

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики

Кафедра математики та інформатики і методики навчання

## **КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА**

на здобуття другого(магістерського) рівня вищої освіти

на тему «Вивчення властивостей числових трикутників засобами шкільної  
комбінаторики»

Виконала

магістрантка групи СОМ(М)-2

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Томчук Ольга Василівна

Керівник: доктор фізико-математичних наук,

професор: Заторський Роман Андрійович

Рецензент:

Івано-Франківськ 2024

## ЗМІСТ

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП.....                                                                                                  | 3  |
| РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ТРИКУТНИКІВ....                                               | 7  |
| 1.1. Основні види числових трикутників.....                                                                 | 7  |
| 1.2 Комбінаторні властивості числових трикутників.....                                                      | 12 |
| 1.3 Комбінаторні методи вивчення числових трикутників у школі.....                                          | 14 |
| Висновки до розділу 1.....                                                                                  | 18 |
| РОЗДІЛ 2 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ ТРИКУТНИКІВ.....                                                   | 19 |
| 2.1 Застосування числових трикутників у розв'язуванні задач.....                                            | 19 |
| 2.2 Проектні та дослідницькі роботи для учнів.....                                                          | 28 |
| 2.3 Практичні завдання і вправи з використання числових трикутників засобами<br>шкільної комбінаторики..... | 39 |
| Висновки до розділу 2.....                                                                                  | 46 |
| ВИСНОВКИ.....                                                                                               | 48 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....                                                                             | 50 |

## ВСТУП

**Актуальність теми дослідження.** Вивчення властивостей числових трикутників є важливою складовою шкільної комбінаторики, оскільки ці математичні структури відображають базові принципи організації та упорядкування елементів. Числові трикутники, такі як трикутник Паскаля, представляють багатий набір властивостей, які мають глибоке значення в різних математичних і природничих науках. Їх дослідження сприяє розвитку комбінаторного мислення, що є важливим для розв'язання широкого спектра завдань у математичній освіті.

Викладанню комбінаторики в шкільному курсі математики, методиці введення комбінаторних структур, вивченню та формуванню комбінаторного мислення присвячені численні дослідження математиків, методистів та психологів; А. М. Колмогоров, Н. Ю. Віленкін, Б. Інельдер, Ж. Піаже, Н. Ф. Таріжіна, З. Г. Шефтель, І. М. Яглом, М. Я. Ядренко, Є. Є. Белокурова, Г. В. Блюменська, Є. П. Виноградова, Н. М. Войналович, Л. В. Євдокимова, Ю. О. Захарійченко, І. В. Ігнатушина, Н. Б. Істоміна, В. І. Імбер, Є. Н. Каткова, С. Р. Когаловський, Е. Локвуд, Т. Г. Попова, Ю. А. Полуянов, Г. Ф. Хакімов та інші.

Більшість авторів пропонують формувати комбінаторне мислення в учнів початкової та середньої школи і знайомлять з основними поняттями комбінаторики; дисертація А. Ф. Абдрашитова присвячена формуванню комбінаторного мислення у майбутніх учителів технічних дисциплін.

Актуальність дослідження числових трикутників полягає в тому, що вони є інструментами для вирішення комбінаторних задач, які постійно зустрічаються як у шкільній програмі, так і у повсякденному житті. Зокрема, вони допомагають учням зрозуміти принципи побудови біноміальних коефіцієнтів, аналізу послідовностей та симетрії, а також відношень між числами.

**Метою роботи** є вивчення властивостей числових трикутників засобами шкільної комбінаторики.

**Завдання дослідження:**

1. Дослідити основні числові трикутники, такі як трикутник Паскаля, та їх властивості.
2. Розкрити зв'язок числових трикутників із біноміальними коефіцієнтами та іншими математичними структурами.
3. Проаналізувати приклади практичного застосування числових трикутників у шкільній комбінаториці.
4. Розробити методичні рекомендації для використання числових трикутників у навчальному процесі.
5. Оцінити ефективність числових трикутників як інструменту для формування комбінаторного мислення в учнів.

**Об'єкт дослідження:** числові трикутники як математичні структури та їх властивості.

**Предмет дослідження:** методи дослідження числових трикутників та їх застосування у шкільній комбінаториці.

Основними **методами** є теоретичний аналіз, практичне дослідження, порівняльний аналіз, експериментальний підхід і використання інтерактивних засобів навчання.

Теоретичний аналіз включає вивчення основних властивостей числових трикутників, таких як трикутник Паскаля, трикутник Фібоначчі та інші. Це передбачає дослідження математичних визначень, закономірностей і формул, що лежать в основі цих трикутників.

Практичне дослідження передбачає використання числових трикутників для розв'язання конкретних комбінаторних задач. Це може включати обчислення біноміальних коефіцієнтів, розклад біноміальних виразів, розв'язання задач на комбінації та ймовірності. Практичне дослідження дозволяє учням на практиці застосовувати отримані теоретичні знання і перевіряти їх на конкретних прикладах.

Порівняльний аналіз використовується для дослідження відмінностей і спільних рис між різними числовими трикутниками. Це передбачає порівняння

властивостей трикутника Паскаля з іншими числовими трикутниками, такими як трикутник Фібоначчі чи трикутник Хартлі. Порівняльний аналіз допомагає зрозуміти, як різні числові трикутники можуть бути використані в різних контекстах і які їх особливості.

Експериментальний підхід передбачає створення і тестування нових числових трикутників або варіацій існуючих. Це може включати розробку нових правил побудови трикутників та дослідження їх властивостей на практиці. Експериментальний підхід дозволяє дослідникам і учням виявити нові закономірності і можливості для застосування числових трикутників.

Використання інтерактивних засобів навчання, таких як комп'ютерні програми або математичні симулятори, забезпечує можливість візуалізації числових трикутників і їх властивостей. Інтерактивні засоби дозволяють учням експериментувати з різними параметрами і миттєво отримувати результати, що сприяє глибшому розумінню і засвоєнню матеріалу.

**Наукова новизна** дослідження полягає у вперше проведеному систематизованому дослідженні числових трикутників у контексті шкільної комбінаторики, що дозволило виявити нові підходи до їх вивчення та застосування в навчальному процесі. Дослідження виявило нові закономірності у властивостях числових трикутників, що розширюють розуміння їх зв'язків з іншими математичними структурами, такими як біноміальні коефіцієнти та послідовності. Запропоновано інноваційні методи застосування числових трикутників у вирішенні комбінаторних задач, що значно підвищує ефективність навчання та рівень засвоєння матеріалу учнями.

**Практичне значення** одержаних результатів властивостей числових трикутників проявляється в їх широкому використанні в теорії ймовірностей, алгоритмічній комбінаториці, а також у задачах оптимізації. Знання про ці структури допомагає в розвитку навичок логічного мислення, що необхідно для вирішення задач у різних сферах науки і техніки.

**Структура кваліфікаційної роботи.** Кваліфікаційна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних інформаційних джерел та додатків. Загальний обсяг тексту 53 сторінки.

## **РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ТРИКУТНИКІВ**

### **1.1. Основні види числових трикутників**

Числові трикутники є важливим математичним інструментом, що використовуються для вирішення різних задач у комбінаториці, теорії чисел та

інших розділах математики. Одним із найвідоміших прикладів є трикутник Паскаля, де кожне число в ряді є сумою двох чисел, що розташовані над ним. Цей трикутник відіграє ключову роль у розрахунках біноміальних коефіцієнтів, що часто використовуються при розкладанні біномів.

Інший вид трикутника – трикутник Фібоначчі, де числа формуються за аналогією з послідовністю Фібоначчі: кожне наступне число в рядку є сумою двох попередніх чисел. Такий трикутник часто застосовується в задачах, пов'язаних із цією послідовністю, що має безліч математичних і прикладних властивостей. Існують також менш відомі, але не менш цікаві числові трикутники, як-от трикутник Хартлі, який також містить у собі певні закономірності та використовується для вирішення специфічних задач у математиці. Всі ці числові трикутники дозволяють розв'язувати широкий спектр задач, розвивати аналітичне мислення і відкривати нові математичні закономірності [37, с. 66-67].

Історія математики має особливе захоплення. Задачі і теореми, доведені сотні і тисячі років тому, зачаровують нас своєю красою і витонченими логічними міркуваннями.

Перегортаючи сторінки минулого науки, ми переконуємося, що найбільшим джерелом математичних ідей, понять і проблем є практична діяльність людини.

Зміцнення централізованої держави сприяло створенню міст і розвитку торгівлі. Виникли математичні задачі, пов'язані з вимірюванням площі полів, об'єму гребель і зернохосвищ тощо. Термінів «трикутник», «квадрат» і «фігура» тоді ще не існувало. На папірусах, що дійшли до нас, це було пряме, косе або кругле поле, ділянка з межами, довжиною і шириною. Стародавні люди вже обчислювали площу прямокутників, трикутників і трапецій за точними правилами, ще раз доводячи, наскільки важливими були ці прості геометричні фігури для повсякденного життя.

Давньогрецькі вчені витратили три століття на розробку теорії такої глибини, що по-справжньому зрозуміти і оцінити її змогли лише математики XIX і XX століть. Слава основоположника давньогрецької математики належить Піфагору



Самоському, який перетворив геометрію зі збірки рецептів розв'язання різноманітних задач на абстрактну науку. Ця наука розглядала вже не площу поля, місткість зерносховища, греблі чи штабеля цегли, а геометричні фігури – абстрактні фігури, що ідеалізували певні властивості реальних об'єктів.

Проте науковий і практичний інтерес до найпростіших геометричних фігур, зокрема до трикутника – плоскої фігури, утвореної з'єднанням трьох точок прямою лінією, не згасав. Математики називають таку фігуру двовимірним симплексом. У перекладі з латинської «симплекс» означає найпростіший. Тривимірний симплекс – це трикутна піраміда. Саме через свою простоту трикутник став основою вимірювання [41, с. 17].

За допомогою піфагорійського трикутника можна скласти скільки завгодно трикутників, а довжини і площі сторін виражаються натуральними числами. Піфагор довів теорему про те, що площа квадрата, утвореного на катеті прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, утворених на його катетах. Давньогрецькі математики називали квадрати  $n^2$ , а прямокутники  $n(n+1)$ . Герон Александрійський відкрив формулу для площі сторін трикутника, і стало відомо, що бісектриси перетинаються в одній точці, так само як медіана і висота.

Властивості трикутників особливо інтенсивно вивчалися в XV і XVI століттях. Ось одна з найкрасивіших теорем того часу, написана Леонардом Ейлером: «Середні точки сторін трикутника, основа його висоти і середини висот, проведених з вершини до точки перетину, лежать на одному колі. Це коло називається «колом дев'яти точок». Його центр знаходився посередині відрізка, що з'єднував точку перетину висот і центр описаного кола.

Відомо, що французький імператор Наполеон присвячував своє дозвілля математиці. Якщо побудувати рівносторонній трикутник поза сторонами трикутника, то його центром буде вершина рівностороннього трикутника. Цей трикутник відомий як зовнішній трикутник Наполеона.

Численні дослідження геометрії трикутників, проведені між XV і XIX

століттями, створювали враження, що все про трикутники вже було відомо. Відкриття американського математика Ф. Морлі було ще більш дивовижним. Він довів, що якщо через вершину трикутника провести промінь тріангуляції кута, то точка перетину тріангуляцій сусідніх кутів є вершиною рівностороннього трикутника.

