

АЛГЕБРИ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ
ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ ℓ_p
МОНОГРАФІЯ

Андрій ЗАГОРОДНЮК
Ірина ЧЕРНЕГА

Івано-Франківськ

2025

УДК 517.98
ББК 22.162

*Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника
(протокол №9 від 22 жовтня 2025 р.).*

Рецензенти:

Бандура А.І., доктор фізико-математичних наук, професор, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
Дмитришин Р.І., доктор фізико-математичних наук, професор, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника.

Автори:

Загороднюк А.В., доктор фізико-математичних наук, професор, Карпатський національний університет імені Василя Стефаника
Чернега І.В., кандидат фізико-математичних наук, старший дослідник, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Загороднюк А.В., Чернега І.В. Алгебри симетричних аналітичних функцій на банахових просторах ℓ_p . – Івано-Франківськ: ПП Голіней О.В., 2025. – 131 с.

ISBN ?????????????

Монографія присвячена алгебрам симетричних аналітичних функцій на банахових просторах. Досліджуються спектри симетричних аналітичних функцій на просторі ℓ_p . вводяться спеціальні операції на спектрах: симетрична та мультиплікативна згортки. Вивчаються суперсиметричні поліноми та кільце множин банахових алгебр. Для студентів, аспірантів і викладачів університетів, а також для спеціалістів у галузі нелінійного функціонального аналізу.

УДК 517.98

ББК 22.162

© А.В. Загороднюк, І.В. Чернега, 2025

Зміст

1	Вступ	4
1.1	Огляд літератури	4
1.2	Попередні відомості	14
2	Симетричні аналітичні функції на просторах ℓ_p	29
2.1	Операція згортки на спектрах алгебр симетричних аналітичних функцій	29
2.2	Мультиплікативна згортка на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$	45
2.3	Спектр алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$	56
2.4	Спектр алгебри симетричних цілих функцій на просторі ℓ_p . . .	69
3	Суперсиметричні поліноми та кільце мультимножин банахових алгебр	81
3.1	Суперсиметричні аналітичні функції на просторі ℓ_1	81
3.2	Суперсиметричні поліноми та кільце мультимножин банахової алгебри	109
	Література	126

1 Вступ

1.1 Огляд літератури

Нескінченновимірний функціональний аналіз як самостійний розділ математики сформувався на рубежі XIX і XX ст. У цей період відбулася кристалізація ідей і методів, які повільно накопичувалися протягом XIX століття. Дослідження концепції поліноміальних та голоморфних відображень в нескінченновимірних просторах розпочалося у той час, коли такі ідеї та теорії, як повна похідна, топологія точкових множин та нормовані лінійні простори були ще в зародковому стані. Крім того, пошук фундаментальних понять у нескінченномірному диференціальному численні стимулював значну частину роботи, яка призвела до розвитку теорії, яку ми тепер знаємо як функціональний аналіз.

Загальноновизнано, що один з перших кроків у створенні нескінченновимірного аналізу був зроблений В. Вольтерра в 1887 р. У серії приміток, яка пізніше перетворилася на книгу [81], він розробив теорію скалярнозначних диференційованих функцій на просторі $C[a, b]$ і отримав розклад Тейлора для дійснозначних аналітичних функцій в $C[a, b]$.

Наступний крок був зроблений Г. фон Кохом [55] у 1899 р., який означив голоморфні функції від нескінченної кількості змінних і зазначив, що багато результатів з теорії n комплексних змінних можна продовжити на нескінченновимірні простори.

Дослідження у цьому напрямку продовжив Д. Гільберт, який спирався на роботи фон Коха щодо квадратичних форм для нескінченної кількості змінних, нескінченних матриць та лінійних рівнянь з нескінченною кількістю невідомих. Гільберт окреслив теорію голоморфних функцій від нескінченної кількості змінних на міжнародному конгресі в Римі в 1908 р. і опублікував свої результати [49] в наступному році.

Продовження ідей щодо понять границі та неперервності, які на той час вже були сформульовані, завжди відбувалося відносно спеціальних об'єктів,

таких як криві, поверхні або функції. Можливість означення таких понять у довільній множині є ідеєю, що була вперше висунута М. Фреше в 1904 році [30], і розвинута ним у його знаменитій дисертації [31] 1906 р. Він ввів поняття відстані між елементами довільної множини, що дозволило узагальнити більшість понять щодо околів, границі та неперервності у просторі $\mathbb{R}^n$. Однак найбільша заслуга М. Фреше полягає в тому, що він акцентував увагу на трьох поняттях, які відіграли фундаментальну роль у всьому подальшому розвитку функціонального аналізу: компактності, повноті та сепарабельності.

Р. Гато [36], [37], на відміну від М. Фреше (який вивчав лише дійсний випадок), займався як дійсним, так і комплексним аналізом. Він уточнив та продовжив роботи М. Фреше та Д. Гільберта. У [37] він означив комплексні поліноми і відмітив їх зв'язок з білінійними і квадратичними формами, визначив похідну "за Гато" та довів різноманітні теореми збіжності для голоморфних функцій. Р. Гато також встановив відповідність між похідними голоморфної функції та однорідними поліномами у її розкладі в ряд Тейлора. Роботи Р. Гато стосувалися просторів $\mathbb{C}^b$, $C[a, b]$ і ℓ_2 .

Відкриття інтеграла Лебега, а також геометричні та топологічні поняття, введені Фреше в аналізі, спонукали наступників Гільберта перекласти його результати мовою того, що ми зараз називаємо гільбертовим простором, пов'язуючи евклідову геометрію з теорією інтегрування.

Це, у свою чергу, спонукало Ф. Ріса в 1910–1913 рр. ввести простори L_p і ℓ_p для $1 < p < +\infty$, і відкрити природну дуальність між різними просторами L_p , L_q і ℓ_p , ℓ_q , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

В 1920 році у своїй дисертації С. Банах означив аксіоми повноти нормованого лінійного простору (банахового простору). Незалежно від С. Банаха, такі простори були введені Н. Вінером на декілька місяців пізніше.

У 1923 р. Н. Вінер [83] помітив, що інтегральна формула Коші узагальнюється на голоморфну функції однієї комплексної змінної зі значеннями у банаховому просторі, і в цьому випадку залишаються справедливими багато

класичних результатів, таких як теорема Морери, теорема Абеля та теорема про лишки.

Перша монографія з функціонального аналізу була опублікована в 1931 р. Це "Opérations linéaires" С. Банаха, яку перевидали у 1932 році французькою мовою "Théorie des opérations linéaires" [21]. Варто зазначити, що сам термін "функціональний аналіз" почав використовуватися тільки в 40-х роках.

Сам термін "банахів простір" був, ймовірно, вперше використаний М. Фреше в 1928 р. Назва дуже швидко стала широко використовуватися математиками, однак сам С. Банах до кінця свого життя завжди використовував термін "простір типу B " на честь Рене-Луї Бера.

У тридцятих роках інтенсивне вивчення аналізу та геометрії в абстрактних просторах проводили А.Д. Майкл і його учні Р.С. Мартін, А.Х. Кліффорд, І.Е. Хайберг і А.Е. Тейлор. В 1932 р. Р.С. Мартін [65] розвинув теорію голоморфних відображень для банахових просторів за допомогою степеневих рядів. Останній крок до поточного означення голоморфного відображення між банаховими просторами було зроблено незалежно Л.М. Грейвсом [41] у 1935 р. та А.Е. Тейлором [76, 77] у 1937 р. Далі Тейлор узагальнює теорему Рімана про усувні сингулярності, теорему Міттага-Леффлера, теорему Ліувілля та рівняння Коші-Рімана. Він також зауважив [76], що радіус рівномірної збіжності не є еквівалентним радіусу аналітичності, що в свою чергу, стало першим кроком до дослідження радіуса обмеженості, який згодом означив Л. Нахбін [72]. У наступній статті [77], А.Е. Тейлор обговорює ряд цікавих прикладів голоморфних функцій на просторах ℓ_p і дає узагальнення теореми Гартогса про нарізну аналітичність.

Ф. Ріс, ймовірно, був першим математиком, який розглядав алгебру $\mathcal{L}(E)$ усіх неперервних ендоморфізмів сепарабельного гільбертового простору E з нормою, яку пізніше стали називати його сильною топологією. Згодом він ввів поняття нормального оператора в загальній формі, а фон Нейман почав більш детальне вивчення алгебри $\mathcal{L}(E)$ та її підалгебр. Він представив слабку топологію на $\mathcal{L}(E)$ та поняття комутанта підмножини цієї алгебри. Він

зосередив свій інтерес на підалгебрах $\mathcal{L}(E)$ (пізніше названі інволютивними або $*$ -підалгебрами), які з кожним елементом також містили і спряжений елемент.

Розробка елементарних понять теорії нормованих алгебр належить І. Гельфанду [83]. І. Гельфанд відомий своїми роботами з функціонального аналізу, алгебри і топології. Він був одним з творців теорії нормованих кілець (банахових алгебр), яка пізніше лягла в основу теорії кілець з інволюцією і теорії нескінченномірних унітарних зображень груп Лі. Цю теорію, що має важливе значення для теоретичної фізики (квантової механіки зокрема), Гельфанд розробив разом з М. Наймарком.

