональних рівнянь необхідно враховувати їхню специфіку, а саме:

1) якщо всі корені парного степеня, що входять до рівняння, є арифметичними, то підкореневий вираз може бути негативним, дорівнює нулю або позитивне, відповідно, корінь позбавлений сенсу, дорівнює нулю або значення кореня додатне;

2) якщо всі корені непарного степеня, що входять до рівняння, визначені при будь-якому дійсному значенні підкореного виразу, то при цьому корінь може бути від'ємний, дорівнює нулю або позитивний, відповідно, підкореневий вираз негативний, дорівнює нулю або позитивно;

3) функції $y = \sqrt[n]{x}$ і $y = \sqrt[n+1]{x}$ є зростаючими у своїй області визначення.

Основними методами алгебри рішення ірраціональних рівнянь прийнято вважати:

- 1) метод зведення обох частин рівняння в один степінь;
- 2) метод заміни змінної.

Однак нерідко зустрічаються рівняння, при розв'язання яких на тому чи іншому етапі знаходження змінної необхідно застосувати метод розкладання на множники і тим самим звести вихідне рівняння до сукупності двох або декількох (ірраціональних) рівнянь. Слід також звернути увагу і так звані комбіновані ірраціональні рівняння, в яких змінна або функція знаходиться під знаком модуля. Очевидно, що для їх успішного розв'язання необхідно знати відповідні прийоми та методи. Але й таких рівнянь, зрештою, використовують зазначені основні способи розв'язання.

Загальний підхід при використанні методу зведення обох частин рівняння в один степінь виражається таким алгоритмом:

- 1) знаходження області допустимих значень (ОДЗ) рівняння;
- 2) зведення обох частин рівняння (можливо неодноразове) в один степінь і розв'язання раціонального рівняння, яке утворилося;
- 3) виконання перевірки:
 - а) знайдені значення змінної перевіряють на належність до ОДЗ рівняння;
 - б) значення змінної, що входять до ОДЗ, підставляють у саме рівняння: ті з них, які перетворюють дане рівняння на правильну числову рівність, є коренем вихідного рівняння; інакше значення змінної є стороннім коренем.

Загалом алгоритм розв'язання ірраціонального рівняння можна скоротити до двох пунктів:

- 1) зведення обох частин рівняння в один степінь і розв'язання раціонального рівняння, яке утворилося;
- 2) виконання перевірки - підстановки знайдених значень змінної у вихідне ірраціональне рівняння.

Слід зауважити, що на докладне вивчення особливостей розв'язання ірраціональних рівнянь у курсі математики основної школи приділяється недостатня кількість часу. Тому засвоєння наведеного вище алгоритму більшістю учнів та закріплення умінь та навичок щодо його застосування є цілком виправданим.

Розглянемо конспект уроку алгебри та початку аналізу в 11 класі «Ірраціональні рівняння та нерівності»

Мета уроку:

- Навчальна: закріпити основні способи розв'язання ірраціональних рівнянь; розглянути деякі прийоми розв'язування рівнянь нестандартними способами; розглянути алгоритм розв'язання ірраціональних нерівностей шляхом рівносильного переходу до системи нерівностей;

- розвиваюча: розвивати в учнів уміння аналізувати завдання перед вибором способу її розв'язання; розвивати навички дослідницької діяльності, синтезу, узагальнення; вчити логічно мислити під час переходу від приватного до загального;

- виховна: виховувати в учнів особистісну рефлексію: чи стали вони самі собі суб'єктом діяльності, що змінюється.

Хід уроку:

I. Організаційний момент (повідомити учням тему уроку, поставити перед ними завдання уроку)

Сьогодні ми з вами продовжимо вдосконалювати навички розв'язування ірраціональних рівнянь у різний спосіб, а також спробуємо визначити спосіб розв'язання ірраціональних нерівностей.

II. Активізація знань учнів.

1) Які рівняння називаються ірраціональними? (Ірраціональними називаються рівняння, що містять змінну під знаком радикала.)

2) Про що доводиться замислюватися і пам'ятати при розв'язанні ірраціонального рівняння? (Треба пам'ятати про область допустимих значень змінної в рівнянні – про ОДЗ)

Завдання 1. Для наступних рівнянь назвіть ОДЗ.

а) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 2;$

б) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3;$

в) $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{x-3}{\sqrt{x+2}}.$

Завдання 2. У таких випадках відновіть запис:

а) $\sqrt{2x+3} = x \Rightarrow . . .$

б) $\sqrt{x+10} = x-2 \Leftrightarrow . . .$

3) Що нам показують два останні записи? (Два стандартні способи розв'язання найпростіших ірраціональних рівнянь.)

4) Назвіть ці методи. (заміна рівняння рівнянням - наслідком шляхом зведення обох частин рівняння у квадрат з обов'язковою подальшою

перевіркою кореня рівняння-наслідки у вихідному рівнянні; заміна ірраціонального рівняння рівносильною змішаною системою)

Застосування цих стандартних методів рішення має бути доведене до автоматизму, з мінімальними витратами часу. І вам пропонується потренуватися у розв'язанні невеликої тестової роботи, завдання якої складено відповідно до НМТ.

III. Тестова робота з підготовки до НМТ.

На даному етапі в учнів формується самоосвітня компетентність.

1 варіант

1. Розв'яжіть рівняння $4 + x = \sqrt{x+6}$ і вкажіть вірне твердження про його корінь:

- 1) корінь лише один, і він позитивний;
- 2) корені два, і вони різних знаків;
- 3) корінь тільки один, і він негативний;
- 4) корені два, і вони позитивні.

2. Знайдіть суму коренів рівняння $x + 1 = \sqrt{7x-5} ::$

- 1) - 1; 2) 1; 3) 4; 4) 5.

3. Вкажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x^2 + 5x + 5} = x + 2$

- 1) [3; 5]; 2) (1; 3); 3) [0; 2]; 4) (-2; 0).

4. Скільки коренів має рівняння $1 - x^2 = \sqrt{33 - 2x^2 - x^4} :$

- 1) чотири; 2) два; 3) один; 4) жодного.

2 варіант

1. Розв'яжіть рівняння $1 - x = \sqrt{13 - 3x}$ і вкажіть вірне твердження про його корінь:

- 1) корінь лише один, і він негативний;
- 2) корінь лише один, і він позитивний;
- 3) корені два, і вони різних знаків;
- 4) корені два, і вони позитивні.

2. Знайдіть суму коренів рівняння $\sqrt{11x-7} = x+1:$

- 1) - 1; 2) 5; 3) 9; 4) - 5.

3. Вкажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{2x^2 - 2x - 4} = x - 2$

1) $[-12; 0]$; 2) $[2; 4]$; 3) $[4; 5)$; 4) $[5; +\infty)$.

3. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x^4 + 3} = x^2 - 2$:

1) жодного; 2) один; 3) два; 4) чотири.

Для тих, хто розв'язав тест дуже швидко, можна запропонувати на окремому аркуші розв'язати наступні рівняння:

$$\sqrt{4 - 7x|x + 2|} = 3x + 2; \quad \sqrt{9 - 4x|x - 4|} - 4x = 3 ;$$

IV. Взаємоперевірка тестової роботи.

На даному етапі в учнів формується пізнавальна компетентність.

(учні передають бланк відповідей сусіду, та будуть проходити взаємоперевірку по запропонованому вчителем зразку відповідей по 1 і 2 варіанту; потім підбиваються підсумки такої перевірки, учні виставляють на бланку свою оцінку, вчитель збирає їх)

V. Зазначимо, що при розв'язанні ірраціональних рівнянь необхідно дотримуватись правил: не кидайся розв'язувати рівняння відразу, проаналізуй його вид, використовуй ОДЗ, знайди найраціональніший прийом його рішення або доведи, що рішень немає.

Завдання 3. Доведіть, що такі рівняння немає рішень:

а) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x + 1} = -5;$

б) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 4} = 0;$

в) $\sqrt{x - 5} + \sqrt{2 - x} = 4;$

г) $\sqrt{x + 16} + \sqrt{x - 3} = 4;$

д) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{1 - x^2} = 2.$

VI. Розв'язування рівнянь нестандартними прийомами.

На даному етапі в учнів формується інтелектуальна та пізнавальна компетентності.

Давайте розглянемо кілька рівнянь та знайдемо найбільш раціональний спосіб його розв'язання.

$$1) \quad x^2 - x + 5 + \sqrt{x^2 - x + 9} = 8;$$

$$2) \quad \sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{7+x} = 4;$$

$$3) \quad \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 1} = 3 - 5x^2.$$

Для розв'язання зазначених рівнянь можна застосовувати запровадження нової змінної (Рівн.1), причому звернути увагу учнів на найбільш раціональну заміну; введення нових змінних та перехід до системи двох не ірраціональних рівнянь (Рівн.2); використання монотонності функцій або метод оцінки лівої та правої частин рівняння (Рівн.3).

VII. При розв'язанні більшості рівнянь безліч їх коренів як правило звичайно, в нерівностях найчастіше нескінченно багато рішень. Розв'язуючи ірраціональні нерівності зведенням обох його частин у будь-який степінь, перевірка всіх знайдених рішень підстановкою у вихідну нерівність неможлива, нам доведеться постійно дбати про те, щоб переходи, які ми виконуємо, були рівносильними. Для цього давайте згадаємо властивості найпростіших нерівностей, а саме, за яких умов зведення у квадрат обох частин правильної нерівності є рівносильним перетворенням.