Він систематизував основні теоретичні відомості про трикутники, їх види та формули для обчислення площ. Трикутник – це фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що їх послідовно з'єднують.

Ці точки називаються вершинами трикутника, а відрізки, що їх з'єднують – сторонами трикутника [10, с. 86].

В

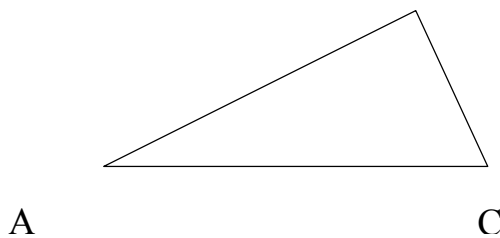


Рис. 1.1

Всім знайомі рівносторонні, рівнобедрені, тупокутні, гострокутні та прямокутні трикутники, які широко використовуються для вирішення простих повсякденних завдань (наприклад, побудова інших плоских і просторових фігур, обчислення площ та об'ємів).

Деякі інші трикутники менш відомі.

- Педальний трикутник – це трикутник, вершина якого є основою перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки  $P$  в центрі трикутника  $ABC$  на сторону трикутника  $ABC$ ;

- Прямокутний трикутник – окремий випадок педального трикутника, в якому будь-яка точка  $P$  є точкою перетину висот трикутника  $ABC$ ;

- Центральний трикутник (по відношенню до трикутника  $ABC$ ) –

трикутник, утворений з'єднанням середніх точок сторін даного трикутника ABC;

- Різницевий трикутник – трикутник, довжини сторін якого ізометричні;
- Бісектриса – трикутник, вершиною якого є точка перетину бісектрис протилежних сторін даного трикутника ABC.

З розвитком науки про трикутники серед науковців (і не тільки серед них) стали поширеними особливі назви деяких точок і ліній трикутників:

- Севіана - відрізок, що сполучає вершину трикутника з деякою точкою на протилежній стороні;
- Висота – севіана, опущена під прямим кутом до протилежної сторони трикутника;
- Бісектриса – пряма, що ділить кут при одній вершині навпіл;
- Середня лінія – лінія, що з'єднує вершину трикутника з центром протилежної сторони;

Медіана – лінія, що з'єднує вершину трикутника з центром протилежної сторони;

- Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину трьох перпендикулярів, що ділять сторони трикутника навпіл;
- Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника. Ортоцентр трикутника ABC – центр кола, вписаного в трикутник ортоцентрично до трикутника ABC;

- Центр ваги – точка, в якій відстань від центру ваги до центра кола, описаного навколо трикутника, ділиться у відношенні 2:1;

- Лінія Ейлера – лінія, що з'єднує центри центру ваги, центру ваги і центру кола, вписаного в трикутник;

- 9-точкове коло (коло Ейлера) – коло, в якому існує основа з трьох висот, середини трьох сторін і середини трьох відрізків, що з'єднують вершини і центр ваги будь-якого трикутника.

Трикутник – це багатокутник з  $n = 3$  (три кути і три сторони). Сторони і

кути трикутника є основними елементами трикутника. У трикутнику більша сторона знаходиться навпроти більшого кута, а менша сторона – навпроти меншого кута.

Трикутник повністю визначається одним з трьох основних елементів: трьома сторонами, однією стороною і двома кутами або двома сторонами і кутом між ними. Це і є рівняння трикутника. Більше того, для існування трикутника з трьома сторонами  $a$ ,  $b$  і  $c$  необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності, які називаються нерівностями трикутника:  $a + b > c$ ,  $a + c > b$ ,  $b + c > a$ , де  $a$ ,  $b$  і  $c$  - сторони трикутника [12].

Математика - складна наука, яка вимагає вміння запам'ятовувати та опановувати велику кількість формул. Знайдіть площу трикутника  $abc$ . З чого почнемо?

Площа є однією з основних властивостей геометричних фігур і величиною, яка визначає розмір поверхні.

Площу простої геометричної фігури можна знайти двома способами:

- 1) Підрахувати кількість одиничних квадратів, які може займати фігура;
- 2) За допомогою відповідної формули.

Виділіть задані (тип трикутника, задані елементи тощо) – підберіть відповідну формулу, яка дозволяє знайти відповідь на основі початкових даних.

Тепер виділимо найпоширенішу формулу для відповіді на питання, як знайти площу трикутника.

Ця формула, хоч і проста, але може бути використана тільки в тому випадку, якщо висоту можна легко визначити. Наприклад, людина, яка вивчає трикутну місцевість, може визначити площу, вимірявши довжину кожної сторони, не знаючи висоти.

Третьокласники вивчають таку теорему: «Площа трикутника дорівнює половині добутку будь-яких двох сторін на синус кута між ними».

Форма трикутника однозначно визначається трьома його сторонами. Тому, щоб обчислити площу, достатньо знати довжини сторін. Цю задачу Герон виконав на відмінно. Формула Герона красива, симетрична, зручна, легко запам'ятовується і дійсно красива! Історія її народження теж цікава. Її називають на честь Герона Александрійського (Старшого), що не зовсім природно, адже вперше її відкрив і продемонстрував Архімед. Бо саме Архімед вперше відкрив і продемонстрував її. А Герон включив цю формулу до своєї праці «Метрика» лише через чверть століття. Всі перераховані вище формули вивчаються на уроках геометрії у 8-му та 9-му класах. Однак деякі з них не зустрічаються в підручниках.

Отже, числові трикутники є потужним інструментом в математиці, що дозволяє ефективно вирішувати широкий спектр задач, особливо в комбінаториці та теорії чисел. Вони не лише допомагають глибше зрозуміти математичні закономірності, але й сприяють розвитку аналітичного та логічного мислення.

Вивчення таких трикутників, як трикутник Паскаля та Фібоначчі, розширює знання учнів про взаємозв'язки між числами і відкриває нові можливості для дослідження математичних структур.

## **1.2 Комбінаторні властивості числових трикутників**

Комбінаторна теорія чисел вважається важливою галуззю математики та вивчає комбінаторні властивості чисел і послідовностей [1].

Застосування цієї галузі математики можна знайти в різних галузях, включаючи криптографію, теорію графів, теорію алгоритмів та інформатику[2].

Одним із ключових аспектів комбінаторної теорії чисел є ділення на суми натуральних чисел. Ця тема є основою для багатьох комбінаторних проблем, пов'язаних із тим, як охопити конкретні області, перестановки елементів та інші комбінаторні об'єкти.

Один із способів розділити натуральне число  $n$  на суму – це записати його

у вигляді суми послідовних натуральних чисел. Наприклад, 4 можна поділити на суму  $1+2+1$ , а 6 можна поділити на  $2+4$ . Інший спосіб розбити натуральні числа на суми – це використання теорії твірних функцій.

Твірна функція – це формальний степеневий ряд, який містить інформацію про набір цілих чисел. Твірні функції можна використовувати для отримання комбінаційної формули, яка обчислює кількість натуральних чисел, поділену на їх суму.

Для обчислення кількості поділок натуральних чисел на суму найчастіше використовують формулу Каталона [3].

Ця формула має наступний вигляд:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-x^i}$$

Де  $P(n)$  – це функція, що показує кількість розбиттів числа  $n$  на суму, а  $x^i$  – це змінна, яка вказує, скільки разів додане ціле число  $i$  входить до розбиття. Формула Каталона заснована на рекурсивній формулі для підрахунку ділень, відкритій французьким математиком Еженом Каталаном.

Ця формула дуже корисна при розв'язуванні різноманітних задач з комбінаторики. Це особливо корисно для обчислення кількості сум ділень чисел у теорії чисел, комбінаториці та теорії графів. Він широко використовується в наукових дослідженнях, пов'язаних з теорією чисел і комбінаторикою, дозволяючи швидко і ефективно обчислювати кількість поділок чисел на їх суму.

Це важливий крок у багатьох проблемах у цих областях математики. Прості числа та їх розподіл Іншим важливим аспектом комбінаторної теорії чисел є прості числа та їх розподіл [4].

Прості числа є найосновнішим структурним елементом теорії чисел. Їх не можна розкласти на добуток 1 і числа, відмінного від нього самого.

Вивчення розподілу простих чисел серед натуральних чисел є однією з центральних проблем теорії чисел і має велике значення в криптографії, теорії

алгоритмів та інших областях інформатики. Одним із способів дослідження розподілу простих чисел є використання так званих «лінійних дільників». Ідея полягає в тому, що всі натуральні числа можна записати у вигляді добутку простих чисел.

Такий підхід дозволяє досліджувати розподіл простих чисел у певному діапазоні натуральних чисел. Інший підхід полягає у використанні так званих «простих користувачів».

Цей метод дозволяє досліджувати розподіл простих чисел, аналізуючи поведінку простих чисел на числовій прямій і відстань між сусідніми простими числами.

Існує формула для функції розподілу простих чисел. Запропонований Леонардом Ейлером у 1737 році. Це одна з найвідоміших формул у теорії чисел. Використовується для опису поведінки функції  $\pi(x)$ , яка повертає кількість простих чисел, менших або рівних  $x$  [9, с. 231].

Комбінаторна теорія чисел є важливою галуззю математики із застосуванням у багатьох галузях.

Обидва аспекти мають велике значення в криптографії, теорії алгоритмів та інших областях інформатики. Вивчення цих питань дає змогу розв'язувати складні комбінаторні задачі та робити висновки про поведінку числових послідовностей.

### **1.3 Комбінаторні методи вивчення числових трикутників у школі**

Комбінаторні методи є важливою складовою у вивченні числових трикутників у шкільному курсі математики, оскільки вони дозволяють учням глибше зрозуміти та засвоїти фундаментальні принципи упорядкування і вибору, що лежать в основі багатьох математичних задач. Числові трикутники, зокрема трикутник Паскаля, є наочними прикладами того, як комбінаторні методи можуть

бути застосовані для виявлення взаємозв'язків між числами, розв'язання комбінаторних задач і дослідження симетрій.

Використання комбінаторних методів у вивченні числових трикутників допомагає учням зрозуміти, як формуються біноміальні коефіцієнти, що є основою багатьох теорем і законів у математиці. Також ці методи дозволяють наочно продемонструвати принципи комбінаторики, такі як перестановки, комбінації, розбиття множин, що сприяє більш глибокому розумінню матеріалу.

Застосування числових трикутників у шкільній комбінаториці не лише полегшує процес навчання, але й розвиває в учнів логічне мислення, уміння бачити структури та закономірності, що є важливими навичками для подальшого вивчення математики та інших наук. Використовуючи комбінаторні методи, учні навчаються вирішувати задачі різного рівня складності, що підвищує їхню математичну грамотність і готовність до опанування складніших тем [11].

Таким чином, комбінаторні методи вивчення числових трикутників у школі є ефективним підходом до формування математичних компетентностей, що включає як теоретичні знання, так і практичні навички. Це дозволяє забезпечити якісну підготовку учнів і сприяти їхньому всебічному розвитку в галузі математики.