Основна ідея Гельфанда полягала у продовженні спектральної теорії на елементи нормованих алгебр. Гельфанд виявив, що для отримання істотних результатів необхідно припустити, що алгебра є повною як банаховий простір, тобто банаховою алгеброю. Далі Гельфанд вивчав комутативні банахові алгебри та означив характери банахової алгебри як нетривіальні комплексно-значні гомоморфізми. Були введені поняття, відомі тепер як перетворення Гельфанда, топологія Гельфанда, спектр банахової алгебри. Трохи пізніше, у співавторстві з Наймарком [85], Гельфанд почав вивчати банахові алгебри з інволюцією, які тепер називають C^* -алгебрами.

З 1940 року було опубліковано величезну кількість робіт, присвячену банаховим алгебрам, спектральній теорії та їх застосуванню.

У 1950-х рр. вийшла книга А. Гротендіка [42] про топологічні тензорні добутки та ядерні простори, яка мала значний вплив на розвиток нескінченновимірної голоморфності. Локально обмежені голоморфні функції були введені Е. Хіллем [50]. Структура топологічного векторного простору $H(U)$, де U є відкритою підмножиною в $\mathbb{C}^n$, досліджувалася рядом авторів, серед яких були А. Гротендік, Г. Коте та А. Мартіно.

Спектр $H(U)$ вперше вивчали М. Ісідро та Дж. Мухіка. Так, М. Ісідро [51] досліджував спектр $H(U)$, де U — опукла збалансована відкрита підмножина повного локально опуклого простору з властивістю апроксимації,

та довів, що $M(H(U)) \sim U$. Цей результат був узагальнений для поліноміально опуклих областей в квазі повних просторах з властивістю апроксимації Дж. Мухікою [68]. Оскільки дослідження спектра – це дослідження замкнених максимальних ідеалів, то ряд авторів (Дж. Мухіка, Б. Грамш, В. Кабалло та ін.) також вивчали скінченно породжені ідеали в $H(U)$. Також Дж. Мухікою у роботі [70] розглянуто питання лінеаризації аналітичних функцій, тобто зображення аналітичних функцій у вигляді лінійних функціоналів на деяких топологічних векторних просторах. Доведено, що для алгебри $H^\infty(B)$ існує банахів простір G і аналітичне відображення $\eta : B \rightarrow G$ таке, що для кожної аналітичної функції f існує лінійний функціонал $\varphi \in G'$ такий, що $f(x) = \varphi \circ \eta(x)$ для кожного $x \in B$ і відображення $f \mapsto \varphi$ є ізометричним ізоморфізмом. У роботі [71] досліджувались умови, при яких всі характери алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на деякій відкритій збалансованій множині банахового простору X породжуються значеннями в деякій точці цієї множини. Зокрема, доведено, що якщо простір X' має властивість апроксимації, то для цього необхідно і достатньо, щоб простір X був рефлексивним і поліноми скінченного типу були щільними в множині всіх неперервних поліномів. Також показано, що при згаданих умовах на простір X , в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу виконується теорема Гільберта про нулі для скінченнопороджених ідеалів. Прикладом нескінченновимірного банахового простору, для якого виконуються ці умови, є простір Цірельсона, введений у [78].

У 1970 році Ш. Дінін [26] замінив $H(U)$ на $H_b(U)$, множину голоморфних функцій на U , які обмежені на обмежених відкритих підмножинах $E \subset U$.

Дослідження спектрів алгебр аналітичних функцій на банахових просторах розпочалось наприкінці двадцятого століття. Однією з перших в цьому напрямку була робота [24], де автори досліджували властивості алгебри аналітичних функцій на одиничній кулі спряженого простору, яка породжена $*$ -слабо неперервними лінійними функціоналами. У роботах [14, 15] автори вивчали алгебру $H_b(X)$ комплекснозначних цілих функцій на банаховому

просторі X , які є обмежені на обмежених множинах, і її спектр M_b , а також рівномірну алгебру $\mathcal{H}^\infty(B)$ обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі B банахового простору зі спектром $\mathcal{M}$. Р. Арон, Б. Коул і Т. Гамелін ввели поняття радіус-функції $R(\phi)$ для довільного лінійного функціонала на $H_b(X)$ і показали, що

$$R(\phi) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \|\phi_m\|^{1/m},$$

де ϕ_m — звуження ϕ на простір n -однорідних поліномів. Автори також дослідили топологію на спектрі, показавши, що ця топологія, в загальному випадку, не є лінійною. Також, у [14] доведено слабку версію теореми про корону для $H_b(X)$, а саме, показано, що для довільного комплексозначного гомоморфізму φ на алгебрі $H_b(X)$ існує напрямленість $(x_\alpha) \subset X$, яка збігається до φ у слабо поліноміальній топології. Тобто, для кожного неперервного полінома P , $P(x_\alpha) \rightarrow \varphi(P)$. Також у цих роботах доведено, що якщо поліноми скінченного типу є щільними в алгебрі $H_b(X)$, то спектр алгебри $H_b(X)$ збігається із простором X'' . Р. Арон, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре [20] показали, що якщо на X існує поліном, який не є слабо неперервним на обмежених множинах, то на H_b існує характер, який не належить X'' . У роботі [85] А. Загороднюк описав спектр алгебри $H_b(X)$ у вигляді прямої суми послідовності банахових просторів, поповнених в топології Гельфанда, а також алгебри аналітичних рівномірно неперервних функцій на одиничній кулі банахового простору.

Симетричні поліноми на скінченновимірних просторах є об'єктом класичної алгебри. Поняття про симетричні поліноми на гільбертових просторах і, більш загально, на просторах ℓ_p і $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, вперше було введено А.С. Немировським та С.М. Семеновим [73]. Ними було дано означення симетричних поліномів на вищевказаних просторах і наведено приклади цих симетричних поліномів. Доведено теореми про те, що кожен симетричний поліном на гільбертовому просторі, просторах ℓ_p і $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, виражається через елементарні симетричні поліноми на цих просторах.

В роботі [39] М. Гонзалесом, Р. Гонзало і Х. Харамілло ці результати

узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій. Вони довели, що, подібно до скінченновимірного випадку, поліноми

$$F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \quad k = [p], [p] + 1 \dots \quad (1)$$

утворюють *алгебраїчну базу* в алгебрі всіх симетричних поліномів на просторі ℓ_p , де $[p]$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p . Тобто, для кожного симетричного полінома P степеня $[p] + n - 1$, $n \geq 1$ існує поліном $q \in \mathbb{C}^n$ такий, що $P(x) = q(F_{[p]}(x), \dots, F_{[p]+n-1}(x))$.

Позначимо через $G_k(x) = \int_0^1 x^k(t) dt$ елементарні симетричні поліноми на просторі $L_p[0, 1]$, $k = 1, \dots, p$. Згідно з [39], кожен симетричний поліном на просторі L_p належить до алгебраїчної оболонки поліномів G_k , $k \leq p$.

Субсиметричні поліноми були введені в [73] на просторах ℓ_p ; згодом досліджувалися в статтях [45], [40]. Так, в [40] Р. Гонзало досліджує цей вид поліномів на банахових просторах з субсиметричним базисом. Зокрема, нею описано лінійний базис у скінченновимірному просторі n -однорідних субсиметричних поліномів. А саме, показано, що так звані *стандартні* поліноми

$$F_{k_1, \dots, k_n}(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1}^{k_1} \cdots x_{i_n}^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = n \quad (2)$$

утворюють лінійну базу у скінченновимірному просторі n -однорідних субсиметричних поліномів для $n \geq [p]$.

В роботі [10] Р. Аленкар, Р. Арон, П. Галіндо і А. Загороднюк, використовуючи результати, отримані в [39], дослідили спектр алгебри $A_{us}(B_{\ell_p})$ симетричних рівномірно неперервних аналітичних функцій на одиничній кулі простору ℓ_p . Вони описали спектр алгебри $A_{us}(B_{\ell_p})$ як поліноміально опуклу оболонку деякої підмножини в одиничній кулі простору ℓ_{∞} , а також дослідили алгебру $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, яка є замиканням алгебри симетричних поліномів в $\mathcal{H}_b(\ell_p)$. Як наслідок цього авторами показано, що $A_{us}(B_{\ell_p})$ алгебраїчно і топо-

логічно ізоморфна рівномірній банаховій алгебрі, породженій координатними проекціями в ℓ_∞ .

П. Галіндо, А. Загороднюк та Т. Васишин [33], [34], [79] досліджували комплекснозначні неперервні симетричні поліноми і цілі аналітичні симетричні функції на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Вони показали, що елементарні симетричні поліноми, визначені як інтеграли від степенів функції, утворюють зліченний алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0, 1]$. Також розв'язано задачу побудови елемента цього простору за наперед заданими значеннями елементарних симетричних поліномів. Автори вивчали спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку. Зображено алгебру Фреше всіх комплекснозначних симетричних цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх комплекснозначних вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку як алгебру аналітичних функцій на спектрі, який ототожено із сильним спряженим простором до простору Фреше всіх цілих аналітичних функцій від однієї комплексної змінної.

Блочно-симетричні поліноми і аналітичні функції на просторах ℓ_p , інваріантні відносно перестановок блоків координат аргументу, досліджувалися в роботах [56–60]. Тобто, напівгрупа симетрії діє, переставляючи окремі блоки (скінченновимірні підпростори). Як показують дослідження, цей перехід не є тривіальним, оскільки можуть з'явитися додаткові алгебраїчні залежності у системі твірних відповідної алгебри.