Це можливо лише в тому випадку, якщо обидві частини нерівності позитивні, тобто. якщо $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$ або якщо $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$.

Розглянемо найпростіші ірраціональні нерівності:

$$a) \quad \sqrt{x-3} < 2;$$

$$б) \quad \sqrt{2x+1} > 5;$$

$$в) \quad \sqrt{x+1} > -2;$$

$$г) \quad \sqrt{17x-6} < -1.$$

(при аналізі розв'язування цих нерівностей необхідно користуватися розглянутими вище властивостями числових нерівностей і областю допустимих значень змінної в нерівності)

VIII. Групова робота.

Учням пропонуються обговорити розв'язання двох нерівностей, в яких права частина залежить від змінної. Нам потрібно знайти непрості рішення нерівності, а й спробувати сформулювати умови, яким підпорядковуються рішення, тобто знайти рівносильні переходи.

Завдання 4. Розв'яжіть нерівність:

$$a) \sqrt{x^2 - x - 2} < x - 1; \quad б) \sqrt{x^2 + 5x + 4} > x - 3.$$

IX. Обговорення розв'язків нерівностей біля дошки.

На даному етапі в учнів формується комунікативна компетентність.

X. Узагальнення одержаних результатів для нерівностей загального виду.

Нерівність першого виду:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

(1)

Аналогічно, можна записати рівносильний перехід на нерівність із нестрогим знаком:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

(1a)

Нерівність другого виду:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad (2)$$

Аналогічно, для нерівності нестрокої:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

(2a)

XI. Для закріплення зазначеного способу розв'язання ірраціональних нерівностей можна виконати таке завдання.

На даному етапі в учнів формується самоосвітня та дослідницька компетентності.

Завдання 5. Розв'яжіть нерівність:

$$a) \sqrt{x+3} < x+1; \quad б) \sqrt{x+18} > 2-x.$$

XII. Підбиття підсумків.

Розглянуті нами методи та прийоми розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей дозволяють розв'язати величезну кількість різних завдань. На наступних уроках ми продовжимо пошуки раціональніших способів розв'язання систем рівнянь, пригадаємо, що для розв'язання нерівностей застосовується метод інтервалів; Спробуємо застосувати його для ірраціональних нерівностей.

XIII. Домашнє завдання:

1. Розв'яжіть рівняння:

$$a) \sqrt{2x^2 + 5x - 2} + \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 7;$$

$$б) \sqrt[4]{17+x} + \sqrt[4]{17-x} = 2;$$

$$в) \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$a) \sqrt{2x^2 + x} < 1 + 2x;$$

$$б) \sqrt{9x^2 - x - 10} \geq 3x - 2.$$

Урок на тему "Ірраціональні рівняння та нерівності". 11-й клас

Мета заняття: узагальнення вивченого матеріалу за ірраціональними рівняннями та нерівностями.

Завдання

- забезпечити повторення, узагальнення та систематизацію матеріалу теми.
- створити умови контролю (самоконтролю) засвоєння знань та умінь.

- сприяти розвитку математичного світогляду, мислення, мови, уваги, пам'яті.
- сприяти вихованню інтересу до математики, активності, мобільності, уміння спілкуватися у групах.

Тип заняття: урок узагальнення та систематизації знань.

Форми організації навчальної діяльності учнів:

- фронтальна;
- групова, парна та індивідуальна роботи.

Обладнання: комп'ютер, медіа-проектор, тести.

ПЛАН ЗАНЯТТЯ

- Організаційний момент.
- Актуалізація опорних знань.
- Мотивація навчальної діяльності.
- Систематизація навчального матеріалу:
 - а) Повідомлення з презентацією на тему: “Ірраціональні рівняння” (1 група учнів). Закріплення знань, умінь та навичок (практикум).
 - б) Повідомлення з презентацією на тему: “Ірраціональні нерівності” (2 група учнів). Закріплення знань умінь та навичок (практикум).
- Перевірочні тести.
- Підбиття підсумків.
- Домашнє завдання.

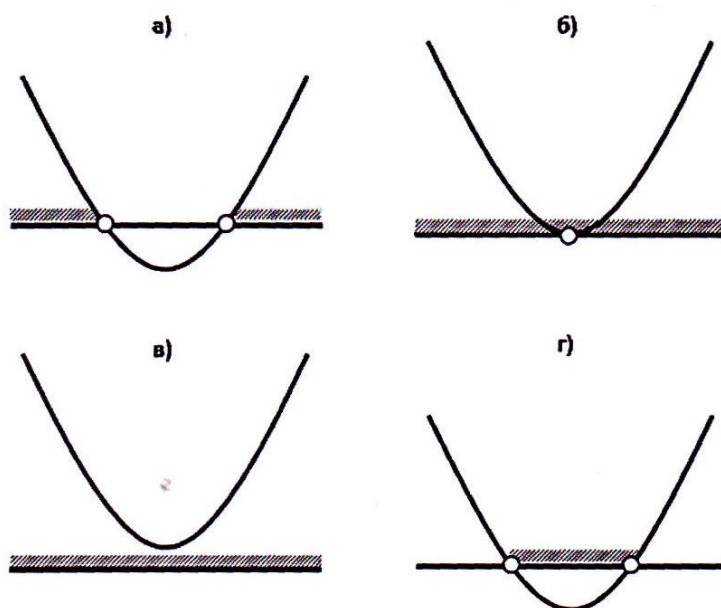
1. Організаційний момент

Вступне слово вчителя, який повідомляє про те, що сьогодні заключне заняття на тему “Ірраціональні рівняння та нерівності”. Повторюємо, узагальнюємо, наводимо в систему вивчені методи та прийоми розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей.

Потім вчитель повідомляє порядок проведення занять, рекомендує, потім необхідно звернути особливу увагу, що слід записати в зошит.

2. Актуалізація опорних знань (усно)

1. Підберіть графічну інтерпретацію розв'язання нерівності: $x^2 + 2x < 0$.



2. Для кожної нерівності підберіть малюнок, що відповідає його розв'язанню на координатній прямій:

1) $(x-2)(x+3)(x-4) > 0$	1) $(-\infty; -3) \cup (2; 4)$	
2) $(x-2)(x+3)(4-x) \geq 0$	2) $(-\infty; -3] \cup [2; 4]$	
3) $(x-2)(x+3)(x-4) < 0$	3) $(-3; 2) \cup (4; +\infty)$	
4) $(x-2)(x+3)(4-x) \leq 0$	4) $[-3; 2] \cup [4; +\infty)$	

Вкажіть, для яких значень змінних рівність вірна:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}; \sqrt{x^2} = x, \sqrt{x^2} = -x, \sqrt{-x^2} = -x, \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$$

3. Мотивація навчальної діяльності

У разі іспиту найвищі результати показують учні, які за відведений час розв'язують більше завдань. Багато завдань можна розв'язати кількома способами. Тому дуже важливо вміти для кожного завдання вибирати

найбільш раціональний спосіб розв'язання. Навчитися цьому можна лише шляхом розв'язання таких завдань та подальшого аналізу проведеного рішення.

4. Систематизація вивченого матеріалу.

а) Повідомлення з презентацією на тему «Ірраціональні рівняння» (1 група) Додаток 1 (рис. 3.1). Презентація 1. Закріплення вивченого матеріалу з наступним контролем (практикум – парна робота)

Виконати три розв'язки одного рівняння. (Додаток 2)

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3$$

1 розв'язок: зведення обох частин квадрат.

2 розв'язок: введення нових змінних.

3 розв'язок: використання якості монотонності функцій.

б) Повідомлення на тему «Ірраціональні нерівності» (2 група учнів) Додаток

3. Презентація 2

Закріплення вивченого матеріалу з наступним контролем (практикум – парна робота)

Виконати два рішення однієї нерівності (Додаток 4)

1 рішення: з переходом до рівносильної системи.

2 рішення: шляхом інтервалів.

6. Підбиття підсумків

Повідомлення з презентаціями, підготовленими учнями були правильно структуровані, в них були представлені типи, методи та особливості розв'язання ірраціональних рівнянь та нерівностей, проведено теоретичний аналіз методик та технологій розв'язання.

Розв'язання рівнянь і нерівностей у різний спосіб, на думку учнів, допомагає заповнити прогалини знань, знайти, свій, зрозумілий шлях розв'язання завдання.

Учні користувалися різними способами, що особливо важливо для оцінки ефективності навчання.

Рефлексія.

Вчитель пропонує учням закінчити пропозиції:

«Сьогодні на уроці.....»,

«Я повторив...»,

«Тепер я знаю...»,

"В результаті пошукової групової роботи я ...".

7. Домашнє завдання

1. Спробуйте розв'язати завдання з параметрами

$$1) a\sqrt{x-1}=0; \quad 3) a\sqrt{x-1}=a;$$

$$2) \sqrt{(a-1)x}=0; \quad 4) \sqrt{x-2}=a.$$

Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

1); 3);

2); 4).

2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(2x+a)}=x+1$ обравши прийнятний собі спосіб розв'язання.