Трикутник Паскаля, названий на честь Блеза Паскаля, не є звичайним геометричним трикутником з трьома кутами і трьома сторонами. Важлива таблиця чисел, яку можна використовувати для вирішення деяких комп'ютерних задач, називається трикутником Паскаля. Трикутник Паскаля був добре відомий до 1653 року, року видання знаменитого «Трактату про арифметичні трикутники». Цей трикутник відтворено на обкладинці підручника з арифметики, написаного на початку 16 століття астрономом з Інгольштадтського університету Петром Апіаном. Цей трикутник також зображено в книзі китайського математика, виданій у 1303 році. Омар Хайям, відомий не тільки як філософ і поет, але і як математик, дізнався про існування трикутника близько 1100 року, запозичивши його з давньокитайських або індійських джерел. Мартін Гарднер у своїй книзі



«Математичні романи» пише: «Трикутник Паскаля настільки простий, що його може написати навіть десятирічна дитина. Водночас вона приховує нескінченні скарби та поєднує різні аспекти математики, які на перший погляд не мають нічого спільного. Ці незвичайні властивості дозволяють вважати трикутник Паскаля однією з найскладніших діаграм в математиці» [14, с. 321].

Ці незвичайні особливості роблять трикутник Паскаля однією з найскладніших фігур у математиці. Форма трикутника має прихований і глибокий символізм. З цієї причини стародавні єгиптяни обрали цей трикутник як символ вічності і малювали його на своїх пірамідах. Схожу форму має містичний масонський символ, намальований Миколою Реріхом на звороті купюри в 1 долар (піраміда з 13 сходинками і всевидячим оком на вершині). У математиці знаменитий трикутник Паскаля є глибоким символом піраміди.

Числові трикутники є потужним інструментом у комбінаториці, забезпечуючи ефективний спосіб обчислення комбінацій та ймовірностей, а також розв'язання різноманітних комбінаторних задач. Одним з найвідоміших числових трикутників є трикутник Паскаля, який використовується для розв'язання багатьох комбінаторних задач [13, с. 54].

Ось кілька основних способів застосування числових трикутників у комбінатиці:

Трикутник Паскаля є основним інструментом для обчислення біноміальних коефіцієнтів, які представляють кількість способів вибору ( $k$ ) елементів з ( $n$ ) без урахування порядку. Число в ( $n$ )-му рядку та ( $k$ )-му стовпці трикутника Паскаля дорівнює. Це спрощує обчислення при розв'язанні задач на комбінації.

Трикутник Паскаля допомагає в розкладі біноміальних виразів  $(x+y)^3$ . Коефіцієнти при кожному члені розкладу відповідно до  $(n)$ -го рядка трикутника. Наприклад, для виразу  $((x + y)^3)$  розклад буде:  $(x+y)^3 = (03)x^3 + (13)x^2y + (23)xy^2 + (33)y^3$ .

Це ілюструє, як біноміальні коефіцієнти впливають на алгебраїчні вирази.

Трикутник Паскаля також використовується для обчислення ймовірностей у комбінаторних задачах. Наприклад, для визначення ймовірності певного результату при кількох випадкових подіях (наприклад, кількість орлів при киданні монет) можна використовувати числові трикутники для обчислення відповідних комбінацій.

Числові трикутники, такі як трикутник Фібоначчі та тричленний трикутник, допомагають в аналізі числових послідовностей і закономірностей. Трикутник Фібоначчі, наприклад, використовує послідовність Фібоначчі для обчислення певних чисел у тричленному форматі, що допомагає в розв'язанні задач на рекурентні послідовності.

Трикутники можуть бути використані для вирішення рекурентних рівнянь, де кожен наступний член послідовності залежить від попередніх. Наприклад, тричленний трикутник може допомогти знайти значення у послідовностях, де кожен термін є комбінацією попередніх термінів[16].

Трикутники також допомагають досліджувати симетричні властивості чисел. Наприклад, симетрія в трикутнику Паскаля дозволяє спостерігати, як числа розподіляються і повторюються, що є важливим для розуміння властивостей комбінаторних структур.

Застосування числових трикутників у комбінатиці не лише спрощує обчислення і розв'язання задач, але й допомагає краще зрозуміти фундаментальні математичні принципи. Це дозволяє розвивати аналітичне мислення та навички вирішення складних комбінаторних проблем.

Трикутник Паскаля також можна використовувати для обчислення ймовірностей у задачах на випадкові події. Наприклад, для обчислення ймовірності того, що при киданні декількох монет буде певна кількість орлів або решок, можна знайти відповідний біноміальний коефіцієнт[20, с. 21].

Знання про числові трикутники, зокрема трикутник Паскаля, надає учням потужний інструмент для розв'язання задач у комбінаториці та алгебрі. Вони допомагають спростити обчислення, виявити закономірності та забезпечити глибше розуміння математичних структур.

### **Висновки до розділу 1**

Теоретичні основи вивчення числових трикутників становлять важливий компонент математичної освіти, оскільки вони забезпечують розуміння базових принципів, на яких ґрунтуються багато математичних концепцій і структур. Числові трикутники, такі як трикутник Паскаля, є ключовими об'єктами комбінаторики, алгебри та теорії чисел. Вони наочно демонструють зв'язки між елементами числових послідовностей, біноміальними коефіцієнтами та іншими важливими математичними поняттями.

Вивчення числових трикутників дозволяє глибше зрозуміти принципи симетрії, рекурентні співвідношення, а також механізми побудови й аналізу математичних моделей. Теоретичний аналіз цих структур розкриває їхні внутрішні закономірності та зв'язки з іншими областями математики, що сприяє більш систематичному та цілісному підходу до їх вивчення.

Таким чином, теоретичне вивчення числових трикутників не лише сприяє зміцненню математичної культури учнів, але й закладає основи для розуміння більш складних математичних теорій та їх застосування. Це допомагає формувати фундаментальні знання, необхідні для подальшого успішного навчання в математиці та інших точних науках.

## **РОЗДІЛ 2 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ ТРИКУТНИКІВ**

### **2.1 Застосування числових трикутників у розв'язуванні задач**

Числові трикутники, такі як трикутник Паскаля, є потужним інструментом у розв'язуванні різноманітних математичних задач, зокрема в комбінаториці, алгебрі, та теорії чисел. Їхнє використання дозволяє ефективно знаходити рішення до задач, пов'язаних з комбінаціями, біноміальними коефіцієнтами, ймовірностями та іншими математичними поняттями.

Одним з ключових застосувань числових трикутників є розв'язання задач на обчислення комбінацій. Трикутник Паскаля наочно демонструє значення біноміальних коефіцієнтів, що полегшує обчислення кількості способів вибору підмножин з даної множини. Наприклад, значення в комірці трикутника дорівнює кількості способів вибору певної кількості елементів з множини, що часто використовується в задачах на комбінаторні підрахунки [32].

Також числові трикутники використовуються у задачах, пов'язаних з розкладанням біномів. Коефіцієнти в розкладі степеня біному можна безпосередньо знайти, використовуючи відповідні рядки трикутника Паскаля, що значно спрощує процес розв'язання таких задач.

Крім того, числові трикутники допомагають у задачах, пов'язаних з ймовірністю. Вони дозволяють швидко і наочно розраховувати ймовірності в задачах на кидання монет, розподіл об'єктів та інших ситуаціях, де ймовірності залежать від кількості способів досягнення певного результату.

Таким чином, числові трикутники є важливим інструментом у розв'язуванні широкого спектра математичних задач. Їхнє використання не лише полегшує процес обчислень, але й сприяє глибшому розумінню фундаментальних математичних принципів, що допомагає учням розвивати аналітичне мислення та підвищувати рівень математичної грамотності [33, с. 43].

На шкільних уроках математики зручно використовувати комбінаторну діаграму та її різновиди, і таке використання не потребує багато часу та зусиль для підготовки.

Діаграми заповнюються при введенні комбінаторних структур і потім дуже легко використовуються для розв'язування задач.

Крім введення графічних схем, ці автори пропонують методи і прийоми для побудови поняття «впорядкованих» і «невпорядкованих» множин.

Для розв'язання комбінаторної задачі на обчислення кількості альтернатив вибору або виконання дії з заданої таблиці необхідно відповісти на наступні питання (у вказаному порядку): (Ні).

- ☐ Упорядковані чи неупорядковані множини є проблемною моделлю?
- ☐ Чи допускаються повторювані елементи?
- ☐ Наскільки велика вибірка буде відібрана (визначте  $n$ )?
- ☐ Знайдіть відповіді на всі запитання в таблиці.

Завдання 1.

Скільки потрібно видати словників, щоб можна було здійснювати прямий переклад однієї з п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, китайської?

Рішення.

Такий словник, як німецько-англійський (Н-А), формується шляхом вибору двох елементів (мов)  $H$  і  $A$  з набору  $\{U, A, F, H, K\}$ .

Тут  $k = 2$  і  $n = 5$ .

Es Es Зрозуміло, що словники Н-А та А-Н різні, тому словники А-А чи У-Х не потрібні, тому маємо впорядкований набір, який не допускає повторення.

За даними таблиці знаходимо шукану формулу  $20 \cdot 2 \cdot A_5 = \square$ .

В умову проблеми внесено невелику зміну.

Іншими словами: Кількість словників має бути зведена до мінімуму, а переклади не завжди прості, що робить використання таблиць незручним, але в більшості випадків не викликає особливих труднощів у студентів.

Однак, оскільки моделі наборів проблем можна побудувати різними способами, використання таблиць може бути реалізовано різними способами, якщо це можливо [34, с. 143].

Розглянемо такий приклад.

Питання 2: У країні немає двох людей з однаковим набором зубів. Яка максимальна кількість жителів (не більше 32) у цій країні? Розв'язання Перший спосіб. Довжина 32 111001.... 101 можна побудувати порядкову структуру виду ....101. Зрозуміло, що тут є повторення (вибираємо елементи  $k = 32$  з елементів 0 і 1 з  $n = 2$ ) і знаходимо шуканий вираз у таблиці  $k \times k \text{ An } \square n$ , отримуючи відповідь 32 32 A2  $\square 2$ . Другий спосіб. Тут ми використовуємо неупорядковану множину елементів виду  $\{1, 3, \dots, 32\}$ , будемо використовувати неупорядковані множини виду  $\{1, 3, \dots, 32\}$ . Для створення множини такого вигляду потрібно з  $n = 32$  елементів вибрати  $k = 0, 1, 2, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$ . Вибираємо 33 рази кількість елементів з 32, 0-зубців, 1-зубців, ..., ..., ..., ... підраховуючи кількість 32-зубцевих елементів. Таким чином, кількість мешканців за законом сум дорівнює кількості 32-елементних множин  $\{1, 2, \dots, 32\}$ , що дорівнює кількості всіх підмножин множини  $\{1, 2, \dots, 32\}$ . Це набуває вигляду:  $\square \square 32 32 1 32 0 \text{ c}32 \square \text{c} \square \dots \square \text{C} \square 2$ . Однак остання тотожність потребує доведення [35, с. 121].

Таким чином, комбінаторні задачі моделюються множинами. Ці множини можуть бути (і часто є) структурами (комплексами), які є частиною схеми. При розв'язуванні задачі найскладнішою проблемою є саме ця проблема, а саме з'ясування того, яка структура змодельовала задачу. Або множина/модель побудована неоднозначно (як у задачі 2), або множина не відповідає жодній сполуці у схемі. Складність комбінаторних задач полягає в побудові самої моделі, тобто множини, а не в процесі з'ясування того, чи є множина, що моделює задачу, впорядкованою або неупорядкованою, і чи допускає ця структура повторення. Наступний приклад показує, що визначення множини, яка моделює задачу,

з'ясування її впорядкованості чи неупорядкованості, а також того, чи повторюються її елементи, не гарантує успішного розв'язання задачі.