Протягом останніх років симетричні структури та відображення в нескінченновимірних просторах досліджували численні автори [16–18, 22, 29, 53, 80]. У багатьох проблемах алгебри та аналізу [16, 29], а також у застосуваннях

до симетричних нейронних мереж (див., наприклад, [82, 84]), дуже важливо знати інваріанти даної (напів)-групи $\mathcal{S}$, що діє на банаховому просторі X . Інваріанти можна описати як елементи алгебр $\mathcal{S}$ -симетричних функцій на X . Класична теорія інваріантів, яка була розроблена в середині минулого століття, досліджувала поліноміальні інваріанти групи, що діє на скінченновимірному лінійному просторі. Відомий контрприклад Нагати до загального випадку чотирнадцятої проблеми Гільберта показує, що поліноміальні алгебри на $\mathbb{C}^n$ можуть бути нескінченно породженими.

Щоб описати спектр рівномірної алгебри $\mathcal{S}$ -симетричних функцій на X , важливо мати більше інформації про фактор множини $X/\sim$, де “ $\sim$ ” — це відношення еквівалентності “до дії $\mathcal{S}$ ” на X . Така фактор-множина може бути цікавою сама по собі та мати застосування в інформатиці та нейронних мережах. Якщо X — простір послідовностей, а $\mathcal{S}$ — група перестановок елементів послідовностей, то $X/\sim$ можна розглядати як множину ненульових мультимножин, повних у метризованій топології, що індукована з X . Множина $X/\sim$ має структуру півкільця відносно природних алгебраїчних операцій. Комутативне півкільце можна розширити до кільця за допомогою стандартної процедури з K -теорії (див., наприклад, [54]). Таке кільце $\mathcal{M}$ мультимножин для випадку $X = \ell_1$ було досліджено в [53]. Зокрема, були розглянуті гомоморфізми та ідеали $\mathcal{M}$ і показано, що кожен суперсиметричний поліном на $\ell_1 \times \ell_1$ можна продовжити до кільця $\mathcal{M}$. В [25] були вивчені властивості кільця мультимножин цілих чисел і знайдені деякі застосування до криптографії.

Відомо, що на нескінченновимірних банахових просторах існують цілі функції, які не обмежені на деяких обмежених підмножинах — функції необмеженого типу (див., наприклад, [69, р. 544]). Цілі функції необмеженого типу досліджувалися багатьма авторами. Наприклад, в [11] було доведено, що існує ціла функція на банаховому просторі така, що вона є обмеженою на одній з двох куль, які не перетинаються, і необмеженою на іншій кулі.

Сучасний стан теорії аналітичних та полілінійних відображень на банахових просторах викладено в монографіях Ш. Дініна [27], [28], Х. Мухіки [69],

М. Херве [47], С. Бонг Чае [23] та оглядах Т. Гамеліна [35] і Р. Арона [13].

1.2 Попередні відомості

1.2.1. Поліноми та аналітичні функції

Нехай X, Y — лінійні простори над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Розглянемо n -лінійне відображення $A_{P_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з X^n в Y , тобто відображення, яке є лінійним по кожному зі своїх аргументів. Ми будемо припускати, що A_{P_n} є симетричним, тобто що його значення залишається незмінним під дією довільної підстановки індексів $1, \dots, n$.

Означення 1. Відображення $P_n(x) \equiv A_{P_n}(x, \dots, x)$ з X в Y називається однорідним поліноміальним відображенням степеня n . Відображення $P : X \rightarrow Y$ виду

$$P(x) = P_0 + P_1(x) + \dots + P_m(x) \quad (3)$$

називається поліноміальним відображенням степеня m , де P_0 є константою і $P_m(x)$ не є тотожним нулем.

Теорема 1. (Узагальнена біноміальна теорема) Нехай $P_n : X \rightarrow Y$ — однорідне поліноміальне відображення степеня n , яке породжене n -лінійним відображенням A_{P_n} . Тоді

$$P_n(x + h) = \sum_{k=0}^n C_k^n A_{P_n}(\underbrace{x, \dots, x}_{n-k}, \underbrace{h, \dots, h}_k) \quad (4)$$

для всіх $x, h \in X$.

При умові, що n -лінійне відображення $A_{P_n}(x_1, \dots, x_n)$ є симетричним, існує взаємнооднозначна відповідність між P_n і A_{P_n} . Для того, щоб отримати A_{P_n} з P_n , використовується поляризаційна формула:

$$A_{P_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1, \dots, x_n}^n P_n(x), \quad (5)$$

$x \in X$.

Символ Δ є n -ою різницею вперед $P_n(x)$ з приростами $x_1, \dots, x_n$. Наприклад, $\Delta_{x_1}^1 P_n(x) = P_n(x + x_1) - P_n(x)$, $\Delta_{x_1, x_2}^2 P_n(x) = P_n(x + x_1 + x_2) -$

$P_n(x + x_1) - P_n(x + x_2) + P_n(x)$ і, в загальному випадку, $\Delta_{x_1, \dots, x_{i+1}}^{i+1} P_n(x) = \Delta_{x_{i+1}}^1 (\Delta_{x_1, \dots, x_i}^i P_n(x))$.

Теорема 2. *Нехай P_n — однорідне поліноміальне відображення степеня n з X в Y , де X, Y — лінійні простори над полем $\mathbb{K}$. Тоді має місце поляризаційна формула (5).*

Поляризаційну формулу можна записати і в іншому вигляді, а саме:

Наслідок 1. *Нехай P_n — однорідне поліноміальне відображення степеня n з X в Y . Тоді*

$$A_{P_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n=0}^1 (-1)^{n-(\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n)} P_n(x + \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n). \quad (6)$$

Розглянемо тепер поліноміальне відображення степеня m , яке визначається формулою (3). Покажемо, що представлення (3) є єдиним і, більше того, що однорідні компоненти P_n , $n = 0, \dots, m$, можуть бути отримані через P за допомогою простої формули (Мартін [65], Мазур-Орліч [66]).

Лема 1. *Нехай $F(t) = \sum_{n=0}^m t^n y_n$, де $t \in \mathbb{K}$ і $y_0, \dots, y_m \in Y$. Тоді існує матриця (a_{nj}) , $n, j = 0, \dots, m$, де елементи $a_{nj} \in \mathbb{Q}$, є незалежними від $y_0, \dots, y_m$, і*

$$y_n = \sum_{j=0}^m a_{nj} F(j), \quad (7)$$

$n = 0, \dots, m$.

Теорема 3. *Нехай P — поліноміальне відображення степеня m , задане формулою (3). Тоді його однорідні компоненти P_n єдиним чином визначаються за формулою*

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^m a_{nj} P(jx), \quad (8)$$

де матриця (a_{nj}) залежить тільки від степеня m поліноміального відображення P .

Крім означення 1, яке належить Банаху і Майклу, в класичній літературі є два інших означення поліноміального відображення. Нехай, як і раніше, X і Y — лінійні простори над полем $\mathbb{K}$. Тоді означення, яке належить Гато [38], є наступним.

Означення 2. Відображення $P : X \rightarrow Y$ називається G -поліномом, якщо

$$P(x + \lambda z) = q_0(x, z) + \lambda q_1(x, z) + \cdots + \lambda^m q_m(x, z) \quad (9)$$

для всіх $x, z \in X$ і всіх $\lambda \in \mathbb{K}$.

Якщо $q_m(x, z)$ не є тотожним нулем, тоді кажемо, що G -поліном P має степінь m . Величини $q_n(x, z)$, $n = 0, \dots, m$ називаються функціями, асоційованими до P і єдиним чином визначаються через P (дивитися лема 1).

Теорема 4. Означення 1 Банаха-Майкла є еквівалентним до означення 2 Гато.

У випадку певного лінійного простору над полем дійсних чисел ("espaces algeprophiles") М. Фреше [32] дав означення поліноміального відображення, вимагаючи неперервності і умову, що скінченна похідна деякого скінченного порядку є тотожним нулем. Хайберг [48] модифікував це означення і до випадку комплексних лінійних просторів, додаючи до вимог Фреше ще одну вимогу — диференційованості за Гато.

Усунувши вимогу неперервності та зберігши властивість диференційованості за Гато, Хаєрс отримує дещо змінене означення Фреше, яке є еквівалентним до двох інших означень, наведених раніше, в контексті лінійних топологічних просторів над полем дійсних чи комплексних чисел.

Означення 3. Нехай X, Y — локально опуклі топологічні лінійні простори, які задовольняють аксіомі віддільності Гаусдорфа над полем $\mathbb{K}$. Відображення P з X в Y називається F -поліномом степеня m , якщо P є всюди диференційованим за Гато і його $m + 1$ -а похідна з довільними приростами є тотожним нулем, тоді як m -а похідна в тотожній нуль не перетворюється.

Теорема 5. *В даному контексті всі три означення поліноміального відображення є еквівалентними.*

Нехай тепер X, Y — банахові простори над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$, як і раніше, рівне $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Розглянемо $P_n(x)$ — однорідне поліноміальне відображення з X в Y степеня n .

Твердження 1. *Якщо $P_n(x)$ є неперервним в нулі, то $P_n(x)$ є обмеженим на одиничній кулі.*

Простір n -однорідних неперервних поліноміальних відображень з X в Y будемо позначати через $\mathcal{P}(^n X, Y)$ і через $\mathcal{P}(X, Y)$ — простір всіх неперервних поліноміальних відображень. У випадку, коли $Y = \mathbb{K}$, відповідні простори поліномів позначимо через $\mathcal{P}(^n X)$ і $\mathcal{P}(X)$.

У випадку, якщо X і Y є банаховими просторами, простір $\mathcal{P}(^n X, Y)$ є банаховим простором з нормою

$$\|P_n\| = \sup\{|P_n(x)| : \|x\| \leq 1\}. \quad (10)$$

Будемо позначати через $\mathcal{L}(^n X, Y)$ простір неперервних n -лінійних відображень.