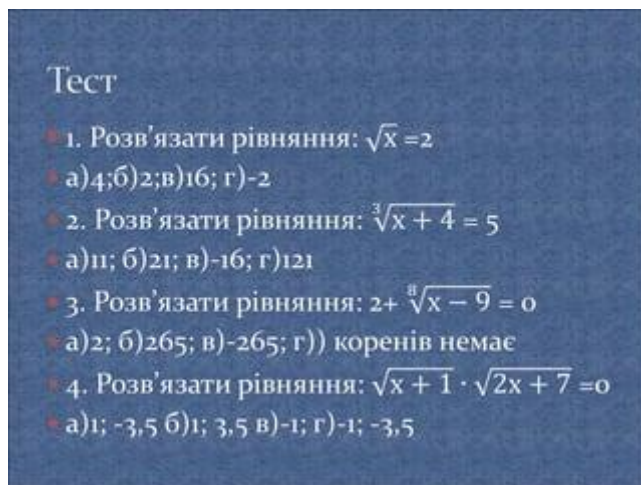


Рисунок 3.1. Додаток 1.

Додаток №2

Три розв'язки одного рівняння

Розв'язок 1. Зведемо обидві частини рівняння квадрат і перетворимо отримане рівняння:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 3 &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+2\sqrt{x(x+1)}=9, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+1)}=4-x, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Знову зведемо обидві частини рівняння квадрат:

$$\begin{cases} x^2 + x = x^2 - 8x + 16, \\ 4 - x \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 16, \\ 4 \geq x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9}.$$

Відповідь: 16/9.

Розв'язок 2. Нехай, $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{x+1}$.

$$\text{Отримаємо систему } \begin{cases} a + b = 3, \\ b^2 - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3, \\ b - a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = \frac{8}{3}, \\ 2b = \frac{10}{3}. \end{cases} :$$

Отже, $a = 4/3$, звідки $\sqrt{x} = \frac{4}{3}$ і $x = \frac{16}{9}$.

Перевірка показує, що 16/9 корінь вихідного рівняння.

Розв'язок 3. Нехай $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$.

Зауважимо, що $f(x)$ - зростаюча функція у своїй області визначення.

З курсу алгебри і почав аналізу відомо, що зростаюча функція приймає кожне зі своїх значень лише за одного значення аргументу, отже, має трохи більше кореня:

$$f\left(\frac{16}{9}\right) = \sqrt{\frac{16}{9}} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3.$$

Отже, 16/9 єдиний корінь вихідного рівняння.

Додаток №4

Два рішення однієї нерівності

Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 6} \leq 3x - 4$

Розв'язок 1. Вихідна нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 6 \leq (3x - 4)^2, \\ x^2 - 3x + 6 \geq 0, \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 21x + 10 \geq 0, \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x - 2)(x - \frac{5}{8}) \geq 0, \\ x \geq \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Умову $x^2 - 3x + 6 \geq 0$ можна не враховувати, оскільки вона виконана для всіх x .

Першу нерівність системи виконано, якщо $x \geq 2$ і $x \leq \frac{5}{8}$.

Далі розглянемо два випадки:

$$1) \begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2 ; 2) \begin{cases} x \leq \frac{5}{8}, \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases} - \text{Протиріччя.}$$

Відповідь: $[2; +\infty)$.

Розв'язок 2. Розв'яжемо цю нерівність шляхом інтервалів.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6} - 3x + 4$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, оскільки $x^2 - 3x + 6 \geq 0$ для будь-якого x ;

2) функція $f(x)$ - безперервна на $\mathbb{R}$;

Дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 6 = (3x - 4)^2, \\ 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 21x + 10 = 0, \\ x \geq \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Отримуємо єдиний корінь $x = 2$. Таким чином, зберігає $f(x)$ знак на проміжках $(-\infty; 2)$ та $(2; +\infty)$.

Визначимо знак $f(x)$ на кожному із зазначених проміжків:

1) $f(x) > 0$ на $(-\infty; 2)$, оскільки $f(0) = \sqrt{6} + 4 > 0$;

2) $f(x) < 0$ на $(2; +\infty)$, оскільки $f(3) = \sqrt{27 - 9 + 6} - 9 + 4 = \sqrt{24} - 5 < 0$.

Відповідь: $[2; +\infty)$

Можна запропонувати учням математичний тренажер.

Ірраціональні рівняння

Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 4$	1) $\sqrt{x} = 7$
2) $\sqrt{x} + 16 = 0$	2) $25 + \sqrt{x} = 0$
3) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$	3) $7\sqrt{x} - 2x + 15 = 0$
4) $\sqrt{x^2 + x - 2} = 2$	4) $\sqrt{x^2 + 3x + 5} = 3$
5) $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$	5) $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x + 19}$
6) $\sqrt{x + 2} - \frac{2}{\sqrt{x + 2}} = 1$	6) $10\sqrt{x^2 - x - 1} + \frac{3}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = 13$
7) $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 10}$	7) $\sqrt{3x - 1} - \sqrt{x + 2} = 1$
8) $\sqrt{7x + 1} = 2$	8) $\sqrt{x + 2} = \sqrt{2x - 5}$
9) $\sqrt{x + 4} = \sqrt{2x - 1}$	9) $\sqrt{12 - x} = x$
10) $\sqrt{x + 3} = \sqrt{5 - x}$	10) $\sqrt{7 - x} = x - 1$

11) $\sqrt{x^2 - x - 3} = 3$	11) $\sqrt{5x + 1} = x - 1$
12) $\sqrt{x - 1} = x - 3$	12) $2\sqrt{x + 5} = x + 2$
13) $\sqrt{x + 1} = 3$	13) $\sqrt{3x - 1} = 1,2$
14) $\sqrt{2x + 3} = x$	14) $\sqrt{6 - x} = x$
15) $\sqrt{-4x^2 - 16} = 2$	15) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3} = 0$
16) $x + 1 = \sqrt{8 - 4x}$	16) $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} = x - 2$
17) $\sqrt{2x} + \sqrt{x - 3} = -1$	17) $\sqrt{-3x - x^2} = 9$
18) $\sqrt{x + 17} - \sqrt{x + 1} = 2$	18) $\sqrt{x + 13} - \sqrt{x + 1} = 2$
19) $\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{13 + x} = \sqrt{x + 4}$	19) $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$
20) $\sqrt{3 - x} \cdot \sqrt{x + 4} = \sqrt{6}$	20) $\sqrt{4 + x} \cdot \sqrt{5 - x} = 2\sqrt{2}$
21) $\sqrt{5 + \sqrt{x - 1}} = 3$	21) $\sqrt{7 - \sqrt{x + 1}} = 2$
22) $\sqrt{\sqrt{x + 13}} = \sqrt{17 - 3\sqrt{x}}$	22) $\sqrt{17 + \sqrt{x}} = \sqrt{20 - 2\sqrt{x}}$
23) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 3} = 0$	23) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1} = -2$
24) $\sqrt{2x} - 7x = -52$	24) $2x + \sqrt{4x - 8} = \frac{7}{8}$
25) $\sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}$	25) $\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \frac{7}{\sqrt{x - 3}}$
26) $x(x + 1) + 3\sqrt{2x^2 + 6x + 5} = 25 - 2x$	26) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x$
27) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 8$	27) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 16$
28) $x^2 - 8(x + 1)\sqrt{x} + 18x + 1 = 0$	28) $\sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}} = \sqrt{6}$

Конспект уроку «Ірраціональні рівняння»

Цілі уроку:

- запровадити поняття ірраціонального рівняння, розглянути різні способи розв'язання ірраціональних рівнянь, виділити раціональні способи розв'язання рівнянь

-розвивати логічне мислення, навички самоорганізації та колективної роботи, вміння порівнювати та аналізувати, узагальнювати та робити висновки

- виховувати самостійність, уміння слухати товаришів та спілкуватися у групах, підвищення інтересу до предмета

Обладнання:

презентація, картки із завданнями, сигнальні картки.

Тип уроку: урок – дослідження вивчення та первинного закріплення нових знань (робота у групах, де обов'язково є сильні учні)

Хід уроку:

I. Організаційний момент

Діти, сьогодні на уроці ми знову поговоримо про рівняння. Вам відомо, що вміння розв'язувати рівняння є найважливішим навичкою математики. Ми продовжимо роботу в цьому напрямку та вивчимо ірраціональні рівняння. Вони часто зустрічаються у завданнях ЄДІ. Учні та вчитель обговорюють цілі, які хотіли б реалізувати на уроці.

II. Актуалізація знань учнів

Перевірка домашнього завдання відбувається під час усної роботи. Учень на звороті крила дошки записує рішення завдань. Вчитель перевіряє, чи хлопці порівнюють свої результати та оцінюють роботу.

Як називається це рівняння? Який корінь воно має? Наведіть приклади.
(Слайд 3)

$$y = kx + b$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c$$

$$x^2 = a$$

$$\sqrt{x} = a$$

III. Вивчення нового матеріалу

Подивіться записані рівняння. Що спільного у цих рівняннях? (слайд 4)

$$\sqrt{3x + 2} = 5$$

$$4 - \sqrt{x} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt[3]{x + 1} = \sqrt{x} - 7$$

Мабуть, невідоме перебуває під знаком кореня. Такі рівняння називаються ірраціональними. Сформулюйте визначення ірраціонального рівняння (слайд 5). Які відомі способи розв'язання ірраціональних рівнянь? Ми проведемо дослідницьку роботу. Клас поділяється на чотири групи і пропонується розв'язати однакове завдання різними способами (Додаток №2). Перед початком роботи вчитель знайомить хлопців із правилами розв'язання ірраціональних рівнянь.