Транспортна мережа міста побудована таким чином, що кожен маршрут містить рівно  $n$  зупинок, а будь-які два маршрути мають одну спільну зупинку і можуть їхати від будь-якої зупинки до будь-якої без пересадок. Скільки всього маршрутів у цій мережі? Щоб відповісти на це питання, множину (усіх зупинок, кількість яких  $k$  невідома)  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ , потрібно порахувати, скільки  $n$ -елементних підмножин  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$  має множина  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ . Очевидно, що це неупорядковані множини, які не містять повторень. Однак підрахувати кількість таких підмножин досить складно, тому таблиця тут не є безпосередньо корисною [36, с. 33].

Вивчення комбінаторики в школі можна почати з об'єднувальної схеми, заповненої «шкільними» комбінаціями. Після введення комбінацій, незнайомих зі шкільного курсу (перестановки та комбінації з повтореннями), корисно познайомити студентів зі способом доведення формул для підрахунку кількості таких комбінацій, який полягає в інтерпретації заданої комбінації як послідовності нулів та одиниць. Заповнюючи таблицю, учні можуть перевірити залишкові знання з комбінаторики, вміння користуватися формулами та виправити їх у разі потреби. Як правило, шкільні знання з комбінаторики швидко повертаються в пам'ять і не виникає непорозумінь щодо властивостей сполук (порядок, повторення).

Труднощі частіше виникають при з'ясуванні питань порядку/послідовності в конкретних завданнях і практичних ситуаціях. Корисно поєднувати перевірку залишкових знань після вивчення комбінаторики в школі з підготовкою понять за спеціалізацією шляхом розв'язування компетентнісних та прикладних задач відповідно до спеціалізації учня. У завданнях можна познайомити учнів з деякими поняттями, що вивчаються в їхній спеціалізації, шляхом введення простих означень у формулюваннях завдань.

Задача 4. Кодове слово довжини  $m$  є двійковим числом з  $m$  бітів. Відстань Хеммінга  $d(a, b)$  між кодovими словами - це кількість позицій, у яких ці слова відрізняються. Наприклад, відстань між словами  $a = 01101$  і  $b = 00111$  дорівнює 2. Для розв'язання цієї задачі використаємо невпорядковану структуру  $k C_n$ : з  $n = 6$  позицій виберемо  $k = 3$ , щоб замінити символ 0 або 1 на його протилежність, так що залишиться 3 слова  $C_6$ . У рамках цього питання ми також можемо використовувати впорядковану структуру, задаючи питання «Скільки існує кодових слів заданої довжини?» або «Скільки існує кодових слів довжини 5, які не містять двох нулів?». Для відповіді на останнє питання таблиці вже недостатньо. Наведемо ще дві задачі, безпосередньо пов'язані з інформатикою.

Задача 5. Якщо є п'ять DVD-дисків по 4,7 Гб, три DVD-диски по 1,4 Мб і три CD-диски по 700 Мб, скількома способами можна записати на диск 10 Гб інформації? Питання 6: Паліндром (від грец. *πάλιν* «назад, знову» і *δρομος* «бігти») – це послідовність літер, яка читається однаково зліва направо і справа наліво. Наприклад, 1230321. Скільки 11-значних паліндромів містять лише одну цифру? Скільки існує бітових рядків довжиною  $n$ ? Підбір прикладних та компетентнісних завдань є досить кропіткою та складною справою і вимагає співпраці з науковим відділом. Однак розв'язування таких задач заохочує студентів до вивчення комбінаторики. У цьому випадку можна запропонувати заповнити наступну таблицю і використовувати її при розв'язуванні задач.

Цю таблицю слід заповнювати і використовувати в процесі розв'язування задач на практичних заняттях, а не роздавати студентам вже заповнену на лекціях. У третьому пункті слід зазначити, що «кількість частинок у комірці не обмежена» або що «у першій комірці знаходиться  $n_1$  частинок, у другій комірці -  $n_2$  частинок, у третій комірці - . . . і  $n_k$  частинок у  $k$ -й комірці» [34, с. 143].

Таблицю також можна розширювати, додаючи інші умови, залежно від корисності тієї чи іншої комбінаторної задачі для подальших досліджень у дисциплінах, пов'язаних з комбінаторикою. Всю таблицю можуть заповнити лише



деякі спеціальності комп'ютерних наук, оскільки не всі спеціальності матимуть необхідні знання про числа Стірлінга другого роду  $S(n, k)$  та числа Белла [42].

Оскільки число  $P(n, k)$  дорівнює кількості способів записати натуральне число у вигляді суми ненульових натуральних чисел, визначених за інкрементною формулою, відповідна позиція в таблиці зазвичай не заповнюється. Іноді учням доводиться звертатися до чисел, які згадуються на уроках програмування. Постійне використання таблиць при розв'язуванні задач допомагає учням розвивати навички абстрагуватися від конкретного змісту задачі і бачити в ній комбінаторну структуру, і навпаки, бачити істину за всіма абстракціями. Ці навички необхідні для побудови математичних моделей реальних явищ. Практика показує, що друга таблиця має більше таких можливостей. Об'єднані схеми ефективні тоді, коли предмет другої таблиці знайомий, тобто коли сформовані навички використання комбінованих структур. Як зазначалося вище, не всі задачі, навіть в останній таблиці, можна розв'язати єдиним методом. Тому потрібні інші методи [44].

Це метод створення (виробничої) функції, метод кругового зв'язку та метод локусів. Кожен метод зазвичай є частиною стандартної навчальної програми з дискретної математики, і кожен метод повинен бути пов'язаний з курсом математики вищого порядку, зазвичай йому передують суміжний предмет. Таким чином, учні можуть зрозуміти породжуючі функції послідовностей та їх застосування при вивченні рядів [43].

Вивчення методу локусів починається з введення геометричної інтерпретації коефіцієнтів бінома. При цьому питання про те, якій підмножині (комбінації) відповідає та чи інша траєкторія, не розглядається в жодному посібнику чи підручнику. З'ясування цього питання допомагає учням розвивати навички математичного моделювання. Наприклад, при підрахунку кількості найкоротших прямих, що з'єднують точки  $(0, 0)$  і  $(k, n - k)$ , зверніть увагу на те, що для побудови прямої з  $n$  відрізків потрібно вибрати  $k$  горизонтальних ( $n - k$  вертикальних) відрізків, що можна зробити  $k C_n (n - k C_n - k)$  способами.

Отже, число ламаних дорівнює числу комбінацій  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Якщо кожній ламаній поставити у відповідність послідовність із  $n$  нулів і одиниць (вправо – 0, вгору – 1), а також нехай одиниця на  $s$ -му місці означатиме, що елемент  $a_s$  множини  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  увійшов до її  $k$ -елементної комбінації, то ламаній 01101...10...000100, зображеній на рис. 1 відповідатиме комбінація  $\{a_2, a_3, a_5, \dots, a_{n-3}\}$ . Замінімо шкалу на осі  $Ox$ , як показано на рис. 2, і наявність вертикальних ланок над елементом нехай означає входження елемента у комбінацію (з повтореннями) стільки разів, яку довжину має ланка ламаної над цим елементом. Ламаній на рис. 2 відповідатиме комбінація  $\{a_2, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}\}$ . Учень пропонується довести взаємно однозначну відповідність між траєкторіями та комбінаціями з повтореннями. Оскільки очевидна взаємно-однозначна відповідність траєкторій на рисунках 1 і 2, то маємо такий наслідок:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ , або у більш звичному записі  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ . Локус, що показує біноміальний коефіцієнт, має бути найкоротшим. Якщо відкинути вимогу, щоб лінії йшли найкоротшим шляхом, і «дозволити» їм йти вниз (але не вліво вздовж осі  $Ox$ ), не перетинаючи прямокутник (розміром  $n \times (q-1)$ ), то ми отримаємо геометричну ілюстрацію повторної вибірки. Дійсно, для кожної ламаної лінії у вигляді гістограми висота  $s$ -го стовпчика дорівнює цифрі в  $s$ -й позиції числа, що відповідає  $n$  цифрам у  $q$ -десятковій системі числення [45].

Досвід показує, що аналіз геометричної інтерпретації комбінацій і патернів сприяє глибшому розумінню цієї концепції та розвитку навичок математичного моделювання. Учні, які використовують моделі, символи або зображення реальних об'єктів, розвивають абстрактне мислення, необхідне для математичного моделювання. Однак це не єдина мета вивчення комбінаторики. Наразі серед педагогів та психологів немає єдиної думки щодо категорії «математичне мислення». Існує багато досліджень, присвячених його формуванню у школярів та майбутніх фахівців. Кожен автор дає власне визначення математичного мислення та пропонує відповідні методики його формування. Однак деякі автори заперечують

навіть існування самого поняття математичного мислення, через що такі вчені, як Л.М. Фрідман та З.І. Слєпкань, вважали термін «математичне мислення» штучним. Цікаво відзначити, що відомий математик і фізик-теоретик Герман Вейль дав визначення математичного мислення (на відміну від суто математичного мислення).

Важко дати однозначну відповідь на питання, як пов'язані комбінаторне та математичне мислення і чи можна вважати геометричні міркування, що застосовуються для розв'язування комбінаторних задач, проявом чистого комбінаторного мислення (тобто лише «чистою комбінаторною можливістю»).

Ані комбінаторне, ані математичне мислення не обмежується здатністю розв'язувати суто математичні або суто комбінаторні задачі (особливо «класичні» задачі) та здобувати відповідні знання. Визнання «комбінаторної природи» ситуацій і перехід від реальних об'єктів до їхніх моделей є проявом того, що багато дослідників називають «комбінаторним мисленням». Чисті математичні знання, зокрема знання комбінаторики, можуть не бути передумовою для такого розуміння і трансформації [30].

Тим не менш, математика, і комбінаторика зокрема, є одним з найпотужніших інструментів для формування загального мислення. У психології більшість емпіричних досліджень розуму базуються на циклічних дисциплінах фізики та математики. Коли йдеться про формування комбінаторного мислення, ми розуміємо формування здатності учнів помічати «комбінаторність» (варіативність) у реальних життєвих ситуаціях та моделювати останні за допомогою відповідних комбінаторних структур, і навпаки, тобто формування здатності учнів бачити деякі реальні життєві ситуації в певній комбінаторній структурі.

Для цього рекомендується використовувати другу таблицю. Навчання комбінаторики у вищих навчальних закладах має бути спрямоване на розвиток комбінаторного мислення майбутніх фахівців та формування компетентностей, зазначених у відповідних освітньо-кваліфікаційних вимогах.

Викладання цього розділу математики в університетах має бути спрямоване на модифікацію знань і вмінь, набутих у шкільних курсах, та орієнтувати майбутніх фахівців на опанування спеціальних дисциплін і застосування прийомів використання комбінаторних структур у практичній діяльності.

## **2.2 Проектні та дослідницькі роботи для учнів**

Проектні та дослідницькі роботи є важливим елементом навчального процесу, особливо у математиці, де вони сприяють розвитку критичного мислення, творчого підходу до розв'язання задач і глибшого розуміння теоретичних концепцій. Для учнів, які вивчають числові трикутники та комбінаторику, можна запропонувати ряд проектних та дослідницьких завдань, які допоможуть їм застосувати отримані знання на практиці.