Теорема 6. *Нехай P_n — n -однорідне поліноміальне відображення, яке є неперервним в нулі. Тоді P_n і асоційоване з ним симетричне n -лінійне відображення A_{P_n} є неперервними всюди.*

Наслідок 2. *Якщо P_n — однорідне поліноміальне відображення степеня n , яке є обмеженим на одиничній кулі, то P_n і асоційоване з ним симетричне n -лінійне відображення A_{P_n} є неперервними всюди. A_{P_n} є обмеженим, коли всі його аргументи $\|x_j\| \leq 1$, $j = 1, \dots, n$. Мають місце нерівності:*

$$|P_n(x)| \leq \|P_n\| \|x\|^n$$

$$|A_{P_n}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|A_{P_n}\| \|x_1\| \dots \|x_n\|.$$

Теорема 7. *Мають місце наступні нерівності між нормами P_n і A_{P_n} :*

$$\|P_n\| \leq \|A_{P_n}\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P_n\|.$$

В загальному випадку константу $\frac{n^n}{n!}$ покращити не вдається. Цій проблемі — проблемі пошуку найкращої константи c , такої що $\|A_{P_n}\| \leq c\|P_n\|$, присвячено багато робіт. В окремих випадках цю оцінку, яка залежить від n і від геометрії простору X , вдалося вдосконалити. Так, у випадку коли X є гільбертовим простором, $\|A_{P_n}\| = \|P_n\|$ для довільного n і довільного полінома $P_n : X \rightarrow \mathbb{K}$. Однак у випадку полінома $P_n : \ell_1 \rightarrow \mathbb{K}$ такого, що $P_n = x_1 \dots x_n$ маємо, що $\|A_{P_n}\| = \frac{n^n}{n!}\|P_n\|$.

Підмножина Ω банахового простору X називається *скінченно відкритою*, якщо її перетин з довільним скінченновимірним афінним підпростором є відкритою множиною в цьому підпросторі.

Відображення $f : \Omega \rightarrow Y$ називається *G -аналітичним* (позначення $f \in H_G(\Omega, Y)$), якщо звуження f на $E \cap \Omega$ є аналітичним відображенням для довільного скінченновимірного афінного підпростору E (еквівалентно, для довільного одновимірного афінного підпростору $E \in X$).

Твердження 2. *Нехай Ω — скінченно відкрита підмножина в X і $f \in H_G(\Omega, Y)$, $a \in \Omega$.*

1. *Існує єдина послідовність k -однорідних поліномів (не обов'язково неперервних) $\hat{d}_a^k f : X \rightarrow Y$ таких, що*

$$f(a + x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}_a^k f(x)$$

для всіх x , що належать найбільшій радіальній підмножині $\omega(a)$ множини $\Omega - a$. Ряд праворуч збігається поточково.

2. *Поліноми $\hat{d}_a^k f$ визначаються єдиним чином рівністю*

$$\frac{1}{k!} \hat{d}_a^k f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} f(a + e^{ik\theta} x) d\theta, \quad x \in \omega(a).$$

Означення 4. *G -аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині $\Omega \subset X$ із значеннями в Y , називається аналітичним (позначаємо $f \in H(\Omega, Y)$), якщо воно є неперервним.*

Зауважимо, що коли $f \in H(\Omega, Y)$ і $a \in \Omega$, то $\widehat{d}_a^k f$ є неперервні k -однорідні поліноми на X , які збігаються з похідними Фреше k -того порядку функції f в точці a . Ряд

$$f(a+x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d}_a^k f(x)$$

є рядом Тейлора функції f в околі точки a .

Твердження 3. *Нехай f — G -аналітичне відображення, визначене на відкритій підмножині Ω . Наступні твердження еквівалентні.*

1. f є аналітичним.
2. f є локально обмеженим.
3. f є неперервним в деякій точці множини Ω .
4. Поліноми $\widehat{d}_a^k f$ є неперервними для кожного k .

Аналітична функція f називається *цілою*, якщо вона визначена на всьому просторі X .

Нехай $f \in H(\Omega, Y)$, де Ω відкрита підмножина в X і $x \in \Omega$. Радіус рівномірної збіжності $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset \Omega$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X . Радіус обмеженості f в точці x визначається як супремум тих λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$.

Теорема 8. *Радіус рівномірної збіжності функції f в точці x збігається з радіусом обмеженості f в x і якщо $f \in H(X, Y)$, то*

$$\varrho_0(f) := \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^{1/n} \right)^{-1},$$

$$\partial_e f_n = \frac{\widehat{d}_x^k f}{n!}.$$

Позначимо $H_b(X)$ — простір цілих функцій *обмеженого типу*, який складається з цілих функцій на X , які є обмеженими на обмежених множинах

(тобто мають нескінченний радіус обмеженості). Зауважимо, що в довільному нескінченновимірному просторі X існує комплекснозначна ціла функція f така, що $\varrho(f) < \infty$ для кожного $x \in X$. Простір $H_b(X)$ є алгеброю Фреше з топологією, породженою напівнормами

$$\|f\|_r = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| < r\},$$

де $r > 0$ — раціональні числа.

Кожен функціонал $\phi \in H_b(X)'$ є неперервним відносно топології рівномірної збіжності на деякій кулі в X . *Радіус-функція* $R(\phi)$ функціонала ϕ визначена як інфімум всіх $r > 0$ таких, що ϕ є неперервним в нормі рівномірної збіжності на кулі rB .

Позначимо ϕ_n — звуження ϕ на підпростір n -однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$. Тоді ϕ_n є неперервним лінійним функціоналом на $\mathcal{P}(^n X)$ і

$$\|\phi_n\| = \sup\{\phi(P) : P \in \mathcal{P}(^n X), \|P\| \leq 1\}.$$

Теорема 9. [14] *Радіус-функція R на $H_b(X)'$ задовольняє рівність*

$$R(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}.$$

Теорема 10. [14] *Нехай $\phi_n \in \mathcal{P}(^n X)'$ для $n \geq 0$, для норм функціоналів ϕ_n виконується нерівність*

$$\|\phi_n\| \leq cs^n$$

для деякого $c, s > 0$. Тоді існує єдиний функціонал $\phi \in H_b(X)'$, звуження якого на $\mathcal{P}(^n X)$ збігається з ϕ_n , $n \geq 0$.

1.2.2. Симетричні поліноми

Добре відомо, ([61], XI §52), що для $n < \infty$ будь-який симетричний поліном на $\mathbb{C}^n$ можна однозначно представити як поліном від елементарних симетричних поліномів $(G_i)_{i=1}^n$, $G_i(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_i} x_{k_1} \dots x_{k_i}$.

Як було відзначено, вивчення симетричних поліномів на гільбертових просторах і просторах ℓ_p і $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, розпочалося з роботи Немировського та Семенова [73]. Гонзалесом, Гонзало та Харамілло [39] ці результати узагальнено на дійсні банахові простори з деякою симетричною структурою, так звані переставно-інваріантні простори функцій, на вимірному просторі (I, μ) [63]. З точністю до деяких несуттєвих нормалізацій, вивчення переставно-інваріантних просторів функцій зводиться до наступних трьох випадків:

1. $I = \mathbb{N}$ і маса кожної точки одиниця;
2. $I = [0, 1]$ зі звичайною мірою Лебега;
3. $I = [0, \infty)$ зі звичайною мірою Лебега.

Кажемо, що σ є автоморфізмом I , якщо σ є бієкцією I , σ і σ^{-1} є вимірними і зберігають міру. Позначимо через $\mathcal{G}(I)$ групу всіх автоморфізмів I . Якщо $X(I)$ є переставно-інваріантним простором функцій на I і $f \in X(I)$, то f є дійснозначною вимірною функцією на I і $f \circ \sigma \in X(I)$ для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$. Також

$$\|f \circ \sigma\| = \|f\|$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$. Ми завжди будемо розглядати простір $X(I)$, наділений цією нормою.

Наслідуючи [73], будемо казати, що поліном P на $X(I)$ є симетричним, якщо

$$P(f \circ \sigma) = P(f)$$

для всіх $\sigma \in \mathcal{G}(I)$ і всіх $f \in X(I)$.

Також, якщо $\mathcal{G}_0$ є підгрупою $\mathcal{G}(I)$, кажемо, що поліном P є $\mathcal{G}_0$ -інваріантним, якщо $P(f) = P(f \circ \sigma)$ для всіх $\sigma \in \mathcal{G}_0$ і всіх $f \in X(I)$.

Нехай $X(I)$ — переставно-інваріантний простір функцій на I . Розглянемо множину

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : X(I) \subset L_r(I)\}.$$

Якщо $\mathcal{J}(X) \neq \emptyset$, то для кожного $r \in \mathcal{J}(X)$ можна розглянути поліноми

$$P_r(f) = \int_I f^r = \int_I (f(t))^r dt.$$

Ці поліноми називають елементарними симетричними поліномами на $X(I)$.

Симетричні поліноми на просторах з симетричним базисом.