Правила розв'язання ірраціональних рівнянь

1	$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \{f(x) = g(x), f(x) \geq 0\}$
2	$\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2 \ (a \geq 0)$
3	$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
4	$\sqrt{f^2(x)} = f(x) $

Вони висвічуються на екрані (слайд 6), обговорюються та наводяться приклади.

Перший спосіб

Зведення обох частин рівняння в один і той самий степінь з наступною перевіркою (слайд 7).

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1})^2 = 4^2,$$

$$2x-3 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1} + 4x+1 = 16.$$

$$2\sqrt{8x^2 + 2x - 12x - 3} = 18 - 6x,$$

$$\sqrt{8x^2 - 10x - 3} = 9 - 3x.$$

Знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$(\sqrt{8x^2 - 10x - 3})^2 = (9 - 3x)^2,$$

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2,$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0,$$

$$(x - 42)(x - 2) = 0$$

Звідси $x_1 = 42$, $x_2 = 2$.

Перевірка:

1. Якщо $x = 42$, то $\sqrt{2 \cdot 42 - 3} + \sqrt{4 \cdot 42 + 1} = \sqrt{81} + \sqrt{169} = 22 \neq 4$, значить, число 42 не є коренем рівняння.

2. Якщо $x = 2$, то $\sqrt{4-3} + \sqrt{8+1} = 4$, значить, число 2 є коренем рівняння.

Відповідь: 2.

№ п/п	Спосіб	Переваги	Недоліки
1	Піднесення обох частин рівняння до одного і того ж степеня	1.Зрозуміло 2.Доступно	1.Словесний запис 2.Складний запис

Висновок. При розв'язанні ірраціональних рівнянь шляхом зведення обох частин рівняння в один і той самий степінь необхідно все записувати, щоб розв'язок був зрозумілим і доступним. Однак обов'язкова перевірка іноді буває складною та займає багато часу. Цей метод можна використовувати для нескладних ірраціональних рівнянь, що містять 1-2 радикали.

Другий спосіб

Рівносильні перетворення (слайд 8).

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$$

Розв'язання. Піднесемо дві частини рівняння до квадрату:

$$\begin{cases} 2x-3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x+1 = 4^2, \\ 2x-3 \geq 0, \\ 4x+1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(2x-3)(4x+1)} = 16-6x+2, \\ x \geq 1,5, \\ x \geq -\frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{8x^2+2x-12x-3} = 18-6x, \\ x \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8x^2-10x-3} = 9-3x, \\ x \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3 = (9-3x)^2, \\ x \geq 1,5, \\ 9-3x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-10x-3 = 81-54x+9x^2, \\ x \geq 1,5, \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-44x+84=0, \\ 1,5 \leq x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=42, \\ x=2 \end{cases} \\ 1,5 \leq x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Відповідь: 2.

№ п/п	Спосіб	Переваги	Недоліки
2	Рівносільних перетворень	1.Відсутність словесного опису 2.Немає перевірки 3.Чіткий логічний запис 4.Послідовність рівносільних переходів	1.Громіздкий запис 2.Можна помилитися при комбінації знаків системи та сукупності

Висновок. При розв'язанні ірраціональних рівнянь шляхом рівносільних переходів необхідно чітко знати, коли ставити знак системи, а коли – сукупності. Громіздкість запису, різні комбінації символів системи та сукупності нерідко призводять до помилок. Однак послідовність рівносільних переходів, чіткий логічний запис без словесного опису, що не вимагає перевірки, є безперечними перевагами цього способу.

Третій спосіб

Функціонально-графічний (слайд 9).

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4.$$

Розв'язання.

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1}.$$

Розглянемо функції $y = f(x) = \sqrt{2x-3}$ и $y = g(x) = 4 - \sqrt{4x+1}$.

1.Функція $f(x) = \sqrt{2x-3} = (2x-3)^{\frac{1}{2}}$; є зростаючою, оскільки показник степеня – додатне (неціле) число.

Знайдемо область визначення функції $D(f)$.

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,5.$$

$$D(f) = [1,5; +\infty).$$

Складемо таблицю значень x и $f(x)$.

x	1,5	2	3,5	6
$f(x)$	0	1	2	3

2. Функція $g(x) = 4 - \sqrt{4 - (4x + 1)^{\frac{1}{2}}}$ степенева; є спадною.

Знайдемо область визначення функції $D(g)$.

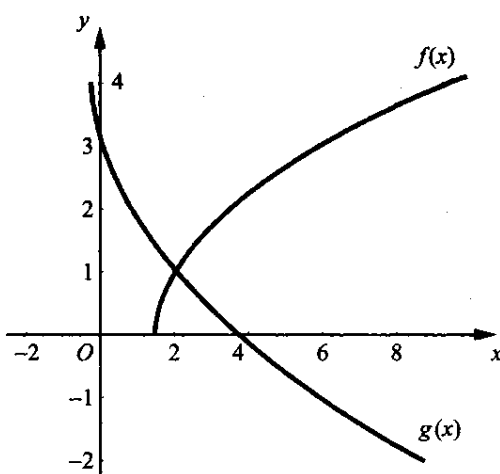
$$4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}.$$

$$D(g) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

Складемо таблицю значень x и $g(x)$.

x	$-\frac{1}{4}$	0	2	6
$g(x)$	4	3	1	-1

Побудуємо данні графіки функцій в одній системі координат.



Графіки функцій перетинаються у точці з абсцисою $x=2$. Оскільки функція $f(x)$ зростає, а функція $g(x)$ зменшується, то рішення рівняння лише одне.

Відповідь: 2.

№ п/п	Спосіб	Переваги	Недоліки
3	Функціонально-графічний	1. Наочність 2. Не потрібно робити складних алгебраїчних	1. Словний запис 2. Не завжди можна знайти точну відповідь, а

		перетворень та стежити за ОДЗ 3.Дозволяє знайти кількість рішень	якщо потрібно відповідь точну, то потрібна перевірка
--	--	---	---

Висновок. Функціонально-графічний метод є наочним, дозволяє знайти кількість рішень, але застосовувати його краще тоді, коли легко можна побудувати графіки функцій і отримати точну відповідь. Якщо відповідь наближена, то краще скористатися іншим методом.

Отже, для кожного ірраціонального рівняння (слайд 1) необхідно вибрати найбільш зручний спосіб розв'язання: зрозумілий, доступний, логічно та грамотно оформлений. У вас на столах знаходяться картки чотирьох кольорів. Підніміть червону ті, хто віддав перевагу методу зведення обох частин рівняння в один степінь з перевіркою, синього кольору – методу рівносильних перетворень, зеленого – функціонально-графічного методу, жовтого – методу введення нової змінної.

Нерівності з параметрами

«Нерівностями з параметрами називають нерівності виду $F(x, a_1, a_2, \dots, a_m) > 0$, або $F(x, a_1, a_2, \dots, a_m) < 0$. де x – невідоме число, яке знаходимо, а $a_1, a_2, \dots, a_m$ – змінні параметри» [3]

Розв'язування таких нерівностей залежить від допустимих значень параметрів $a_1, a_2, \dots, a_m$.

При розв'язуванні нерівностей з параметрами область зміни параметрів може бути заданою. Якщо не вказані проміжки зміни параметрів, то вважається, що параметри можуть набувати усіх значень, при яких функція $F(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$ має зміст.

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей краще застосовувати метод інтервалів, хоча можна замінювати нерівність рівносильною системою

нерівностей. Але при розв'язуванні рівносильної системи нерівностей, слід стежити за рівносильністю переходів від однієї системи до іншої.

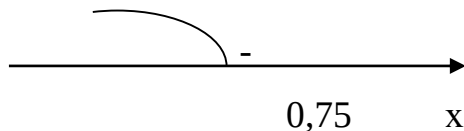
Для прикладу розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+a} \geq x+1$.

Маємо функцію $y = \sqrt{x+a} - x - 1$. $D(f) = [-a; \infty)$.

Нулі цієї функції знайдемо з рівняння: $\sqrt{x+a} = x+1$, $x+a = x^2 + 2x + 1$, $x^2 + x + 1 - a = 0$,

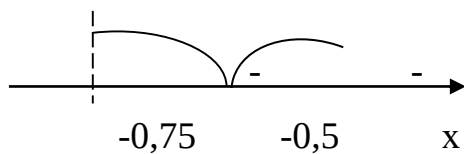
$$D = 1 - 4(1 - a) = 4a - 3.$$

Якщо $D < 0$, то $4a - 3 < 0$, $a < \frac{3}{4}$, то рівняння не має коренів.



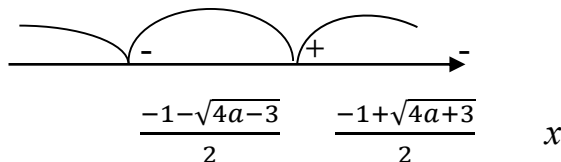
Отже, нерівність не має розв'язків.

Якщо $D = 0$, то $a = \frac{3}{4}$ і рівняння має один корінь $x = -\frac{1}{2} = -0,5$.



Тому нерівність має один розв'язок.

Якщо $D > 0$, тобто $a > \frac{3}{4}$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$.



Тобто, розв'язком нерівності є: $\left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} \right]$.

Відповідь: якщо $a < \frac{3}{4}$, то нерівність не має розв'язків;

якщо $a = \frac{3}{4}$, то $x = -0,5$;

якщо $a > \frac{3}{4}$, то $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2} \right]$.