Учні можуть створити власний числовий трикутник, подібний до трикутника Паскаля, але з новими властивостями або правилом побудови. Наприклад, вони можуть розробити трикутник, де кожен елемент є сумою певної кількості попередніх елементів, або трикутник, що ілюструє іншу числову закономірність. Після розробки трикутника учні повинні описати його властивості, знайти цікаві закономірності і представити результати у вигляді звіту.

Учні можуть дослідити, як числові трикутники застосовуються в реальних ситуаціях, таких як в інженерії, економіці чи статистиці. Наприклад, вони можуть вивчити, як трикутник Паскаля використовується для обчислення ймовірностей в іграх або для моделювання фінансових сценаріїв. Результати дослідження повинні включати аналіз реальних прикладів і пояснення, як числові трикутники допомагають вирішувати практичні проблеми.

Учні можуть дослідити, як числові трикутники використовуються в культурі та мистецтві. Наприклад, вони можуть вивчити, як числові трикутники з'являються в архітектурі, живопису або музиці. Завдання включає створення презентації або

плакату, де представлено приклади використання числових трикутників у різних сферах культури та мистецтва, а також обговорення їх значення та впливу.

Учні можуть провести порівняльний аналіз різних числових трикутників, таких як трикутник Паскаля, трикутник Фібоначчі та трикутник Хартлі. Завдання включає опис властивостей кожного трикутника, виявлення спільних і відмінних рис, а також дослідження їх застосування в різних математичних задачах. Результати можна представити у вигляді звіту або презентації.

Учні можуть дослідити складні комбінаційні задачі і розв'язати їх за допомогою числових трикутників. Наприклад, вони можуть вирішити задачі, пов'язані з розподілом ресурсів, оптимізацією планів або іншими практичними сценаріями. Результати роботи повинні включати докладний опис розв'язання задачі, використані числові трикутники та їх роль у процесі розв'язання.

Учні можуть дослідити, як числові трикутники використовуються в комп'ютерних науках, зокрема в алгоритмах для обробки даних або криптографії. Завдання включає аналіз конкретних алгоритмів, де числові трикутники грають ключову роль, і розробку простого комп'ютерного додатку або програми, що використовує ці алгоритми. Результати дослідження повинні бути представлені у вигляді звіту або демонстраційного відео.

Учні можуть розробити математичні ігри або головоломки, що використовують числові трикутники. Завдання включає створення правил гри, розробку ілюстрацій або прототипу гри, а також тестування її на практиці. Учні повинні описати, як числові трикутники використовуються в грі, і які математичні навички розвиває гра.

Ці проектні та дослідницькі роботи сприяють розвитку критичного мислення, креативності та практичних навичок у учнів, дозволяючи їм глибше зануритися в світ комбінаторики та числових трикутників [39].

*Приклад уроку для 9 класу на тему «Вивчення числових трикутників та їх застосування у комбінаториці»*

Тема уроку: Вивчення числових трикутників та їх застосування у комбінаториці

Клас: 9

Мета уроку:

1. Ознайомити учнів з числовими трикутниками, зокрема, з трикутником Паскаля.
2. Розвинути навички застосування числових трикутників для розв'язання комбінаторних задач.
3. Формувати вміння використовувати числові трикутники для обчислення біноміальних коефіцієнтів та розв'язання задач на комбінації.

Обладнання:

- Таблиця з трикутником Паскаля
- Картки з комбінаторними задачами
- Плакат з властивостями числових трикутників
- Маркери, магніти, дошка

План уроку:

1. Організаційний момент (5 хв)
  - Привітання учнів.
  - Перевірка готовності до уроку.
  - Оголошення теми та мети уроку.
2. Введення в тему (10 хв)
  - Пояснення основних понять: числовий трикутник, трикутник Паскаля.
  - Показ таблиці з трикутником Паскаля на дошці.
  - Обговорення властивостей трикутника Паскаля (симетрія, рекурентні співвідношення, біноміальні коефіцієнти).
3. Основна частина (25 хв)
  - Завдання 1: Обчислення біноміальних коефіцієнтів

- Учні отримують картки із завданнями, де потрібно знайти значення біноміальних коефіцієнтів  $\binom{n}{k}$  за допомогою трикутника Паскаля.

- Обговорення результатів і відповідей з класом.

- Завдання 2: Розклад біноміального виразу

- Розкласти вирази  $(x + y)^3$  та  $(x + y)^4$  за допомогою чисел з трикутника Паскаля.

- Учні працюють у групах, записують результати на плакатах та представляють їх класу.

- Завдання 3: Задачі на комбінації

- Учням пропонуються задачі, де потрібно знайти кількість способів вибору елементів, наприклад: «Скількома способами можна вибрати 3 з 7 предметів?».

- Використання трикутника Паскаля для обчислення відповідей.

- Розв'язання задач та обговорення результатів.

#### 4. Теоретична частина уроку:

##### 1. Вступ до числових трикутників

Числові трикутники — це математичні структури, які дозволяють наочно відображати числові закономірності і зв'язки між числами. Один з найвідоміших числових трикутників — трикутник Паскаля.

##### 2. Трикутник Паскаля

Трикутник Паскаля — це двовимірна таблиця чисел, що складається з рядів, де кожен ряд представляє собою біноміальні коефіцієнти.

Конструкція трикутника Паскаля:

- Перший ряд трикутника Паскаля — це одиниці:  $(1)$ .

- Кожен наступний ряд формується шляхом додавання чисел з попереднього ряду. Наприклад, для створення другого ряду:  $(1 + 1 = 2)$ , отже, другий ряд виглядає як:  $(1 \ 2 \ 1)$ .

- Загальне правило: число в  $(n)$ -му рядку та  $(k)$ -му стовпці є сумою двох чисел, що стоять безпосередньо над ним у попередньому рядку. Формально це можна записати як:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$$

де  $C(n, k)$  — це біноміальний коефіцієнт.

### 3. Властивості трикутника Паскаля

- Симетрія: Трикутник Паскаля симетричний відносно середини кожного ряду. Це означає, що  $C(n, k) = C(n, n-k)$ .

- Початкові значення: Кожен ряд починається і закінчується одиницею.

- Сума рядка: Сума всіх чисел в  $(n)$ -му рядку дорівнює  $2^n$ .

- Біноміальні коефіцієнти: Кожне число в трикутнику Паскаля є біноміальним коефіцієнтом  $\binom{n}{k}$ , де  $(n)$  — номер рядка, а  $(k)$  — номер стовпця.

### 5. Практичне застосування (15 хв)

- Завдання 4: Задачі на ймовірність

- Обчислення ймовірностей у задачах на основі числових трикутників. Наприклад: «Яка ймовірність того, що при киданні 4 монет, 2 з них покажуть орел?»

- Обговорення отриманих результатів і порівняння з теоретичними очікуваннями.

### 6. Заключна частина (5 хв)

- Підведення підсумків уроку.

- Обговорення, що нового учні дізналися про числові трикутники.

- Домашнє завдання: розв'язати кілька комбінаторних задач, використовуючи числові трикутники, та підготувати короткий звіт про результати.

### 7. Рефлексія (5 хв)

- Запитати учнів про те, що було зрозуміло, що викликало труднощі.

- Оцінка роботи учнів під час уроку.



Домашнє завдання:

1. Розв'язати кілька задач на обчислення біноміальних коефіцієнтів і комбінацій, використовуючи трикутник Паскаля.
2. Розкласти вираз  $((x + y)^5)$  і проаналізувати отримані результати.

Оцінювання:

- Оцінювати учнів за правильність виконання завдань.
- Враховувати активність під час обговорення і групової роботи.
- Оцінити домашнє завдання за його точність та обґрунтованість.

Додаткові завдання:

Завдання 1. «Інтелектуальна розминка»

за кожную правильну відповідь учень ставить собі у картку 1 бал

“Доповни речення”

Трикутник це фігура, що складається...

Будь-яка сторона трикутника...

Залежно від міри кутів, трикутники поділяються на такі види..

Залежно від довжин сторін, трикутники поділяються на такі види..

Теорема про суму суміжних кутів читається так...

Теорема про вертикальні кути читається так...

Катет прямокутного трикутника, що лежить проти ...

У кожному трикутнику проти більшої сторони ...

Зовнішній кут трикутника дорівнює ...

У кожному прямокутного трикутнику гіпотенуза довша ...

У рівнобедреному трикутнику ..

У рівносторонньому трикутнику...

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то...

Результативність заносимо в картку самоконтролю

Завдання 2.» Робота в парах»

## Геометричне лото

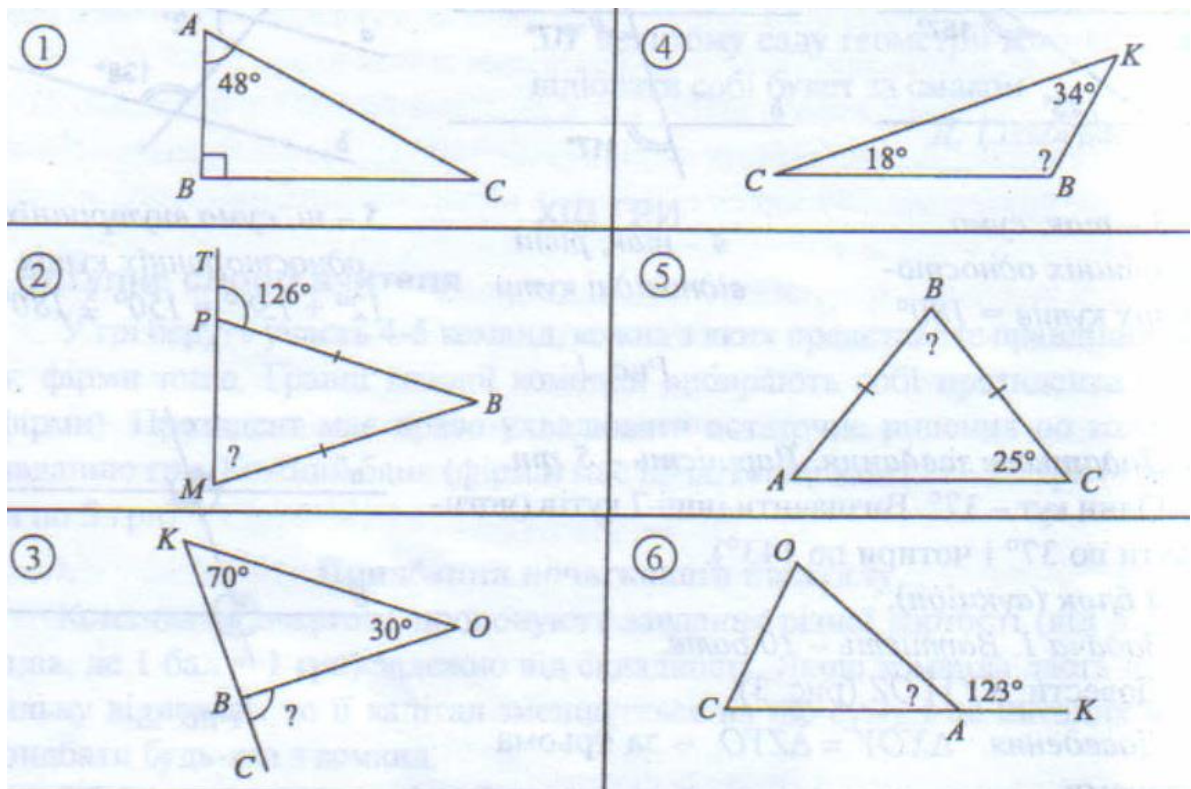


Рис. 2.1

1.  $42^\circ$  2.  $54^\circ$  3.  $100^\circ$  4.  $128^\circ$  5.  $130^\circ$  6.  $57^\circ$

Удосконалення вмінь і навичок учнів:

Вся геометрія з часів «Начал» Евкліда спирається на «трьох китах» - трьох ознаках рівності трикутників. Давайте їх пригадаємо

Пригадайте за якими ознаками прямокутні трикутники рівні?