Нехай $X = X(\mathbb{N})$ — банаховий простір з симетричним базисом $\{e_n\}$. Поліном P на X є симетричним, якщо для кожної перестановки $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\right).$$

Розглянемо скінченну групу $\mathcal{G}_n(\mathbb{N})$ перестановок на множині $\{1, \dots, n\}$ і σ -скінченну групу $\mathcal{G}_0(\mathbb{N}) = \cup_n \mathcal{G}_n(\mathbb{N})$ як підгрупу $\mathcal{G}(\mathbb{N})$. За неперервністю, поліном f є симетричним тоді і тільки тоді, якщо він є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$ -інваріантний. Справді, якщо P є $\mathcal{G}_0(\mathbb{N})$ -інваріантним і $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sum_{i=1}^n a_i e_{\sigma(i)}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\sigma(i)}\right).$$

Кажемо, що послідовність $\{x_n\}$ має *нижню p -оцінку* для деякого $p \geq 1$, якщо існує константа $C > 0$ така, що

$$C\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

для всіх $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $X \subset \ell_r$ тоді і тільки тоді, коли базис має нижню r -оцінку і тому, в цьому випадку, маємо:

$$\mathcal{J}(X) = \{r \in \mathbb{N} : \{e_n\} \text{ має нижню } r\text{-оцінку}\}.$$

Позначимо тепер $n_0(X) = \inf \mathcal{J}(X)$ (інфімум порожньої множини є ∞). Тоді елементарні симетричні поліноми мають вигляд:

$$P_r\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^r,$$

де $r \geq n_0(X)$.

Теорема 11. [39] Нехай X — банахів простір з симетричним базисом e_n , P — симетричний поліном на X ; позначимо $k = \deg P$ і $N = n_0(X)$. Тоді

1. Якщо $k < N$, то $P = 0$.

2. Якщо $k \geq N$, тоді існує дійсний поліном q від декількох дійсних змінних такий, що

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = q\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^N, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right)$$

для кожного $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$.

Симетричні поліноми на $X[0, 1]$ та $X[0, \infty)$.

Розглянемо $X[0, 1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0, 1]$. Зауважимо, що множина $\mathcal{J}(X)$ ніколи не є порожньою, оскільки завжди маємо, що $X[0, 1] \subset L_1[0, 1]$.

Введемо величину

$$n_{\infty}(X) = \sup\{r \in \mathbb{N} : X[0, 1] \subset L_r[0, 1]\}.$$

Отже, елементарні симетричні поліноми на $X[0, 1]$ мають вигляд

$$P_r(f) = \int_0^1 f^r$$

для кожного цілого $r \leq n_{\infty}(X)$.

Теорема 12. [39] Нехай $X[0, 1]$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій на $[0, 1]$ і розглянемо індекс $n_{\infty}(X)$, визначений вище. Нехай P — $\mathcal{G}_0[0, 1]$ -інваріантний поліном на $X[0, 1]$ і нехай $k = \deg P$. Тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних, такий, що

$$P(f) = q\left(\int_0^1 f, \dots, \int_0^1 f^m\right)$$

для всіх $f \in X$ де $m = \min\{n_{\infty}(X), k\}$.

Для сепарабельного переставно-інваріантного простору функцій $X[0, \infty)$ ми розглянемо наступні асоційовані простори:

$$X[0, 1] = \{f \cdot \chi_{[0, 1]} : f \in X[0, \infty)\}$$

$$X(\mathbb{N}) = \overline{[\chi_{[n,n+1]}]}.$$

Зауважимо, що простір $X[0, 1]$ є сепарабельним переставно-інваріантним простором функцій на $[0, 1]$ і $X(\mathbb{N})$ є банаховим простором з симетричним базисом.

Для того, щоб описати множину $\mathcal{J}(X[0, \infty))$, нам потрібна наступна лема.

Лема 2. [39] Нехай $X[0, \infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, $X[0, 1]$ і $X(\mathbb{N})$ — визначені вище. Розглянемо $n_0 = n_0(X(\mathbb{N}))$ і $n_\infty = n_\infty(X[0, 1])$. Тоді:

1. Якщо $n_0 > n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0, \infty)) = \emptyset$.
2. Якщо $n_0 \leq n_\infty$, то $\mathcal{J}(X[0, \infty)) = \{n \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \leq n_\infty\}$.

Теорема 13. [39] Нехай $X[0, \infty)$ — сепарабельний переставно-інваріантний простір функцій, P — $\mathcal{G}_0$ -інваріантний поліном на $X[0, \infty)$, $k = \deg P$, n_0 і n_∞ — визначені вище. Тоді

1. Якщо або $n_0 > n_\infty$, або $k < n_0 \leq \infty$, то $P = 0$.
2. Якщо $n_0 \leq n_\infty$ і $n_0 \leq k$, тоді існує дійсний поліном q декількох дійсних змінних, такий що

$$P(f) = q\left(\int_0^\infty f^{n_0}, \dots, \int_0^\infty f^m\right),$$

де $m = \min\{n_\infty, k\}$.

Субсиметричні поліноми

Нехай тепер X — банаховий простір з субсиметричним базисом $\{e_n\}$. Під субсиметричним базисом ми розуміємо безумовний базис на X , який є еквівалентним до кожної своєї підпослідовності.

n -однорідний поліном P на X називається X субсиметричним поліномом, якщо для всіх $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і всіх цілих n виконується наступне:

$$P\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^n x_i e_{k_i}\right),$$

де $k_1 < \dots < k_n$.

Зауважимо, що дане означення, яке було введене в роботі [40], співпадає з означенням стандартних поліномів, що були представлені Немировським і Семеновим в [73].

Позначимо через $n_0(X) = \min \mathcal{J}(X)$. Має місце наступна теорема:

Теорема 14. [40] *Нехай X — банахів простір з субсиметричним базисом e_n і $N = n_0(X)$.*

Якщо $n \geq N$, тоді кожен n -однорідний субсиметричний поліном може бути представлений як лінійна комбінація елементарних n -однорідних субсиметричних поліномів

$$P_{i_1, \dots, i_s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right) = \sum_{n_1 < \dots < n_s} x_{n_1}^{i_1} \cdots x_{n_s}^{i_s}, \quad (11)$$

де $i_1 + \dots + i_s = n$ і кожне $i_j \geq N$.

Якщо $n < N$, тоді на X не існує нетривіальних n -однорідних субсиметричних поліномів.

1.2.3. Банахові алгебри та алгебри Фреше

Множина A називається банаховою алгеброю, якщо A є алгеброю (завжди припускається, що вона комплексна і з одиничним елементом $e \neq 0$) та банаховим простором таким, що:

$$(1) \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\| \text{ для всіх } x, y \in A;$$

$$(2) \quad \|e\| = 1.$$

Банахова алгебра A називається комутативною, якщо $xy = yx$ для всіх $x, y \in A$.

Наступна теорема визначає деякі основні властивості множини оборотних елементів банахової алгебри.

Теорема 15. *Нехай A — банахова алгебра. Тоді:*

- (1) Для кожного $x \in A$ з $\|x\| < 1$ елемент $e - x$ є оборотним і $(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
- (2) Множина U всіх оборотних елементів A є відкритою.
- (3) Відображення $x \in U \rightarrow x^{-1} \in A$ є голоморфним.

Далі ми визначаємо спектр елемента банахової алгебри та встановлюємо його основні властивості.

Нехай A — банахова алгебра, $x \in A$. Спектр елемента x , $\sigma(x)$, — це множина всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, що $x - \lambda e$ є необоротним. Спектральний радіус $\rho(x)$ елемента x визначається як

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Теорема 16. Нехай A — банахова алгебра, $a \in A$. Тоді:

- (1) Спектр $\rho(a)$ є компактним і непорожнім.
- (2) $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ для кожного $\lambda \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$.
- (3) $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Це формула спектрального радіуса.

Теорема 17. (Гельфанд-Мазур) Нехай A — банахова алгебра, в якій кожен ненульовий елемент є оборотним. Тоді A є ізометрично ізоморфною до $\mathbb{C}$.

Нехай A — комутативна банахова алгебра. Підмножина I множини A називається ідеалом в A , якщо I — це векторний підпростір A , і $xu \in I$ для всіх $x \in I$ та $u \in A$. Ідеал $I \neq A$ називається власним ідеалом. Власний ідеал, який не міститься в жодному більшому власному ідеалі, називається максимальним ідеалом.

Нехай A — комутативна банахова алгебра. Ідеал I алгебри A є власним ідеалом тоді і лише тоді, коли I не містить жодних оборотних елементів. Стандартне застосування леми Цорна показує, що кожен власний ідеал I алгебри A міститься в якомусь максимальному ідеалі алгебри A . Якщо I — це

замкнутий власний ідеал в A , то фактор-простір A/I є комутативною банаховою алгеброю, і фактор-відображення $A \rightarrow A/I$ є неперервним алгебраїчним гомоморфізмом.

Твердження 4. *Нехай A — комутативна банахова алгебра. Тоді:*

- (1) *Замикання кожного власного ідеалу A є власним ідеалом.*
- (2) *Кожний максимальний ідеал A є замкненим.*

Нехай A — банахова алгебра. Позначимо через $M(A)$ множину всіх комплексних гомоморфізмів A , тобто множину всіх алгебраїчних гомоморфізмів $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$. Множину $M(A)$ називають спектром A . Комплексні гомоморфізми A також називають мультиплікативними лінійними функціоналами або характерами. За попередніми домовленостями $\varphi(e) = 1$ для кожного $\varphi \in M(A)$.

Наступна теорема показує, що у випадку комутативної банахової алгебри A існує взаємнооднозначна відповідність між множиною комплексних гомоморфізмів A та множиною максимальних ідеалів A .