В даному завданні в учнів формується дослідницька компетентність.

3.2. Апробація результатів дослідження

За матеріалами кваліфікаційної роботи проведено 3 заняття у 10 класі на тему «Розв'язування ірраціональних рівнянь» у Білоославському ліцеї імені Марійки Підгірянки Делятинської селищної ради.

Під час першого заняття продемонстровано презентацію на тему «Ірраціональні рівняння». Її мета – удосконалити вміння розв'язувати рівняння, сприяти розвитку логічного мислення учнів, розвивати вміння аналізувати математичний матеріал, виховувати увагу, комунікабельність. Також було підготовлено конспект заняття. Додаток Б.

Перед виконанням завдань, дітям потрібно було дати відповіді на запитання по темі «Ірраціональні рівняння». Після того, учням була запропонована гра «Поле Чудес», під час якої згадали імена видатних людей, які зробили вагомий внесок у розвиток математики. Гра проходила у три тури. У першому турі (рис.3.2) приймали участь усі діти, які повинні відгадати слово. Щоб відкрити букву, треба правильно розв'язати завдання (рис.3.3). Діти розбилися на три команди. Команда, яка перемогла, отримує найбільшу кількість балів і переходить у другий тур.

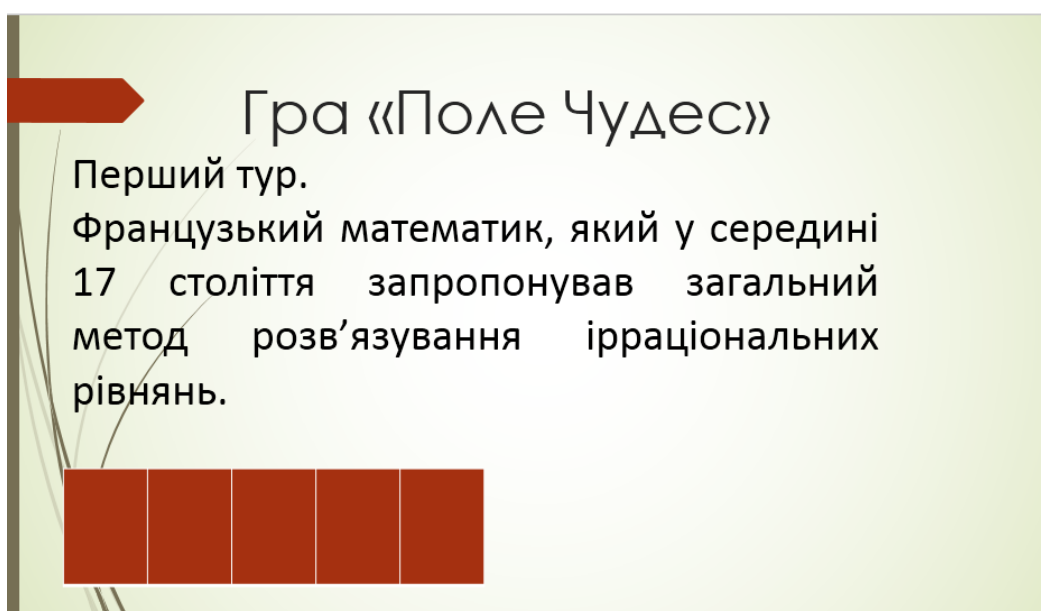


Рисунок 3.2. Слайд 5

Завдання першого туру:

Розв'язати рівняння.

1. $\sqrt{x} = 4$	A. ± 6
2. $\sqrt{x} - 3 = 2$	E. 25
3. $\sqrt{x+4} = 5$	P. 21
4. $\sqrt{5-x} = 1$	M. 4
5. $\sqrt{x^2} = 6$	Ф. 16

Рисунок 3.3. Слайд 6.

У другому турі потрібно відгадати прізвище французького математика, юриста за освітою, який вдосконалив методи розв'язування рівнянь. Завдання другого туру теж висвітлені в презентації (рис.3.4)

Завдання другого туру:

Розв'язати рівняння.

1. Знайти корені рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$.	I) 4;2;-1
2. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\sqrt{x-4} = 0$.	П) 6
3. Назвати заміну змінної у рівнянні $2\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 3$.	P) 8; 1
4. Розв'язок рівняння $\sqrt{\frac{x-6}{x-2}} = 0$.	B) 2; -4
	C) $\sqrt{x}$
	Є) $\sqrt[4]{x}$

Рисунок 3.4. Слайд 9.

Перед початком третього туру, потрібно було пригадати формули скороченого множення, а потім вже виконати завдання, які були представлені (рис. 3.5 та рис. 3.6).

Завдання: розв'язати піднесенням до непарного степеня рівняння

$$\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4$$

Розв'язування:

$$\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4, \text{ один з радикалів відокремити}$$

$$\sqrt[3]{25+x} = 4 - \sqrt[3]{3-x}, \text{ піднести до кубів:}$$

$$25+x = 64 - 3 \cdot 16\sqrt[3]{3-x} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{3-x}^2 - (3-x)$$

$$12\sqrt[3]{3-x}^2 - 48\sqrt[3]{3-x} + 36 = 0, \text{ заміна: } t = \sqrt[3]{3-x}$$

$$12t^2 - 48t + 36 = 0, \text{ або } t^2 - 4t + 3 = 0, \text{ і корені } t_1 = 3, t_2 = 1$$

ПДЗ: $\sqrt[3]{3-x}=3$; $\sqrt[3]{3-x}=1$, тобто $x=-24$, та $x=2$.

Рисунок 3.5. Завдання третього туру. Слайд 20.

Назвати заміну

- $-4\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = -3,$
- $\sqrt{x-5} = x-5,$
- $\sqrt[7]{4-x} + \sqrt[7]{(4-x)^{-1}} = 3,$
- $\sqrt{x+1} - 5\sqrt[4]{x+1} + 6 = 0,$
- $\sqrt{x^2+2x} = x^2+2x-3,$
- $\sqrt[5]{\frac{12x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{12x}} = 5.$

Рисунок 3.6. Завдання третього туру. Слайд 21.

Наприкінці заняття для дітей була підготовлена самостійна робота (рис.3.7)

Самостійна робота

Варіант 1

1. $\sqrt{x} = 3$;

2. $\sqrt[3]{x+4} = 4$;

3. $\sqrt{5+\sqrt{x-4}} = 3$;

4. $x^2\sqrt{x+6} - 49\sqrt{x+6} = 0$;

5. $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$.

Варіант 2

1. $\sqrt{x} = 5$;

2. $\sqrt[3]{x-3} = 4$;

3. $\sqrt{7+\sqrt{x-21}} = 4$;

4. $2x\sqrt{x-5} - 48\sqrt{x-5} = 0$;

5. $2(x^2 - 3) + 4\sqrt{x^2 - 3} = 6$.

Рисунок 3.7. Слайд 22

На другому занятті були згадані методи розв'язування ірраціональних рівнянь.

1. Піднесення обох частин рівняння до одного степеня.
2. Заміна змінної в рівнянні.
3. Розкладання на множники.
4. Врахування області визначення функції.
5. Графічний метод.

Приклад рівняння на заміну змінних до пункту 2):

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$$

Робим заміну: $\sqrt[4]{x-1} = t$, тоді $(\sqrt[4]{x-1})^2 = \sqrt{x-1} = t^2$,

Отримаємо рівняння: $2t^2 + t - 3 = 0$; $t_1 = -1,5$; $t_2 = 1$

$\sqrt[4]{x-1} = -1,5$ –розв'язків не має;

$\sqrt[4]{x-1} = 1$, $x=2$ - розв'язок.

Відповідь: $x=2$.

Приклад рівняння розкладання на множники до пункту 3):

$$7^x\sqrt{x-5} - 49\sqrt{x-5} = 0$$

Розв'язання: $\sqrt{x-5}(7^x - 49) = 0$;

$\sqrt{x-5} = 0$, або $7^x - 49 = 0$;

$$x_1 = 5; 7^x = 49; 7^x = 7^2; x_2 = 2$$

Відповідь: $x_1 = 5; x_2 = 2$.

Приклад на врахування області визначення до пункту 4) (рис. 3.8)

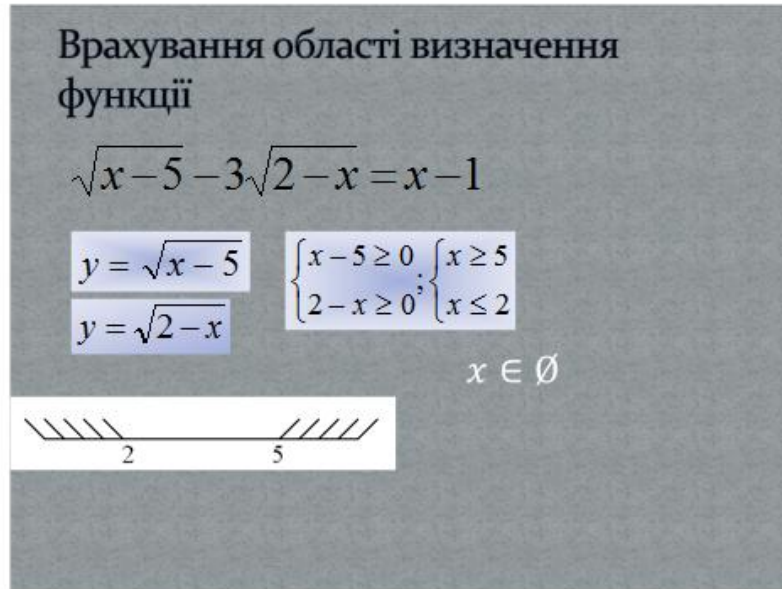


Рисунок 3.8. Приклад до пункту 4)

Приклад графічного розв'язання ірраціонального рівняння до пункту 5) (рис. 3.9)



Рисунок 3.9. Приклад до пункту 5)

Під час заняття учні розв'язали дане завдання.