За кожну правильну відповідь учень ставить собі у картку 1 бали всього 6 балів.

Завдання 3 «Історичне»:

*Трикутник* – одна з перших геометричних фігур, про властивості якої людство дізналося ще в давнину. Задачі про трикутник були знайдені у давньогрецьких папірусах, старовинних індійських книгах. У папірусі Ахмеса згадується про рівнобедрений і прямокутний трикутники, давні вавилоняни 4000 років тому вже знали про властивість кутів при основі рівнобедреного трикутника. Уже кілька тисяч років тому єгиптяни знали, що коли сторони трикутника дорівнюють 3, 4 і 5 одиничним відріzkам, то такий трикутник прямокутний. Землеміри Стародавнього Єгипту для побудови прямого кута ділили мотузку вузлами на 12 рівних частин і кінці зав'язували. Потім мотузку розтягували на землі так, щоб утворився трикутник зі сторонами по 3, 4 і 5 поділок. Більший із кутів утвореного трикутника – прямий. Ребра бічних граней єгипетських пірамід утворюють майже рівносторонні трикутники.

Геометрія з давніх-давен є наукою піднесеною, таємничою та романтичною, а пошук способів розв'язання геометричних задач завжди був творчим, дослідницьким процесом. Бо для розуму немає нічого неможливого.

Стародавні греки першими навчилися визначати відстань до кораблів в морі або до іншого недоступного предмета. Ознаки рівності трикутників здавна мали важливе значення в геометрії, оскільки доведення багатьох теорем зводиться до доведення рівності тих чи інших трикутників. Доведенням рівності трикутників займалися піфагорійці. Фалесу Мілетському приписують доведення II ознаки рівності трикутників. Цю ознаку Фалес використав для визначення відстані від берега до кораблів у морі.

Вважають, що його спосіб розв'язування цієї задачі був таким

Нехай С- точка берегу, А корабель у морі.

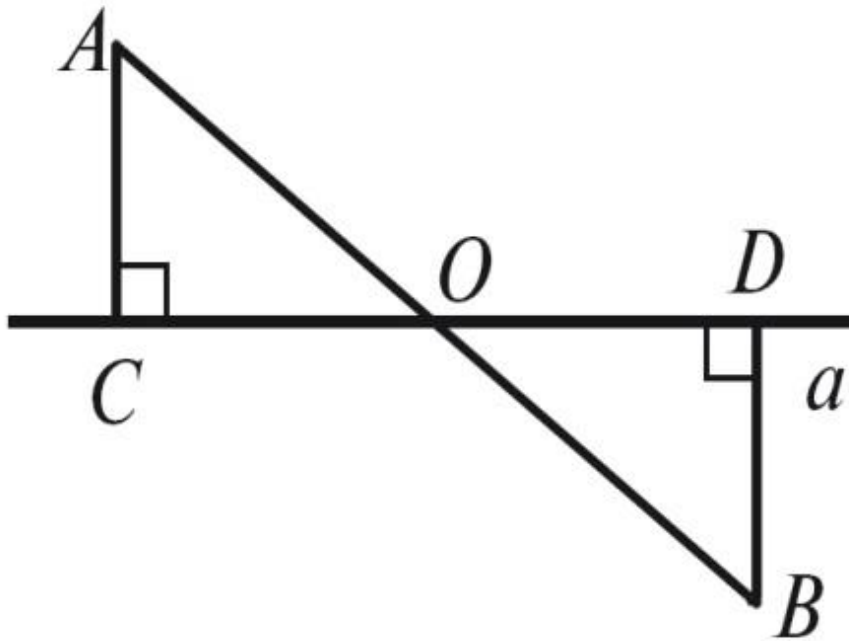


Рис. 2.2

Для визначення відстані  $AC$  на березі відкладають два рівних відрізки  $CO=OD$ . У точці  $D$  знов побудували прямий кут, причому спостерігач має йти перпендикуляром доти, доки не дійде до точки  $B$ , з якої корабель  $A$  і точку  $O$  буде видно так, ніби вони лежать на одній прямій. Прямокутні трикутники  $ACO$  і  $BDO$  рівні за катетом і гострим кутом. Отже  $AC=BD$ . А відрізок  $BD$  можна безпосередньо виміряти [40].

Після повідомлення цієї історичної задачі за готовими малюнками учням пропонуються аналогічні

Один мудрець сказав: «Двоє людей, які обмінюються золотими монетами, не стануть багатими, але якщо вони обмінюються думками, то кожен з них стане вдвічі багатшим. Тому що обидва стали мудрішими». Обмінюючись думками, люди отримують нові знання.

Завдання 4: «Містичне».

Люди здавна цікавилися будовою та властивостями трикутника. У релігії вважається, що трикутник символізує Бога, «верховного геометра». Згідно з Біблією, Бог триєдиний (Бог-Син, Бог-Отець і Бог-Святий Дух). Окрім трикутника, число три також вважається священним. *Отже трикутник буває любовний, бермудський, Паскаля, прямокутний, рівнобедрений, рівносторонній...*



Рис. 2.3

Учень. Бермудський трикутник – це район Атлантичного океану, де, як стверджується, відбуваються таємничі зникнення кораблів і літаків. Для пояснення цих зникнень були висунуті різні гіпотези – від екстремальних погодних явищ до викрадень інопланетянами. Вершинами уявного трикутника є Бермудські острови, Пуерто-Ріко і Маямі, штат Флорида. Регіон Бермудського трикутника вважався небезпечним для судноплавства ще з часів іспанського панування в Латинській Америці. Іспанські галеони, що перевозили золото і срібло з колоній, сходилися в Гавані і пливли через море до Іспанії. За оцінками, на морському дні в межах Бермудського трикутника лежить близько 1200 іспанських кораблів. Вони зазнали аварій під час літніх ураганів і зимових штормів, натрапили на рифи і піщані мілини

або були потоплені піратами. Останній корабель зник у Бермудському трикутнику у 2003 році.

*Колективне розв'язування задач на дошці.*

Для залізних дахів кут між кроквами беруть рівним  $120^\circ$ . Визначте довжину крокви, якщо відстань від стелі до найвищої частини (гребеня) її дорівнює 2,5м.

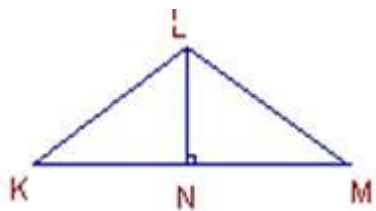


Рис. 2.4

Розв'язання

$L = 120^\circ$ , LN – висота, LN = 2,5м. Знайдемо KL.

$\triangle KLM$  – рівнобедрений, тому кут  $K = M = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ .

У  $\triangle KNL$  катет LN = 2,5м проти кута  $K = 30^\circ$  дорівнює половині гіпотенузи.

Отже,  $KL = 2 LN = 2 \cdot 2,5 = 5$  (м).

Відповідь: кроква має довжину 5м.

*Самостійне розв'язування задач учнів.*

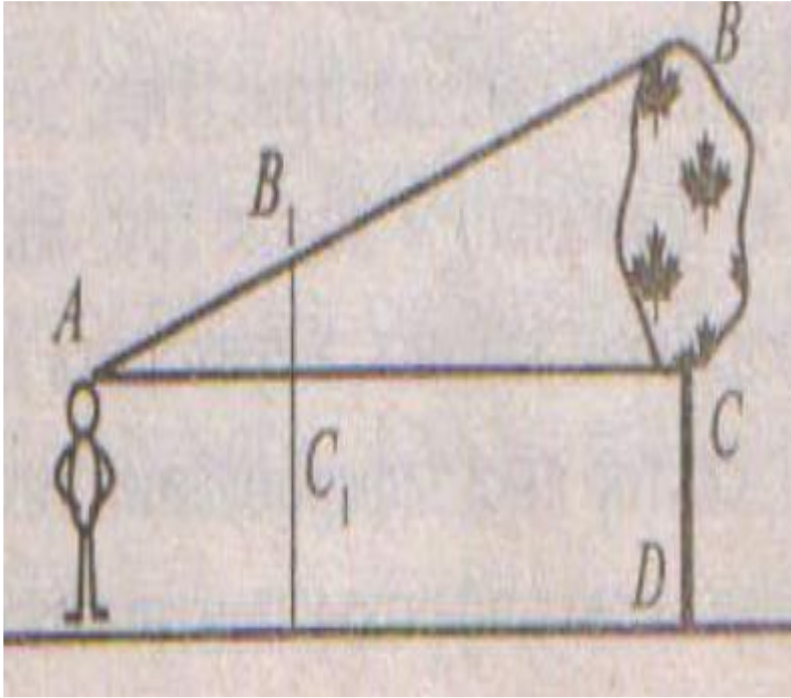


Рис. 2.5

Щоб виміряти висоту дерева ВД, що знаходиться біля річки виготовили прямокутний трикутник  $AB_1C_1$  з кутом  $A$  в  $45^\circ$ . Тримавши його вертикально, підійшли до дерева на таку відстань, щоб, дивлячись вздовж гіпотенузи  $AB_1$ , побачити вершину дерева  $B$ . Яка висота дерева? Якщо  $AC=5,6$ м, а ріст того, хто вимірює,  $1,7$ м ? Відповідь пояснити.

За відповідь 2 бали.

Отже, проектні та дослідницькі роботи, що включають використання числових трикутників, значно збагачують навчальний процес, пропонуючи учням можливість глибшого пізнання комбінаторики та розв'язання реальних задач. Вони сприяють розвитку критичного мислення, креативності і практичних навичок, а також дозволяють учням застосовувати теоретичні знання на практиці [6].

Розробка власних числових трикутників допомагає учням зрозуміти основи побудови та властивостей цих структур, а дослідження їх застосування у реальних ситуаціях забезпечує практичне розуміння математичних концепцій. Вивчення використання числових трикутників у культурі і мистецтві розширює горизонти

учнів, показуючи взаємозв'язок між математикою та іншими сферами людської діяльності.

### **2.3 Практичні завдання і вправи з використання числових трикутників засобами шкільної комбінаторики**

Числові трикутники, зокрема трикутник Паскаля, є важливим інструментом у шкільній комбінаториці. Вони дозволяють учням наочно вивчати та аналізувати числові закономірності, які лежать в основі багатьох математичних задач і теорем. Практичні завдання та вправи з використання числових трикутників допомагають зрозуміти складні концепції комбінацій, біноміальних коефіцієнтів і ймовірностей, спрощуючи процес їх навчання та засвоєння.

У шкільній математиці числові трикутники забезпечують основи для розв'язання широкого спектра комбінаторних задач. Трикутник Паскаля, зокрема, є корисним інструментом для обчислення біноміальних коефіцієнтів, що представляють кількість способів вибору елементів з певної множини. Це дозволяє учням на практиці застосовувати комбінаційні принципи, що важливо для розв'язання задач на комбінації та перестановки.