Теорема 18. *Нехай A — комутативна банахова алгебра. Тоді:*

- (1) *Ядро кожного комплексного гомоморфізму A є максимальним ідеалом A .*
- (2) *Кожен максимальний ідеал A є ядром єдиного комплексного гомоморфізму A .*

Нехай A — напівпроста комутативна банахова алгебра. Кожному елементу $x \in A$ відповідає функція $\hat{x}$ на $M(A)$, визначена формулою $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$, де φ — довільний характер з A . Відображення $x \mapsto \hat{x}$ називають *перетворенням Гельфанда*. Найслабша топологія на $M(A)$, в якій всі функції $\hat{x}$, $x \in A$ є неперервними, називається *топологією Гельфанда*. Відомо, що для банахової алгебри $M(A)$ є компактним гаусдорфовим простором в топології Гельфанда. Таким чином, кожна напівпроста комутативна банахова алгебра вкладається

як підалгебра в алгебру всіх неперервних функцій на деякому компактї (який збігається з $M(A)$). Це вкладення здійснюється перетворенням Гельфанда. Напівпроста комутативна алгебра називається рівномірною, якщо перетворення Гельфанда є ізометрією. Детальнішу інформацію про банахові алгебри можна знайти в [75], [35].

Ми будемо казати, що Z — *алгебра Фреше*, якщо Z — простір Фреше (локально-опуклий метризовний простір) і напівнорми на Z , які породжують локально опуклу топологію на Z , можна вибрати мультиплікативно опуклими. Іншими словами, топологія на Z задається деякою зліченною системою напівнорм q_j таких, що

$$q_j(xy) \leq q_j(x)q_j(y),$$

для довільних $x, y \in Z$, $j = 1, \dots, \infty$.

2 Симетричні аналітичні функції на просторах ℓ_p

Даний розділ присвячено вивченню спектру алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p , $1 \leq p < +\infty$. Для $p = 1$ отримано представлення спектра за допомогою цілих функцій експоненціального типу однієї комплексної змінної. Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [2], [3], [7], [8].

2.1 Операція згортки на спектрах алгебр симетричних аналітичних функцій

Радіус-функція на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Відповідно до [14], ми визначаємо *радіус-функцію* R на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ шляхом присвоєння будь-якому комплексному гомоморфізму $\phi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ інфімум $R(\phi)$ з усіх r , таких що ϕ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності на кулі rB_{ℓ_p} , тобто $|\phi(f)| \leq C_r \|f\|_r$. Далі, маємо $|\phi(f)| \leq \|f\|_{R(\phi)}$.

Як і у несиметричному випадку, отримуємо наступну формулу для радіус-функції:

Твердження 5. *Нехай $\phi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Тоді*

$$R(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}, \quad (12)$$

де ϕ_n — звуження ϕ на $\mathcal{P}_s({}^n\ell_p)$, а $\|\phi_n\|$ — його відповідна норма.

Доведення. Для доведення (12) використовуємо аргументи з [14, теорема 2.3.].

Нагадаємо, що

$$\|\phi_n\| = \sup\{|\phi_n(P)| : P \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_p) \text{ with } \|P\| \leq 1\}.$$

Припустимо, що

$$0 < t < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}.$$

Тоді існує послідовність однорідних симетричних поліномів P_j степеня $n_j \rightarrow \infty$ така, що $\|P_j\| = 1$ і $|\phi(P_j)| > t^{n_j}$. Якщо $0 < r < t$, то внаслідок однорідно-

сті,

$$\|P_j\|_r = \sup_{x \in rB_{\ell_p}} |P_j(x)| = r^{n_j},$$

так що

$$|\phi(P_j)| > (t/r)^{n_j} \|P_j\|_r,$$

і ϕ не є неперервним для норми $\|\cdot\|_r$. З цього випливає, що $R(\phi) \geq r$ і, враховуючи довільний вибір r , ми отримуємо

$$R(\phi) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}.$$

Припустимо тепер, що $s > \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}$ так, що $s^m \geq \|\phi_m\|$ для великих m . Тоді існує $c \geq 1$ таке, що $\|\phi_m\| \leq cs^m$ для кожного m . Якщо $r > s$ — довільне число, і $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ має розклад в ряд Тейлора $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, то

$$r^m \|f_m\| = \|f_m\|_r \leq \|f\|_r, \quad m \geq 0.$$

Отже,

$$|\phi(f_m)| \leq \|\phi_m\| \|f_m\| \leq \frac{cs^m}{r^m} \|f\|_r$$

і, таким чином,

$$\|\phi(f)\| \leq c \left(\sum \frac{s^m}{r^m} \right) \|f\|_r.$$

Отже, ϕ неперервний відносно рівномірної норми на rB , і $R(\phi) \leq r$. Оскільки r і s — довільні, то

$$R(\phi) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n}.$$

□

Симетрична згортка.

Р. Ароном, Б. Коулом та Т. Гамеліном в [14] було введено операцію згортки на спектрі алгебри цілих аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$, яка визначена за допомогою зсувів у просторі X . У випадку симетричної аналітичної функції $f(x)$ на ℓ_p легко бачити, що функція $f(x+y)$ для деякого фіксованого $y \in \ell_p$ не є, взагалі кажучи, симетричною.

Зауваження 1. Не існує $w \in \ell_p$, $w \neq 0$ такого, що функція $g(x) = f(x + w)$ є симетричною для кожної симетричної функції $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Доведення. Існує $i_0 \in \mathbb{N}$, таке що $|w_n| < \frac{1}{3}$, якщо $n \geq i_0$. Припустимо, що $f(\cdot + w)$ належить $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ для кожної симетричної функції $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Тоді для кожної фіксованої перестановки σ і кожного елемента бази простору ℓ_p маємо, що $f(e_{\sigma(i)} + w) = g(e_{\sigma(i)}) = g(e_i) = f(e_i + w)$ для всіх $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Таким чином, $e_{\sigma(i)} + w$ є перестановкою $e_i + w$, тобто, $1 + w_{\sigma(i)} = w_{j_i}$ для деякого індекса $j_i \in \mathbb{N}$.

Оскільки σ є бієкцією, множина $\{\sigma(i) > i_0\}$ — нескінченна, то існують нескінченні члени w_{j_i} з абсолютним значенням більшим, ніж $\frac{2}{3}$, що є неможливим. $\square$

Пригадаємо деякі означення.

Означення 5. [1, 9] Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ і $y = (y_1, y_2, \dots)$. Означимо симетричний зсув $x \bullet y \in \ell_p$ таким чином:

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots).$$

Відображення $f \mapsto T_y^s(f)$, де $T_y^s(f)(x) = f(x \bullet y)$ будемо називати *оператором симетричного зсуву*. Зауважимо, що $T_x^s \circ T_y^s = T_{x \bullet y}^s = T_y^s \circ T_x^s$: Дійсно, $[T_x^s \circ T_y^s](f)(z) = T_x^s[T_y^s(f)](z) = T_y^s(f)(z \bullet x) = f((z \bullet x) \bullet y) = f(z \bullet (x \bullet y))$, оскільки f — симетрична функція.

Наведене вище зауваження пояснює, чому ми використовуємо оператор симетричного зсуву для означення згортки на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Означення 6. [1, 9] Нехай $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ і $\theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$. Їх симетричну згортку $\theta \star f$ означимо як $(\theta \star f)(x) = \theta[T_x^s(f)]$.

Як зазначалося в [1], виявляється, що $\theta \star f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Означення 7. [1, 9] Для довільних $\phi, \theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$, визначимо їх симетричну згортку таким чином:

$$(\phi \star \theta)(f) = \phi(\theta \star f) = \phi(y \mapsto \theta(T_y^s f)).$$

Наслідок 3. Якщо $\phi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, тоді $\phi \star \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Теорема 19. а) Для всіх $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ маємо, що

$$(\varphi \star \theta)(F_k) = \varphi(F_k) + \theta(F_k). \quad (13)$$

б) Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star)$ є комутативною; значення в 0, δ_0 , є її одиницею та виконується правило скорочення.

Доведення. Зауважимо, що для кожного елемента F_k в алгебраїчному базисі поліномів, $\{F_k\}$, ми маємо:

$$(\theta \star F_k)(x) = \theta(T_x^s(F_k)) = \theta(F_k(x) + F_k) = F_k(x) + \theta(F_k).$$

Тому

$$(\varphi \star \theta)(F_k) = \varphi(F_k + \theta(F_k)) = \varphi(F_k) + \theta(F_k).$$

Щоб перевірити, що згортка є комутативною, тобто $\phi \star \theta = \theta \star \phi$, достатньо це довести для симетричних поліномів, а отже, для базису $\{F_k\}$. Таким чином, ми отримуємо, що $(\theta \star \varphi)(F_k) = \varphi(F_k) + \theta(F_k) = \theta(F_k) + \varphi(F_k) = (\varphi \star \theta)(F_k)$.