Завдання. Поставити у відповідність записаному рівнянню номер метода, який застосовується для його розв'язання.

Варіант I

Виберіть метод розв'язування даного ірраціонального рівняння:

- 1) піднесення до степеня;
- 2) заміна змінної;
- 3) розкладання на множники;
- 4) використання властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$;
- 5) графічний.

Рівняння	Методи розв'язування				
	1	2	3	4	5
1) $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[6]{x+1} = 6$					
2) $x^2\sqrt{x+6} - 49\sqrt{x+6} = 0$					
3) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$					
4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt{x}$					
5) $\sqrt{2x-10} + \sqrt{3-x} = 9$					

Варіант II

Виберіть метод розв'язування даного ірраціонального рівняння:

- 1) піднесення до степеня;
- 2) заміна змінної;
- 3) розкладання на множники;

4) використання властивостей функції $y = \sqrt[n]{x}$;

5) графічний.

Рівняння	Методи розв'язування				
	1	2	3	4	5
1) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{2x - 1}$					
2) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$					
3) $\sqrt{x-5} - 3\sqrt{2-x} = x-1$					
4) $\sqrt{x-2} = \frac{3}{x}$					
5) $7^x \sqrt{x-5} - 49\sqrt{x-5} = 0$					

Відповіді:

Варіант I

	1	2	3	4	5
1		+			
2			+		
3	+				
4					+
5				+	

3				+	
4					+
5			+		

Варіант 2

	1	2	3	4	5
1	+				
2		+			

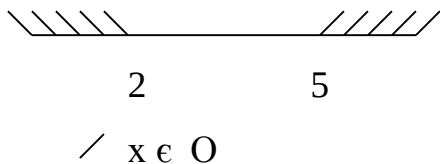
При розв'язуванні будь-якого ірраціонального рівняння треба застосовувати метод «пильного погляду», тобто спочатку треба уважно роздивитись і проаналізувати умову рівняння, а потім уже визначатись з методом розв'язання.

Наприклад, до 3-го рівняння на перший погляд можна застосувати метод піднесення обох частин до степеня. Але це приводить до громіздких записів. Витрачається багато часу на розв'язання.

«Пильним поглядом» розглянувши умову, ми бачимо, що область визначення функції

$y = \sqrt{x-5}$: $x \geq 5$, а $y = \sqrt{2-x}$: $x \leq 2$, тому тут доречно знайти область визначення функції, яка стоїть в лівій частині:

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{Место для уравнения.}$$



Отже, ліва частина не існує ні при одному значенні x . Таким чином, питання про розв'язок рівняння знімається.

У 4 рівнянні $\sqrt{x-2} = \frac{3}{x}$ підходить графічний метод. Побудувавши графіки функцій $y = \sqrt{x-2}$ і $y = \frac{3}{x}$ в одній системі координат, ми отримаємо точку перетину, абсциса якої і є розв'язком рівняння: $x=3$.

Враховуючи, що точність побудови графіків може бути порушена, треба обов'язково зробити для себе перевірку:

$$\sqrt{3-2} = \frac{3}{3}$$

$$1=1 \text{ – вірно.}$$

У першому рівнянні $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{2x-1}$ в лівій і правій частинах корінь другого степеня, тому використовуємо метод піднесення до степеня.

Показники коренів другого рівняння $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$ 2 і 4, 4 у 2 рази більше, ніж 2. Тому треба ввести нову змінну і прийти до квадратного рівняння.

У 5 рівнянні присутній однаковий множник $\sqrt{x-5}$, який треба винести за дужки і розкласти ліву частину на множники.

Таким чином, метод «пильного погляду» дуже допомагає нам при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

На останньому занятті з учнями була проведена рефлексія у вигляді тестування у Google Forms. Для того, щоб дізнатися як діти засвоїли матеріал, чи сподобалось їм, та чи будуть вони застосовувати це на практиці.

Тестування можна пройти за посиланням <https://forms.gle/p4SSw2hajvJJbJj87>

На запитання, чи будуть вони ці знання застосовувати, то 66,7% дітей проголосували, що не знають, 16,7% що так, і така сама кількість, що ні (рис.3.10). Але на запитання, чи сподобалось їм заняття, всі одногосно відповіли, що так (рис.3.11).

Чи будете ви застосовувати здобуті знання?
6 відповідей

 Копіювати

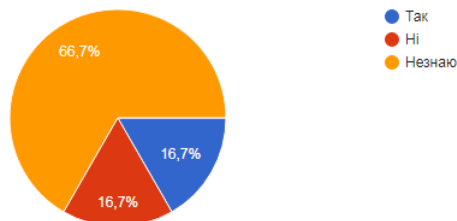


Рисунок 3.10 Результат запитання №2

Чи сподобались вам заняття?
6 відповідей

 Копіювати

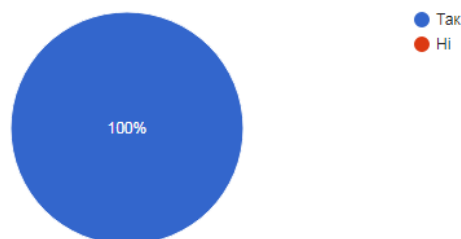


Рисунок 3.11 Результат запитання №3

Апробація дозволила виявити такі основні положення методики формування математичних компетентностей в учнів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей.

1. Під час вивчення ірраціональних рівнянь у основній школі доцільно застосовувати процесний підхід до навчання [28], при якому навчання математики сприймається як мережу взаємозалежних процесів: проектування навчання змісту теми, навчання поняттям, навчання математичним методам, зокрема методам розв'язання ірраціональних рівнянь та інших.

2. Вивчення стандартних методів розв'язання ірраціональних рівнянь супроводжується розглядом доцільно підібраних прикладів, що створюють основу розуміння учнями навчального матеріалу [29].

3. Найважливішим завданням навчання є закріплення всіх основних прийомів розв'язання ірраціональних рівнянь в умовах урочної та позаурочної діяльності.

4. Доцільне активне залучення поняття параметра щодо ірраціональних рівнянь. Розв'язання рівнянь із параметрами, використання графічної, знаково-символічної та словесної форм подання математичного змісту, а також організація перекладу з однієї форми подання інформації до інших дозволяють ефективно освоювати математичний зміст.

5. Розгляд різноманітних нестандартних методів розв'язання ірраціональних рівнянь (метод мажорант, функціонально-графічні методи) розширює сферу розуміння учнів [30].

6. Можлива розробка спеціальної програми позаурочної діяльності учнів із вивчення ірраціональних рівнянь у основній школі.

7. З метою впливу розробленої методики на активізацію математичної компетентності учнів було виявлено рівень пізнавальної активності школярів до і після експерименту. Досліджувався рівень пізнавальної активності школярів:

- високий рівень – творчий;
- середній рівень – інтерпретуюча активність;

- низький рівень – відтворювальна активність.

Результати дослідження показали перевищення на 24% частки учнів із високим рівнем активності внаслідок впровадження розробленої методики рішення ірраціональних рівнянь. Вплив цієї методики на підвищення рівня пізнавальної активності відзначають і вчителі, які брали участь в опитуванні. Понад 30% вчителів із 18, які брали участь в апробації, відзначили підвищення рівня пізнавальної активності учнів у результаті впровадження нової методики.

ВИСНОВКИ

Отже, під час написання роботи ми виконали наступні завдання дослідження:

Розкрили поняття математичної компетентності. Математична компетенція - це здатність структурувати дані (ситуацію), виокремлювати математичні відносини, створювати математичну модель ситуації, аналізувати та перетворювати її, інтерпретувати отримані результати. Іншими словами, математична компетенція учня сприяє адекватному застосуванню математики для вирішення виникаючих у повсякденному житті проблем. Компетентність проявляється у разі застосування знань та умінь при розв'язуванні завдань, відмінних від тих, у яких ці знання засвоювалися.

Описали формування компетентності учнів на різних етапах уроку. При цілеспрямованій роботі зі здійснення компетентнісного підходу у навчанні математики передбачається досягнення таких результатів:

- використання знань, умінь і навиків, отриманих під час уроків математики, у практичній діяльності;
- формування загальнонавчальних навичок, що дозволяють продовжити навчання у коледжі чи профільному класі;
- освоєння комунікативним, аналітичним, проектуєм, творчим типами діяльності;
- оволодіння математичними знаннями, вміннями та навичками різного рівня складності: від мінімальних, що відповідають обов'язковим результатам навчання, до підвищених, що дозволяють продовжити навчання у класах фізико-математичного та інформаційно-технологічного профілю;
- формування ставлення до математики як мета предметної науки;
- набуття навички роботи з довідковою літературою, проведення необхідних вимірювань,
- підбору доступних приладів; аналізу отриманих результатів;

- формування компетенції, що дозволяє усвідомлено брати участь у науково-дослідній та проектній діяльності;
- зміна поведінки у колективі: вони починають прислухатися до думки інших, без остраху висловлюють свою думку.