Застосування числових трикутників у практичних завданнях допомагає учням краще зрозуміти принципи розкладу біноміальних виразів. Наприклад, розклад виразу  $((x + y)^n)$  за допомогою трикутника Паскаля дозволяє учням спостерігати, як біноміальні коефіцієнти впливають на результат розкладу. Це розширює їх розуміння алгебраїчних виразів і формул.

Практичні завдання на основі числових трикутників також включають розв'язання задач на ймовірність. Вони допомагають учням зрозуміти, як ймовірності подій можна обчислювати, використовуючи комбінаційні підрахунки. Наприклад, завдання на ймовірність отримання певної кількості орлів при киданні монет можуть бути вирішені за допомогою чисел з трикутника Паскаля, що ілюструє практичне застосування комбінаторики [16, с. 133-138].



Окрім того, числові трикутники дозволяють учням досліджувати геометричні та симетричні властивості чисел. Це включає завдання, де потрібно виявити закономірності і симетрії в числових послідовностях, що розвиває аналітичне мислення та навички просторового уявлення. Ці вправи поглиблюють розуміння учнями властивостей числових структур.

Таким чином, практичні завдання та вправи з використання числових трикутників є ключовим елементом шкільної комбінаторики, що сприяє розвитку математичних навичок учнів. Вони не лише спрощують процес навчання складних концепцій, але й роблять його більш захоплюючим та інтерактивним, сприяючи глибшому усвідомленню і застосуванню математичних знань.

Метою вивчення комбінаторики є не запам'ятовування визначень чи формул для окремих типових завдань, а формування вмінь:

- Опишіть схему сортування (необов'язково), пов'язану з умовами комбінованої задачі.
- Встановіть взаємно унікальні відповідності між елементами, перерахованими різними схемами сортування, як у доказі останнього твердження теореми 2 і наступних доказах теорем 3 і 4.
- Будуйте та вирішуйте стосунки, що повторюються.
- Виражайте комбінаторне мислення точно та доступним для інших способом.

Учні повинні розуміти ці цінності як орієнтири для успішного навчання.

Теорема 3.

$$C_{nk} = C_{nn-k}$$

Існує однозначна відповідність між  $k$ -елементною підмножиною  $n$ -елементного набору та  $(n - k)$  елементним доповненням  $n$ -елементного набору.

Тому їх кількість однакова.

Теорема 4.

Рівняння  $k < n$  виконується, якщо  $0 < C_{nk} = C_{n-1, k-1} + C_{n-1, k}$  Доведення.

Нехай  $a$  — один з елементів  $n$ -елементної множини  $A$ .

Кількість усіх  $k$ -елементних підмножин у цьому наборі дорівнює кількості  $k$ -елементних підмножин, які містять цей елемент, плюс кількість  $k$ -елементних підмножин, які не містять цей елемент.

Перша підмножина формується шляхом поєднання  $\{a\}$  з  $(k - 1)$  підмножинами елементів, число яких дорівнює  $C_{n-1}^{k-1}$ , з  $(n - 1)$  множини елементів  $A \setminus \{a\}$ .

Набір, що залишився, формується шляхом вибору  $k$ -елементної підмножини з  $(n - 1)$  набору елементів  $A \setminus \{a\}$ , останнє число  $C_{n-1}^k$ . Таблицю, подану нижче, називають *трикутником Паскаля*.

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   |     |     |     |     |     |
| C10 |     | C11 |     |     |     |
| C20 |     | C21 | C22 |     |     |
| C30 |     | C31 | C32 | C33 |     |
| C40 | C41 | C42 | C43 | C44 |     |
| C50 | C51 | C52 | C53 | C54 | C55 |

Рис. 2.6

Всі крайні елементи цієї таблиці дорівнюють одиниці, а кожен її внутрішній елемент є сумою двох найближчих сусідів, розташованих над ним.

Перші рядки цієї таблиці мають такий вигляд:

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Рис. 2.7

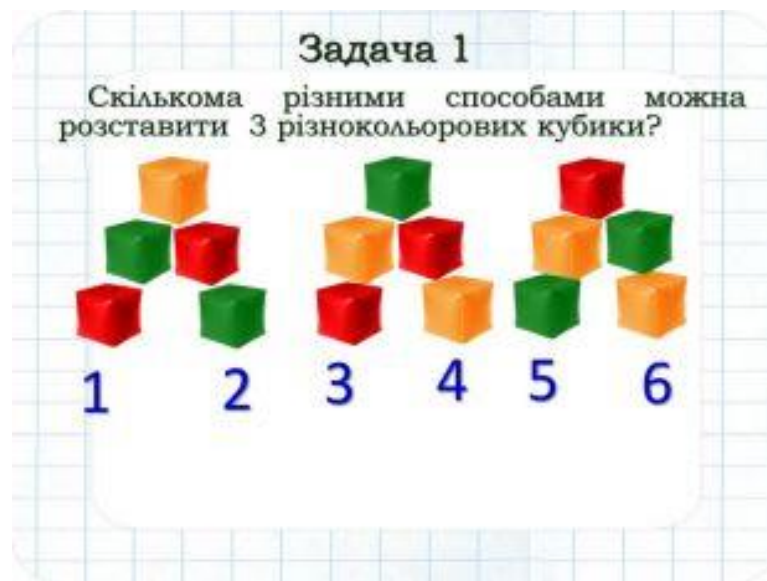


Рис. 2.8

Теорема 5. Для довільного натурального  $n$  та довільних числах  $a$  та  $b$

справджується така

рівність:  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ , яку

називають біномною формулою Ньютона.

Доведення. разів  $(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)$   $\underbrace{\hspace{1cm}}_n$  разів.

Якщо виконати всі дії множення, використовуючи розподільний закон, то отримаємо суму доданків вигляду  $a^{n-j}b^j$ . При утворенні кожного такого доданка беруть участь як співмножники  $a$  або  $b$  у кожній з дужок правої частини останньої рівності. Доданок  $a^{n-j}b^j$  виникає, якщо вибрати  $j$  разів співмножник  $b$  з  $n$  дужок, що можна зробити  $C_n^j$  способами.

Наслідок 1. Подавши  $(1 \pm 1)^n$  сумою доданків за допомогою біномної формули Ньютона, маємо:  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ ,  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} - 1 + (-1)^n C_n^n = 0$ . Перша рівність має прозоре комбінаторне тлумачення: кількість всіх підмножин  $n$ -елементної множини дорівнює сумі за індексом  $k$  у межах від 0 до  $n$  включно кількостей  $k$ -елементних підмножин.

Означення 2. *Перестановкою з повторенням називають скінченну послідовність, у якій значення елементів можуть збігатися. При загальній кількості значень  $k$  кількість різних перестановок з повторенням  $n_1$  разів першого значення,  $n_2$  разів другого значення, ...,  $n_k$  разів  $k$ -го значення позначають так:  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ .*

Якщо всі значення елементів послідовності різні, то ця кількість дорівнює  $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!$ . Інакше це значення потрібно поділити на добуток кількостей перестановок значень.

Маємо:  $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = (n_1 + n_2 + \dots + n_k)! / n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ .

Наприклад, перестановкою цифр числа 122333 можна отримати таку кількість різних чисел:  $(1+2+3)! / 1! \cdot 2! \cdot 3! = 60$ , включаючи й саме число 122333. Рекурентне співвідношення — це співвідношення (зазвичай рівність), яке виражає значення елемента деякої послідовності (з натуральними індексами) через значення елементів цієї послідовності з меншими індексами.

При наявності рекурентного співвідношення і відомих перших членах послідовності можна обчислити довільний член послідовності. *Ефективні алгоритми розв'язання задач з комбінаторики щодо пошуку кількості чи певного розташування зазвичай пов'язані з рекурентними співвідношеннями.* У доведенні теореми 2 неявно використано рекурентні співвідношення:

- $P_n = n \cdot P_{n-1}$  при  $P_1 = 1$ ;
- $A_{nk} = n \cdot A_{n-1, k-1}$  при  $A_{n1} = n$ .

Так само, як і неявно використано метод математичної індукції. Повністю коректне (з сучасної точки зору) доведення вимагає явного використання.

Очислення елементів (не одного, а наприклад, 10-го рядка) трикутника Паскаля на основі доведеного у теоремі 4 рекурентного співвідношення:  $C_{nk} = C_{n-1, k-1} + C_{n-1, k}$  при початкових значеннях  $C_{n0} = C_{nn} = 1$  ефективніше, ніж використання явної формули з факторіалами.

Вчитель пропонує учням використовувати трикутник Паскаля для знаходження значень біноміальних коефіцієнтів за допомогою трикутника Паскаля. Це завдання дозволяє учням на практиці застосувати методи обчислень, використовуючи числові трикутники.

Вчитель ставить завдання розкласти біноміальні вирази  $(x+y)^n$  для різних значень  $n$  за допомогою чисел з трикутника Паскаля. Учні повинні розкласти вирази  $(x+y)^3$  та  $(x+y)^4$  та  $(x+y)^4$ , представивши результат у вигляді суми з відповідними коефіцієнтами. Це допомагає учням краще зрозуміти зв'язок між біноміальними коефіцієнтами та алгебраїчними виразами [21, с. 216].

Учні отримують завдання розв'язати задачі на комбінації, використовуючи трикутник Паскаля. Наприклад, вони мають знайти кількість способів вибрати 3 елементи з 7 або кількість комбінацій для вибору 2 з 8 предметів. Це завдання

дозволяє учням практично застосувати комбінаційні принципи для розв'язання реальних задач.

Вчитель пропонує учням використати числові трикутники для обчислення ймовірностей у комбінаційних задачах. Наприклад, учням потрібно визначити ймовірність того, що при киданні 5 монет 3 з них покажуть орел. Для цього учні обчислюють кількість сприятливих випадків і загальну кількість можливих результатів за допомогою трикутника Паскаля, що дозволяє їм краще зрозуміти ймовірнісні розрахунки.

Учні виконують завдання, в якому потрібно розподілити об'єкти по групах. Наприклад, їм слід знайти кількість способів розподілити 10 книг між 3 учнями, якщо кожен учень може отримати будь-яку кількість книг. Це завдання демонструє, як числові трикутники можуть бути використані для вирішення задач на розподіл і комбінації.

Вчитель заохочує учнів досліджувати симетричні властивості числових трикутників, таких як симетрія рядків трикутника Паскаля. Учні використовують ці властивості для розв'язання задач, що потребують виявлення закономірностей у числових послідовностях, що розвиває їх аналітичне мислення.

Учні отримують завдання скласти власні задачі, використовуючи властивості числових трикутників. Вони можуть створювати задачі на побудову числових трикутників, їх використання для обчислень або пошук закономірностей у рядках. Це завдання сприяє розвитку креативності та навичок проблемного мислення.

Вчитель пропонує учням вивчити інші числові трикутники, такі як трикутники Фібоначчі або Хартлі, і порівняти їх властивості з трикутником Паскаля. Учні розв'язують задачі, що використовують ці трикутники, для розширення розуміння числових структур і дослідження нових комбінаторних концепцій.

Ці практичні завдання та вправи дозволяють учням не лише застосовувати числові трикутники на практиці, але й розвивати глибше розуміння комбінаторики через розв'язання реальних задач і дослідження математичних концепцій.

## **Висновки до розділу 2**

Порівняння різних числових трикутників і розв'язання комбінаційних задач дозволяє учням зрозуміти спільні і відмінні риси числових структур і їх використання в різних математичних контекстах. Дослідження впливу числових трикутників на комп'ютерні науки і розробка математичних ігор не тільки підвищують технічні навички учнів, але й стимулюють їх інтерес до практичного застосування математики.