З (13) також випливає, що виконується правило скорочення для цієї згортки: якщо $\varphi \star \theta = \psi \star \theta$, тоді $\varphi(F_k) + \theta(F_k) = \psi(F_k) + \theta(F_k)$, отже $\varphi(F_k) = \psi(F_k)$ і, таким чином, $\varphi = \psi$. $\square$

Приклад 1. Існують нетривіальні елементи у напівгрупі $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star)$, які є оборотніми:

В [10, приклад 3.1] був побудований неперервний гомоморфізм $\varphi = \Psi_1$ на рівномірній алгебрі $A_{us}(B_{\ell_p})$ такий, що $\varphi(F_p) = 1$ та $\varphi(F_i) = 0$ для всіх $i > p$. Аналогічно, для даного $\lambda \in \mathbb{C}$ ми можемо побудувати неперервний гомоморфізм Ψ_λ на рівномірній алгебрі $A_{us}(|\lambda|B_{\ell_p})$ такий, що $\Psi_\lambda(F_p) = \lambda$ і $\Psi_\lambda(F_i) = 0$ для всіх $i > p$: Для цього достатньо розглянути для кожного $n \in \mathbb{N}$, елемент $v_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{1/p} (e_1 + \dots + e_n)$, для якого $F_p(v_n) = \lambda$, і $\lim_n F_j(v_n) = 0$. Послідовність $\{\delta_{v_n}\}$ має граничну точку Ψ_λ у спектрі $A_{us}(|\lambda|B_{\ell_p})$. Ми будемо використовувати позначення ψ_λ для звуження Ψ_λ на підалгебру

$\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ алгебри $A_{us}(|\lambda|B_{\ell_p})$. Виявляється, що $\psi_\lambda \star \psi_{-\lambda} = \delta_0$, оскільки для усіх елементів F_j алгебраїчної бази, $(\psi_\lambda \star \psi_{-\lambda})(F_j) = \psi_\lambda(F_j) + \psi_{-\lambda}(F_j) = 0 = \delta_0(F_j)$.

Таким чином, ми отримуємо комплексну пряму оборотних елементів $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Як і в несиметричному випадку ([14] теорема 5.5), є справедливим наступне твердження:

Твердження 6. *Кожний $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ лежить на однолистній комплексній прямій, що проходить через δ_0 .*

Доведення. Для кожного $z \in \mathbb{C}$, розглянемо оператор композиції $L_z : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, визначений як $L_z(f)((x_n)) := f((zx_n))$, а також звуження його транспонованого відображення L_z^* на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Покладемо $\varphi^z := L_z^*(\varphi) = \varphi \circ L_z$. Зауважимо, що $\varphi^z(F_k) = \varphi \circ L_z(F_k) = \varphi((F_k(z \cdot))) = z^k \varphi(F_k)$. Крім того, $\varphi^0 = \delta_0$.

Для кожного $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ відображення $\mathbb{C}$ в себе, яке визначене як $z \rightsquigarrow \varphi^z(f)$, є цілим згідно з [14], лема 5.4.(i). Тому відображення $z \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \varphi^z \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ є аналітичним.

Оскільки $\varphi \neq \delta_0$, множина $\Sigma := \{k \in \mathbb{N} : \varphi(F_k) \neq 0\}$ є непорожньою. Нехай m — перший елемент Σ , так що $\varphi(F_m) \neq 0$. Тоді, якщо $\varphi^z = \varphi^w$, маємо, що $z^m \varphi(F_m) = w^m \varphi(F_m)$ і, отже $z^m = w^m$. Беручи головне значення m^{th} -го кореня, маємо, що відображення $\xi \rightsquigarrow \varphi^{\sqrt[m]{\xi}}$ є однозначним. $\square$

Нагадаємо, що лінійний оператор $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ називається оператором згортки, якщо існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \star f$. Позначимо $H_{conv}(\ell_p) := \{T \in L(\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)) : T \text{ є оператором згортки}\}$.

Твердження 7. *Неперервний гомоморфізм $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ є оператором згортки тоді і тільки тоді, коли він комутує з усіма операторами симетричного зсуву T_y^s , $y \in \ell_p$.*

Доведення. Припустимо, що існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ таке, що $Tf = \theta \star f$. Зафіксуємо $y \in \ell_p$. Тоді $[T \circ T_y^s](f)(x) = [T(T_y^s(f))](x) = [\theta \star T_y^s(f)](x) = \theta[T_x^s(T_y^s(f))] =$

$\theta[T_{x \bullet y}^s(f)]$. З іншого боку, $[T_y^s \circ T](f)(x) = [T_y^s(Tf)](x) = Tf(x \bullet y) = (\theta \star f)(x \bullet y) = \theta[T_{x \bullet y}^s(f)]$.

Навпаки, покладемо $\theta = \delta_0 \circ T$. Очевидно, що $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Перевіримо, що $Tf = \theta \star f$: Дійсно, $(\theta \star f)(x) = \theta[T_x^s(f)] = [T(T_x^s(f))](0) = [T_x^s(T(f))](0) = Tf(0 \bullet x) = Tf(x)$. $\square$

Розглянемо відображення Λ , визначене як $\Lambda(\theta)(f) = \theta \star f$, тобто,

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{M}_{bs}(\ell_p) &\rightarrow H_{conv}(\ell_p) \\ \theta &\mapsto f \rightsquigarrow \theta \star f \equiv \Lambda(\theta)(f) \end{aligned}.$$

Очевидно, що воно є бієктивним. Крім того, ми отримуємо представлення згортки напівгрупи:

Твердження 8. *Відображення Λ є ізоморфізмом з $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star)$ в $(H_{conv}(\ell_p), \circ)$, де символом $\circ$ позначається звичайна операція композиції.*

Доведення. По-перше, зауважимо, що використовуючи попереднє твердження,

$$\begin{aligned} \Lambda(\varphi \star \theta)(f)(x) &= [(\varphi \star \theta) \star f](x) = (\varphi \star \theta)(T_x^s f) = \varphi(\theta \star T_x^s f) = \\ &= \varphi[\Lambda(\theta)(T_x^s f)] = \varphi[(\Lambda(\theta) \circ T_x^s)(f)] = \varphi[(T_x^s \circ \Lambda(\theta))(f)]. \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$[\Lambda(\varphi) \circ \Lambda(\theta)](f)(x) = \Lambda(\varphi)[\Lambda(\theta)(f)](x) = [\varphi \star \Lambda(\theta)(f)](x) = \varphi[T_x^s(\Lambda(\theta)(f))],$$

звідки випливає наше твердження. $\square$

Як наслідок ми маємо, що гомоморфізм θ є оборотним в $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star)$ тоді і тільки тоді, коли оператор згортки $\Lambda(\theta)$ є алгебраїчним ізоморфізмом. Також зауважимо, що для $\psi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ виконується

$$\psi \circ \Lambda(\theta) = \psi \star \theta,$$

оскільки $[\psi \circ \Lambda(\theta)](f) = \psi[\Lambda(\theta)(f)] = \psi(\theta \star f) = (\psi \star \theta)(f)$.

Далі ми розглядаємо питання про розв'язок рівняння $\varphi = \psi \star \theta$ для даних $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Почнемо з загальної леми.

Лема 3. Нехай A, B — алгебри Фреше і $T : A \rightarrow B$ — гомоморфізм з алгебри A на B . Тоді T відображає (замкнені) максимальні ідеали на (замкнені) максимальні ідеали.

Доведення. Оскільки T є сюр'єктивним, він відображає ідеали в A на ідеали в B . Нехай $\mathcal{J} \subset A$ — максимальний ідеал. Доведемо, що $T(\mathcal{J})$ є максимальним ідеалом у B . Дійсно, якщо $\mathcal{I}$ інший ідеал з $T(\mathcal{J}) \subset \mathcal{I} \subset B$, то виявляється, що для ідеала $T^{-1}(\mathcal{I})$, $\mathcal{J} \subset T^{-1}(T(\mathcal{J})) \subset T^{-1}(\mathcal{I})$. Отже або $\mathcal{J} = T^{-1}(\mathcal{I})$, або $A = T^{-1}(\mathcal{I})$. Тобто або $T(\mathcal{J}) = \mathcal{I}$, або $B = \mathcal{I}$.

Нехай тепер $\varphi \in M(A)$ і $\mathcal{J} = \text{Ker}(\varphi)$ — замкнутий максимальний ідеал. Тоді $T(\mathcal{J})$ є максимальним ідеалом в B , тому на B існує характер ψ такий, що $\text{Ker}(\psi) = T(\mathcal{J})$. Тоді $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi \circ T)$, тому що якщо $\varphi(a) = 0$, тобто $a \in \mathcal{J}$, ми маємо, що $T(a) \in \text{Ker}(\psi)$. Також, за максимальністю, або $\varphi = \psi \circ T$, або $\psi \circ T = 0$ і, отже, $\psi = 0$. У першому випадку ψ також неперервний, оскільки T є відкритим відображенням, і якщо (b_n) є нуль-послідовністю в B , існує нуль-послідовність $(a_n) \subset A$ така, що $T(a_n) = b_n$; таким чином $\lim_n \psi(b_n) = \lim_n \psi \circ T(a_n) = \lim_n \varphi(a_n) = 0$. $\square$

Зауваження 2. Нехай A, B — алгебри Фреше і $T : A \rightarrow B$ — гомоморфізм з алгебри A на B . Якщо $T(\text{Ker}(\varphi))$ є власним ідеалом, тоді існує єдине $\psi \in M(B)$ таке, що $\varphi = \psi \circ T$.

Наслідок 4. Нехай $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Припустимо, що $\Lambda(\theta)$ є відображенням "на". Якщо $\Lambda(\theta)(\text{Ker}\varphi)$ є власним ідеалом, то рівняння $\varphi = \psi \star \theta$ має єдиний розв'язок. У випадку, якщо $\Lambda(\theta)(\text{Ker}\varphi) = \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, рівняння $\varphi = \psi \star \theta$ розв'язку не має.