Для успішного формування математичних компетентностей учнями треба:

- 1) Звернути увагу на особливість ірраціональних рівнянь і нерівностей;
- 2) Наголосити на загальний прийом розв'язування, що полягає у «вилученні радикалів»;
- 3) Систематизувати їх за типами і способами розв'язання;
- 4) Завжди слідкувати за рівносильністю перетворень, використовуючи для цього ОДЗ і перевірку коренів.

В межах реалізації компетентнісного підходу до вивчення математики задачі практичного змісту, які призводять до вивчення ірраціональних рівнянь, надзвичайно важливі. В процесі розв'язування прикладних задач з застосуванням ірраціональних рівнянь досягаються такі дидактичні цілі, як концентрація уваги учнів на новій проблемній ситуації, формування міжпредметних зв'язків, підвищення мотивації до навчання, формування математичної компетентності та компетентностей в галузі природничих наук, техніки й технологій тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. Навч. Закладів: профільний рівень . Гімназія, 2010.
2. Бахмат Л., Тонконог Н. Аналіз онлайн-інструментів дистанційного навчання до та під час пандемії Covid-19. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: "Педагогічні науки", 2022, (1), 22–27. <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2022-1-22-27>
3. Бахмат Н. Роль цифрових технологій у навчанні математики учнів початкових класів. Молодь і ринок. №2 (200), 2022, С.65-71. URL : <http://mir.dspu.edu.ua/article/view/256010/253099>
4. Бевз Г.П. Нерівності. Математика в школі. 2009. № 1 – 2. С. 23 – 27.
5. Белешко Д.Т. Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. Пос. Тернопіль: Навчальна книга, 2012. 80с.
6. Близнюк Т. Цифрові інструменти для онлайн і офлайн навчання: навчально-методичний посібник. Івано-Франківськ: Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, 2021. 64 с.
7. Большакова І. О. Практики та підходи до дистанційного навчання – рекомендації для вчителів. Нова українська школа, 23 квітня 2020 р. URL : <https://nus.org.ua/articles/praktyky-ta-pidhody-do-dystantsijnogo-navchannyarekomendatsiyi-dlya-vchyteliv/>.
8. Булинко Г. Основні способи розв'язування ірраціональних рівнянь: підготовка до ДПА і ЗНО. Математика. Шкільний світ. 2014. № 23 С.18 – 23.
9. Бурда М. І. Реалізація наскрізних ліній ключових компетентностей у підручниках з математики. Проблеми сучасного підручника: Інститут педагогіки НАПН України: Педагогічна думка, Вип. 19, с.22-28, 2017.

10. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Колесник Т. В., Мальований Ю. І. Математика [підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: рівень стандарту]. Київ: Видавничий дім «Оріон», 2018. 288 с.
11. Васильєва Д. В. Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. Проблеми сучасного підручника. Вип.21, 2018. С. 83–91.
12. Васильєва Д. В. Організація навчання математики учнів з покоління Z. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі. 2018. Вип. 20. С. 33–38.
13. Власенко Н. О. Дистанційне навчання: Україна і світ. Естетика і етика педагогічної дії, 20, 2019. С. 29–37.
14. Гахович С. В., Савченко, Т. В. Теоретичні та практичні аспекти використання системи дистанційного навчання. Збірник наукових праць Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка, (56), 2017. 210–116. URL : http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpviknu_2017_56_27.
15. Гече Ф.Е. Збірник конкурсних тестових завдань з математики. – Ужгород: В-во «Shark», 2015. 238с.
16. Глобін О. І., Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Вашуленко О. П., Мацько Н. Д., Хмара Т. М. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: метод. посібник. Київ: Педагогічна думка, 2015. 245 с.
17. Головань М. С. Математична компетентність: сутність та структура. Науковий вісник Східноєвропейського національного університету. 2014. № 1. С. 35–39.
18. Дуда Ю. Особливості дистанційного навчання молодших школярів. Інноваційні педагогічні рішення у початковій освіті: зб. наук. праць [за заг. ред. / О. А. Федій, відп. ред. Ю. Г. Павленко] / Полтав. нац. пед. ун-т

імені В. Г. Короленка. Вип. 3. Полтава : Сімон, 2020. С.59-66. URL : <https://bit.ly/47f5762>

19. Захарова Г. Б., Лемешко К.О. Теоретичний аналіз визначення математичної компетентності учнів у роботах українських та зарубіжних вчених. «Освіта. Інноватика. Практика» науковий журнал. Том 10, №6 / Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, редкол.: О. В. Семеніхіна (гол. ред.) [та ін.]. Суми : [СумДПУ ім. А. С. Макаренка], 2022

20. Кадемія М. Ю. Використання сервісів соціальних медіа в навчальному процесі ВНЗ: Блоги, Веб-квести, Блог-квести : навчально-методичний посібник (видання 2-е, доповнене): ТОВ «Ландо ЛТД», 2014. 236 с.

21. Ковальчук О. М. Управління інноваційною діяльністю – основа якісних змін в освіті Вісник ЛНУ імені Тараса Шевченка: наук. зб. Київ, 2012. № 22 (257), Ч. I.

22. Козирева О. А. Розв'язування ірраціональних рівнянь: урок у 10 класі. Математика в школах України. 2011. № 32. С.16 – 18.

23. Кухаренко В. М. Тьютор дистанційного та змішаного навчання: посібник. Київ : Міленіум, 2019. 307 с. URL :<https://repository.kpi.kharkov.ua/bitstreams/45d14177-8792-4e5c-9c38-7280fc1b428d/download>

24. Лиман Ф.М. Фізико-математична освіта: Зб. наукових праць. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2014. №1 (6). 240 с.

25. Ліпчевська І. Л. Візуалізація як складова дистанційної освіти у початковій школі. Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі : матеріали VII Міжнар. науково-практ. конф., м. Київ, 20–21 квіт. 2022 р. Київ, 2022. С. 104–105. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/731536>.

26. Мандрона М. Використання інтерактивних дощок для підвищення ефективності організації навчального процесу. Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Інформатизація вищого навчального закладу. 2013. № 775. С. 78-82.

27. Мардаренко О.В. Інтерактивні комунікативні технології освіти: мобільне навчання як нова технологія в підвищенні мовної компетенції студентів немовних ВНЗ./ Інформатика та математичні методи в моделюванні ■ 2013 ■ том 3, №3

28. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Номирський Д.А., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10 класу загальноосвіт. закладів. Академічний рівень. К.: Гімназія, 2010.

29. Мясковська М. О. Світові тенденції розвитку дистанційної освіти та перспективи для України. Збірник наукових праць Кам'янець–Подільського національного університету ім. Івана Огієнка, 2015. 21, 256–258. URL : <https://cutt.ly/6wRsRs5i>

30. Науково-методичні засади формування математичної компетентності здобувачів середньої освіти : монографія / ДЗ «ПНПУ імені К. Д. Ушинського; за ред. К. В. Недялкової». Одеса : Видавець ФОП Бойчук, 2021. 27с. URL : <http://dspace.pdpu.edu.ua/handle/123456789/10667>

31. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. URL : <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf> 47. Нова українська школа: poradnik dla vchytelja. Київ : Літера ЛТД. 2019. 208 с. URL : https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/navchalno-metodychny-posibnyky/dlya-pedpraysivnykiv/poradnik_blok-min.pdf.

32. Сафонова І. Я. Компетентнісний підхід до навчання математики старшокласників. Педагогічна освіта: теорія і практика. Педагогіка. Психологія. 2014. № 21. С. 53–57.

33. Скворцова С. О. Формування професійної компетентності в майбутнього вчителя математики. «Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку». 2010. Вип. № 4. 34
34. Хара О. М. Королівська математика. Досвід шкільної математичної освіти в Норвегії. Математика в сучасній школі. № 6. 2012. С. 27–34
35. Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Ірраціональні рівняння і нерівності: Навчальний посібник. Тернопіль, 2018. 72с.
36. Цифрова компетентність сучасного вчителя нової української школи: (Моделювання цифрового навчального середовища закладу загальної середньої освіти) : зб.матеріалів всеукр.наук.-практ.семінару (Київ, 5 березня 2020 р.) / за заг.ред. О.В. Овчарук. Київ: Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України: Київ, 2020. 117 с.
37. Holm M. Project-based instruction: a review of the literature on effectiveness in Prekindergarten through 12th grade classrooms // InSight Rivier Academic Journal. 2011. Vol. 7 no (2). pp. 1-13.
38. Mathematics resources [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu: <http://www.mathcentre.ac.uk>
39. Patel R. Innovations in teaching of mathematics [Електронний ресурс]/R.Patel. Режим доступу: www.ijsr.net/archive/v4i7/SUB156635.pdf, с. 3
40. PISA: математична грамотність / уклад.Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. Київ:УЦОЯО, 2018. 60 с.

Додаток А



УКРАЇНА

БІЛОСЛАВСЬКИЙ ЛІЦЕЙ імені МАРІЙКИ ПІДГІРЯНКИ
ДЕЛЯТИНСЬКОЇ СЕЛИЩНОЇ РАДИ
78460, с.Білі Ослави, вул.М.Підгірянки,97
НАДВІРНЯНСЬКИЙ РАЙОН
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКА ОБЛАСТЬ
тел. 65-2-34 e-mail bilooslavskashkola@meta.ua

Директор



Білославського ліцею імені
Марійки Підгірянки
Делятинської селищної ради
Івасюк С.Д.
15 березня 2024 р.