Загалом, проектні та дослідницькі роботи з використання числових трикутників не тільки поглиблюють знання учнів, але й допомагають розвивати важливі навички, які будуть корисні в майбутньому навчанні та професійній діяльності. Вони заохочують учнів до самостійного дослідження, креативного підходу до розв'язання проблем і активного використання математичних концепцій у різних контекстах.

Практичні завдання і вправи з використання числових трикутників засобами шкільної комбінаторики забезпечують ефективний спосіб вивчення і засвоєння основних комбінаторних принципів і технік. Вони дозволяють учням не лише розвивати теоретичні знання, а й застосовувати їх на практиці, що значно поглиблює розуміння матеріалу.

Обчислення біноміальних коефіцієнтів за допомогою трикутника Паскаля і розклад біноміальних виразів дозволяють учням засвоїти основи комбінаторики і навички роботи з числовими послідовностями. Вправи на комбінації і ймовірність сприяють розвитку практичних навичок у розв'язанні задач, що є важливими для подальшого навчання і реального життя.

Задачі на розподіл і геометричні властивості числових трикутників допомагають учням краще зрозуміти застосування числових трикутників у різних контекстах, таких як розподіл ресурсів або виявлення закономірностей у числових структурах. Складання і розв'язання власних задач забезпечує творчий підхід до навчання і дозволяє учням поглибити свої знання та навички.

Таким чином, практичні завдання і вправи з використання числових трикутників є важливими для розвитку комбінаційних навичок, критичного мислення та вміння застосовувати математичні концепції на практиці. Вони допомагають учням не лише засвоювати теоретичний матеріал, але й розвивати навички розв'язання реальних задач, що є ключовими для їх подальшого навчання і професійного розвитку.

## **ВИСНОВКИ**

Вивчення властивостей числових трикутників засобами шкільної комбінаторики є важливим етапом у розвитку математичних здібностей учнів, оскільки ці структури відображають фундаментальні принципи комбінаторики та алгебри. Аналіз числових трикутників, таких як трикутник Паскаля, дозволяє глибше зрозуміти механізми побудови біноміальних коефіцієнтів, їх застосування у різних розділах математики, а також виявити закономірності, що сприяють розвитку аналітичного та логічного мислення.

Проведене дослідження продемонструвало значну користь числових трикутників як дидактичного інструменту для покращення засвоєння теоретичних знань і практичних навичок у комбінаториці. Розроблені методичні рекомендації та нові підходи до їх використання у навчальному процесі значно підвищують ефективність викладання цієї дисципліни.



Таким чином, числові трикутники є не лише важливими математичними об'єктами, але й потужним засобом для формування ключових математичних компетентностей, необхідних для успішного розв'язання комбінаторних задач і розуміння складних математичних концепцій. Використання цих знань у практичних завданнях сприяє підвищенню рівня математичної грамотності учнів і готує їх до подальшого вивчення більш складних математичних структур та теорій.

Теоретичні основи вивчення числових трикутників становлять важливий компонент математичної освіти, оскільки вони забезпечують розуміння базових принципів, на яких ґрунтуються багато математичних концепцій і структур. Числові трикутники, такі як трикутник Паскаля, є ключовими об'єктами комбінаторики, алгебри та теорії чисел. Вони наочно демонструють зв'язки між елементами числових послідовностей, біноміальними коефіцієнтами та іншими важливими математичними поняттями.

Вивчення числових трикутників дозволяє глибше зрозуміти принципи симетрії, рекурентні співвідношення, а також механізми побудови й аналізу математичних моделей. Теоретичний аналіз цих структур розкриває їхні внутрішні закономірності та зв'язки з іншими областями математики, що сприяє більш систематичному та цілісному підходу до їх вивчення.

Таким чином, теоретичне вивчення числових трикутників не лише сприяє зміцненню математичної культури учнів, але й закладає основи для розуміння більш складних математичних теорій та їх застосування. Це допомагає формувати фундаментальні знання, необхідні для подальшого успішного навчання в математиці та інших точних науках.

Практичне застосування числових трикутників є важливим інструментом у розвитку математичних навичок учнів та їхньому розумінні комбінаторних концепцій. Використання числових трикутників, таких як трикутник Паскаля, дозволяє ефективно розв'язувати задачі на обчислення біноміальних коефіцієнтів, розкладання біноміальних виразів, а також на комбінації та ймовірності. Завдяки

своїй універсальності і простоті, числові трикутники надають учням можливість зрозуміти глибші математичні закономірності і використовувати їх для вирішення широкого спектра практичних задач.

Розв'язуючи задачі з використанням числових трикутників, учні навчаються застосовувати математичні теорії на практиці, що підвищує їхню впевненість у роботі з числами та сприяє розвитку логічного мислення. Крім того, числові трикутники відкривають учням нові горизонти для досліджень і творчих пошуків, розвиваючи їхній інтерес до математики і заохочуючи до подальшого навчання.

Таким чином, числові трикутники є не лише потужним інструментом у вирішенні комбінаторних задач, але й засобом формування ключових математичних компетенцій, необхідних для подальшого навчання і професійної діяльності.

## **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень) : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. Київ : Генеза, 2019. 416 с.
2. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків: Гімназія, 2019. 352 с.
3. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. Київ: Гімназія, 2011. 448 с.
4. Бевз Г. П. Геометрія 7-9 клас. Київ: «Відродження», 2015.
5. Бевз Г.П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. Математика. 2012. № 13.
6. Береза В. Уроки математики: Посібник для вчителя. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2002. 320 с.
7. Білоножко О. А. Формування усного та писемного навчання на уроках математики. *Математика в школах України*. 2015. №6. С. 10–11.
8. Богачков Ю.М., Ухань П.С., Новіков Ю.Л. Дистанційне навчання школярів - можливості та проблеми. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/153/1>
9. Богданович М. В., Козак М. В., Король Я. А. Методика викладання математики: навч. посіб. 3-є вид., перероб. і допов. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. 336 с.
10. Боровик Г. В. Компетентнісний підхід до навчання учнів на уроках математики / Методичний посібник для вчителя. Полтава, 2012. 120 с.
11. Бузенко С. А., Лук'ященко В.І. Методичний посібник «Правильні многокутники». Золотоноша, 2015.
12. Бурда М.І., Тарасенкова Н.А. Геометрія 7-9 клас. Київ: "Оріон", 2017.
13. Вивчення теми "Многокутники" в шкільному курсі геометрії. Методика викладання математики в середній школі. URL: <http://4ua.co.ua/pedagogics/tb3bd78b4d43b88521216d37.html>

14. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР. Освіта і наука. Зб. наукових праць. К: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2019. 877 с.
15. Війчук Т., Стасів Н. Формування в учнів уявлень про змінну величину як чинник алгебраїчної пропедевтики у початковому курсі математики. *Молодь і ринок*. 2014. №7 (114). С.71–74.
16. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / А. П.Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов. Харків: Ранок, 2017. 256 с.
17. Дудко Л.М. Розширення лексичного запасу на уроках математики. *Початкова школа*. 1994. №2. С. 25–27.
18. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів. Київ: РННЦ "ДІНІТ", 2007. 217с.
19. Жигайло О. О. Розвиток та шляхи удосконалення математичного мовлення школярів. *Рідне слово в етнокультурному вимірі: збірник наукових праць*. Дрогобич : Просвіта, 2016. С. 389–398 Режим доступу: [http://nwed.dspu.edu.ua/article/view/104903/pdf\\_126](http://nwed.dspu.edu.ua/article/view/104903/pdf_126)
20. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, 46 С.В. Шокалюк; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського: 2009. 324 с.
21. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб. / Т. Г. Крамаренко, В. В. Корольський, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; наук. ред. М. І. Жалдак. Вид. 2, перероб. і доп. Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. 444 с. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564/>
22. Казначей І. В. Діяльнісний підхід та формування ключових компетентностей учнів на уроках математики / Методичний посібник для вчителів, 2013.

23. Кізь Л.В., Ревуцька Н.М. «Програма вступних випробувань з математики 2021». URL: <https://www.pkng.pl.ua/images/pdf/program/mat9.pdf>
24. Коберник І. Дистанційне навчання під час карантину: що робити школам, батькам і МОН. Смарт освіта. 2020. URL: <https://nus.org.ua/view/dystantsijnenavchannya-pid-chas-karantynu-plan-dij-dlya-shkil-batkiv-i-mon/>
25. Ковальчук В., Білецька Л., Силюга Л., Стасів Н.І. Формування функціональної компетентності учнів під час вивчення математики. *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія № 17. Теорія і практика навчання і виховання*. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. Випуск 24. С.83–88.
26. Компетентнісна освіта: від теорії до практики. Збірка статей. К.: Плеяди, 2005. 120 с. (Відкритий урок. Основна школа. Вип. 3-4)
27. Король Я. А. Математика : 1–4 кл. : Культура усного і писемного мовлення. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2019. 146 с.
28. Король Я.А. Піднесення культури математичної мови. 1995. №1. С.10–12.
29. Крамаренко Т.Г. Уроки математики з комп'ютером. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 271с.
30. Креативність, або творчі здібності. Математика в школах України. 2014. №11.
31. Литовченко З.М., Карапузова Н.Д. Культура усного мовлення на уроках математики. 1984. №2. С.31–34.
32. Ляхова Т. П. Впровадження ІКТ на уроках математики як умова розвитку самовдосконалення учнів. URL: <https://naurok.com.ua/vprovadzhennyaikt-na-urokah-matematiki-yak-umova-rozvitku-samovdoskonallennya-uchniv69948.html>
33. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. Київ: Видавничий дім “Освіта”, 2019. 272 с.
34. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : Генеза, 2019. 304 с.

35. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.
36. Митник О.Я. Як навчити дитину мистецтва мислення. Київ: Початкова школа, 2006. 104 с.
37. Онопрієнко О., Листопад Н., Скворцова С. Компетентнісний підхід до навчання математики. Київ : Редакції газет з дошкільної та початкової освіти, 2014. 128 с.
38. Осинська В.Н. Формування мовної культури учнів в процесі вивчення математики. Київ: Рад. школа. 1989. 192с.
39. Про затвердження Державного стандарту початкової освіти : Постанова Кабінету Міністрів України від 21 лютого 2018 р. № 87 (у редакції постанови Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898). URL : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/87-2018-%D0%BF>
40. Прокопенко Н.С., Щекань Н.П.(відповідальні за випуск). Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. Математика. Київ: Навчальна книга, 2003. 302с.
41. Фокіна В.І. Розвиток в учнів пізнавального інтересу під час вивчення геометрії Математика в школах України. 2014. №13. С. 17.
42. Формування ключових компетентностей на уроках математики (основна школа). URL: <https://naurok.com.ua/formuvannya-klyuchovih-kompetentnostey-naurokah-matematiki-osnovna-shkola-27697.html>
43. Чотирикутники — ліворуч, чотирикутники — праворуч. Урок-семінар з геометрії у 8 класі. Математика в школах України. 2013. № 30 (402).
44. Чотирикутники навколо нас. Історія геометрії. URL: <https://valentina0202.blogspot.com/p/blog-page.html>

45. Ювковецька Н. Г. Методичний посібник "МНОГОКУТНИКИ". URL:  
<https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-mnogokutniki-90815.html>