АКТ

**використання результатів виконаної науково-дослідної роботи
Струк Мирослави Русланівни**

За матеріалами науково-дослідної роботи Струк Мирослави Русланівни на тему «Формування математичної компетентності учнів про розв'язуванні ірраціональних рівнянь та нерівностей», виконаної у період з 05.02.2024 до 15.03.2024 в рамках виконання науково-дослідної теми кафедри математики та інформатики і методики навчання «Розв'язування ірраціональних рівнянь» розроблено 3 заняття.

Комісія в складі:

голова комісії:

Івасюк С.Д., директор Білославського ліцею імені Марійки Підгірянки,

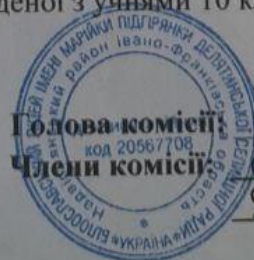
члени комісії:

Чуревич Н.І., заступник директора з навчально-виховної роботи,

Грещук Н.В., вчитель математики,

встановили використання в процесі освітньої діяльності ліцею матеріалів науково-дослідної роботи, проведеної з учнями 10 класу.

15 березня 2024 р.



Голова комісії:
Члени комісії:

Івасюк С. Д.

Чуревич Н. І.

Грещук Н. В.

Додаток Б

Тема заняття: Розв'язування ірраціональних рівнянь**Мета:**

- удосконалити вміння розв'язувати рівняння;
- сприяти розвитку логічного мислення, розвивати вміння аналізувати математичний матеріал;
- виховувати увагу, комунікабельність.

Хід заняття

- I. Організаційний момент (привітання)
- II. Оголошення теми і мети. (слайд 1, 2)
 - Дорогі десятикласники, сьогодні ми з вами узагальнимо і систематизуємо знання з теми «ірраціональні рівняння», навчимося аналізувати здобуті корені рівняння та розвивати математичне мислення при виборі методу розв'язування, або заміни змінної.
- III. Актуалізація опорних знань (слайди 3, 4)

Дати відповіді на питання:

 - ✓ Яке рівняння називається ірраціональним?
 - ✓ Що означає розв'язати ірраціональне рівняння?
 - ✓ Які ви знаєте способи розв'язування ірраціональних рівнянь?
 - ✓ Які формули скороченого множення використовуємо при піднесенні до степеня?

Обговорення.

-Пропоную гру «Поле Чудес», під час якої ми згадаємо імена видатних людей які зробили вагомий внесок у розвиток математики.

Гра проходить у три тури.

Перший тур. (слайд 5) Приймають участь усі діти, які повинні відгадати слово. Щоб відкрити букву, треба правильно розв'язати завдання. (Група розбивається на три команди. Команда- переможець отримує найбільшу кількість балів і переходить у другий тур.)

Завдання першого туру:

- Французький математик, який у середині XVII століття запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь.

--	--	--	--	--

Завдання на екран. (слайд 6)

- Розв'язати рівняння:
 1. $\sqrt{x} = 4$ A) ± 6
 2. $\sqrt{x} - 3 = 2$ E) 25
 3. $\sqrt{x + 4} = 5$ P) 21

4. $\sqrt{5-x} = 1$

М) 4

5. $\sqrt{x^2} = 6$

Ф) 16

Портрет вченого: П'єр Ферма (слайд 7)

Виставлення балів командам, за кожну відкриту букву – 1 бал.

Оголошення кращої команди.

Другий тур. (слайд 8) Прізвище французького математика, юриста за освітою, який вдосконалив методи розв'язування рівнянь, в тому числі квадратних.

--	--	--	--

Завдання на екран. (слайд 9)

1. Знайти корені рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$.

І) 2; -1; 4

2. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\sqrt{x-4} = 0$.

Т) 6

3. Назвати заміну змінної у рівнянні $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} = 3$.

Р) 8;

1

4. Розв'язок рівняння $\sqrt{\frac{x-6}{x-2}} = 0$.

В) 2; -4

С) $\sqrt{x}$ Є) $\sqrt[4]{x}$

Портрет вченого: Франсуа Вієт (слайд 10)

Підведення підсумків другого туру гри.

IV. Узагальнення і систематизація знань, умінь і навичок (технологія «Акваріум»).

1. Методи розв'язування ірраціональних рівнянь (слайд 11).

Пам'ятати! (слайд 12)

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитись сторонні корені, які відсіюють перевіркою.

При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому, тобто сторонні корені не з'являються.

а) **Метод піднесення до степеня.**- Розв'язати рівняння $4 + \sqrt[3]{x-57} = 0$ (технологія «акваріум»).

Одна група займає місце в центрі класу, обговорює метод, пояснює розв'язання. Решта студентів слухають і записують в зошити. (По закінченню слайд 13).

Завдання для всієї групи по варіантах (слайд 14).

- Розв'яжіть рівняння методом піднесення до степеня:

Варіант 1

$$\sqrt{x+23} - 1 = 6$$

Відповідь: 24

Взаємоперевірка. (робота в малих групах)

б) Метод розкладання на множники.

- Розв'язати рівняння $x^2\sqrt{x+7} - 49\sqrt{x+7} = 0$ (до «акваріуму» сідає наступна команда).

По закінченню слайд 15.

Завдання для всієї групи (слайд 16):

- Розв'яжіть рівняння методом розкладання на множники:

Варіант 1

$$2\sqrt{16-x} + x\sqrt{16-x} = 0$$

Відповідь:

в) Метод заміни змінної.

Розв'язати рівняння $2\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} = 10$.

По закінченню слайд 17.

Завдання для всієї групи (слайд 18):

- Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної:

Варіант 1

$$3\sqrt{x+23} - \sqrt[4]{x+23} = 2$$

Відповідь:

Взаємоперевірка. (робота в малих групах)

Варіант 2

$$\sqrt{17-x} + 2 = 4$$

Відповідь: 13

Варіант 2

$$3x\sqrt{x+18} - 3\sqrt{x+18} = 0$$

Відповідь:

2. Третій тур. (технологія «Акваріум»)

Пригадати формули скороченого множення $(a+b)^3$ та $(a-b)^3$.

- 1) Увага завдання: розв'язати піднесенням до непарного степеня рівняння $\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4$ (слайд 19-20-21)

- 2) Розв'язування:

$$\sqrt[3]{25+x} + \sqrt[3]{3-x} = 4, \text{ один з радикалів відокремити}$$

$$\sqrt[3]{25+x} = 4 - \sqrt[3]{3-x}, \text{ піднести до кубів:}$$

$$25+x = 64 - 3 \cdot 16\sqrt[3]{3-x} + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{3-x}^2 - (3-x)$$

$$12\sqrt[3]{3-x}^2 - 48\sqrt[3]{3-x} + 36 = 0, \text{ заміна: } t = \sqrt[3]{3-x}$$

$$12t^2 - 48t + 36 = 0, \text{ або } t^2 - 4t + 3 = 0, \text{ і корені } t_1 = 3, t_2 = 1$$

$$\text{ПДЗ: } \sqrt[3]{3-x}=3; \sqrt[3]{3-x}=1, \text{ тобто } x=-24, \text{ та } x=2.$$

- 3) Назвати заміну в наступних рівняннях:

$$\text{а) } -4\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = -3,$$

$$\text{б) } \sqrt{x-5} = x-5,$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \sqrt[7]{4-x} + \sqrt[7]{(4-x)^{-1}} = 3, \\ \text{г)} \quad & \sqrt{x+1} - 5\sqrt[4]{x+1} + 6 = 0, \\ \text{д)} \quad & \sqrt{x^2+2x} = x^2+2x-3, \\ \text{е)} \quad & \sqrt[5]{\frac{12x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{12x}} = 5. \end{aligned}$$

Підведення підсумків третього туру, виставлення балів.

3. Самостійна робота (слайд 22).

Варіант 1

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{x} = -3; \\ 2. \quad & \sqrt[3]{x+1} = 5; \\ 3. \quad & \sqrt{4+\sqrt{x+2}} = 3; \\ 4. \quad & x^2\sqrt{x-8} - 25\sqrt{x-8} = 0; \\ 5. \quad & 6\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} = 7. \end{aligned}$$

Варіант 2

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{x} = 10; \\ 2. \quad & \sqrt[3]{x+7} = 2; \\ 3. \quad & \sqrt{11+\sqrt{x-21}} = -3; \\ 4. \quad & 2x\sqrt{x+6} - 24\sqrt{x+6} = 0; \\ 5. \quad & 2(x^2-5) + 4\sqrt{x^2-5} = 6. \end{aligned}$$

V. Закріплення матеріалу. УСНО (слайд 23)

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{\frac{x-2}{x-6}} = 0 & \text{а) } -32 \\ 2. \quad & \sqrt{x} - 4 = 0 & \text{б) } 2 \\ 3. \quad & \sqrt[3]{-2x} = 4 & \text{в) } -2; -3 \\ 4. \quad & (x+2)\sqrt{x+3} = 0 & \text{г) } 16 \\ & & \text{д) } 6 \end{aligned}$$

Одержані відповіді:

	а	б	в	г	д
1		х			
2				х	
3	х				
4			х		

VI. Підсумки. Рефлексія.