Доведення. Перше твердження впливає із зауваження, оскільки $\psi \star \theta = \psi \circ \Lambda(\theta) = \varphi$. Для другого твердження: якщо деякий розв'язок ψ існує, то, знову ж, $\psi \circ \Lambda(\theta) = \psi \star \theta = \varphi$ і тому $\psi(\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)) = (\psi \circ \Lambda(\theta))((\text{Ker}\varphi)) = \varphi(\text{Ker}\varphi) = 0$. Звідси маємо, що $\varphi = 0$. $\square$

Слабка поліноміальна топологія на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Позначимо через w_p топологію на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, що породжується наступною базою околів:

$$U_{\varepsilon, k_1, \dots, k_n}(\psi) = \{\psi \star \varphi : \varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p) \mid |\varphi(F_{k_j})| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

Легко перевірити, що операція згортки є неперервною для топології w_p , оскільки, використовуючи (13), маємо, що

$$U_{\varepsilon/2, k_1, \dots, k_n}(\theta) \star U_{\varepsilon/2, k_1, \dots, k_n}(\psi) \subset U_{\varepsilon, k_1, \dots, k_n}(\theta \star \psi).$$

Скажемо, що функція $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ є *скінченно породженою*, якщо існує скінченне число функцій $\{F_k\}$ і ціла функція q такі, що $f = q(F_1, \dots, F_j)$.

Теорема 20. *Функція $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ є w_p -неперервною тоді і тільки тоді, коли вона є скінченно породженою.*

Доведення. Очевидно, що кожна скінченно породжена функція є w_p -неперервною. Позначимо через V_n скінченновимірний підпростір в ℓ_p , натягнутий на базисні вектори $\{e_1, \dots, e_n\}$. Спочатку зауважимо, що якщо існує натуральне число m таке, що звуження f на V_n , $f|_{V_n}$, генерується звуженням $F_1, \dots, F_m$ на V_n для кожного $n \geq m$, тоді f є скінченно породженою. Дійсно, для заданих $n \geq k \geq m$ ми може написати, що

$$f|_{V_k}(x) = q_1(F_1(x), \dots, F_m(x)) \quad \text{і} \quad f|_{V_n}(x) = q_2(F_1(x), \dots, F_m(x))$$

для деяких цілих функцій q_1 і q_2 на $\mathbb{C}^m$. Оскільки

$$\{(F_1(x), \dots, F_m(x)) : x \in V_k\} = \mathbb{C}^m$$

(див., наприклад, [10]) і $f|_{V_n}$ є розширенням $f|_{V_k}$, то маємо, що $q_1(t_1, \dots, t_m) = q_2(t_1, \dots, t_m)$. Отже, $f(x) = q_1(F_1(x), \dots, F_m(x))$ на ℓ_p , оскільки $f(x)$ збігається з $q_1(F_1(x), \dots, F_m(x))$ на щільній підмножині $\bigcup_n V_n$.

Нехай f — w_p -неперервна функція в $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Тоді f є обмежена в околі $U_{\varepsilon, 1, \dots, m} = \{x \in \ell_p : |F_1(x)| < \varepsilon, \dots, |F_m(x)| < \varepsilon\}$. Для заданого $n \geq m$ нехай $f|_{V_n}(x) = q(F_1(x), \dots, F_m(x))$ — представлення $f|_{V_n}(x)$ для деякої цілої

функції q на $\mathbb{C}^n$. Оскільки $\{(F_1(x), \dots, F_m(x)) : x \in V_n\} = \mathbb{C}^m$, то $q(t_1, \dots, t_n)$ має бути обмеженою на множині $\{|t_1| < \varepsilon, \dots, |t_m| < \varepsilon\}$. З теореми Ліувілля випливає, що $q(t_1, \dots, t_n) = q(t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$, тобто $f|_{V_n}$ генерується $F_1, \dots, F_m$. Оскільки це вірно для кожного n , то функція f є скінченно породженою. $\square$

Наприклад, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(x)}{n!}$ не є w_p -неперервна.

Твердження 9. *Топологія w_p є Гаусдорфовою.*

Доведення. Якщо $\varphi \neq \psi$, то існує таке число k , що

$$|\varphi(F_k) - \psi(F_k)| = \rho > 0.$$

Нехай $\varepsilon = \rho/3$. Тоді для кожного θ_1 і θ_2 в $U_{\varepsilon, k}(0)$ маємо, що

$$|(\varphi \star \theta_1)(F_k) - (\varphi \star \theta_2)(F_k)| = |(\varphi(F_k) - \psi(F_k)) - (\theta_2(F_k)) - \theta_1(F_k)| \geq \rho/3.$$

$\square$

Твердження 10. *На обмежених множинах $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ топологія w_p є тоншою, ніж $\star$ -слабка топологія $w(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \mathcal{H}_{bs}(\ell_p))$.*

Доведення. Оскільки $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), w_p)$ є простором з першою аксіомою зліченності, то достатньо перевірити, що для обмеженої послідовності $(\varphi_i)_i$, яка є w_p -збіжною до деякого ψ , маємо, що $\lim_i \varphi_i(f) = \psi(f)$ для кожного $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$: Справді, за теоремою Банаха-Штейнгауза достатньо переконатися, що $\lim_i \varphi_i(P) = \psi(P)$ для кожного симетричного полінома P . Оскільки $\{F_k\}$ є алгебраїчним базисом для симетричних поліномів, нам достатньо перевірити, що $\lim_i \varphi_i(F_k) = \psi(F_k)$ для кожного F_k . Зауважимо, що якщо $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in U_{\varepsilon, k}$ для достатньо великого i , тобто існує θ_i такий, що $\varphi_i = \psi \star \theta_i$ з $|\theta_i(F_k)| < \varepsilon$. Тоді $|\varphi_i(F_k) - \psi(F_k)| = |\theta_i(F_k)| < \varepsilon$ для достатньо великого i . $\square$

Твердження 11. *Якщо $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star)$ є групою, тоді w_p співпадає з найслабшою топологією на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ так, що для кожного полінома $P \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ його розширення Гельфанда $\widehat{P}$ є неперервним на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.*

Доведення. Множини $F_k^{-1}(B(F_k(\psi), \varepsilon))$ породжують найслабшу топологію, таку що всі $\widehat{P}$ неперервні. Нехай $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ є таким, що $|F_k(\theta) - F_k(\psi)| < \varepsilon$. Покладемо $\varphi = \theta \star \psi^{-1}$. Тоді $|F_k(\varphi)| = |F_k(\theta) - F_k(\psi)| < \varepsilon$ і $\theta = \psi \star \varphi$. $\square$

Представлення напівгрупи $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_1), \star)$.

Розглянемо алгебру $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. Ця алгебра, окрім базису $\{F_n\}$, має інший природний базис. Він задається послідовністю (G_n) , яка має наступний вигляд: $G_0 = 1$ і

$$G_n(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_n}^{\infty} x_{k_1} \cdots x_{k_n}.$$

Лема 4. $\|G_n\| = 1/n!$

Доведення. Щоб обчислити норму, досить розібратися з векторами в одиничній кулі ℓ_1 , компоненти якої є невід'ємними. І нам буде достатньо обчислити норму на L_m , лінійній оболонці $\{e_1, \dots, e_m\}$ для $m \geq n$. Ми виконуємо обчислення по індукції по m .

Оскільки $G_n|_{L_m}$ є однорідним, його норма досягається в точці з нормою 1. Якщо $m = n$, то G_n є добутком $x_1 \cdots x_n$. Використовуючи правило множників Лагранжа, ми отримуємо, що максимум досягається в точках з рівними координатами, тобто при $\frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n)$. Отже $|G_n(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)| = 1/n^n \leq \frac{1}{n!}$.

Тепер для $m > n$ і $x \in L_m$, ми маємо $G_n(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_n \leq m}^{\infty} x_{k_1} \cdots x_{k_n}$. Знову ж таки, за правилом множників Лагранжа, або деякі з координат рівні нулю, або всі вони рівні і, отже, вони мають те саме значення $\frac{1}{m}$. У першому випадку ми повертаємося до деяких попередніх індуктивних кроків, з L_k з $k < m$, і має місце шукана нерівність. У другому випадку ми маємо, що $G_n(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots) = \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} \leq \frac{1}{n!}$.

Крім того, $\|G_n\| \geq \lim_m \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} = \frac{1}{n!}$, що і завершує доведення. $\square$

Позначимо через $\mathbb{C}\{t\}$ простір всіх степеневих рядів над полем $\mathbb{C}$. Також

позначимо через $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ такі відображення з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ в $\mathbb{C}\{t\}$:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \varphi(F_n) \quad \text{і} \quad \mathcal{G}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n \varphi(G_n).$$

Нагадаємо, що для кожного елемента $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ визначена радіус-функція за формулою

$$R(\varphi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}} < \infty, \quad (14)$$

де φ_n є звуженням φ на підпростір n -однорідних поліномів.

Твердження 12. *Відображення $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{G}(\varphi) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ є однозначним і діє в підпростір цілих функцій експоненціального типу на $\mathbb{C}$. Тип $\mathcal{G}(\varphi)$ є меншим або рівним до $R(\varphi)$.*

Доведення. Використовуючи лему 4 маємо, що

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |\varphi_n(G_n)|} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \|\varphi_n\| \|G_n\|} = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\varphi_n\|} = R(\varphi) < \infty, \end{aligned}$$

звідки отримуємо, що $\mathcal{G}(\varphi)$ є цілою і експоненціального типу, який є меншим або рівним $R(\varphi)$. Те, що $\mathcal{G}$ є однозначним, випливає з того факту, що $\{G_n\}$ є базисом. $\square$

Теорема 21. *Справедливі такі тотожності:*

1. $\mathcal{F}(\varphi \star \theta) = \mathcal{F}(\varphi) + \mathcal{F}(\theta).$
2. $\mathcal{G}(\varphi \star \theta) = \mathcal{G}(\varphi) \mathcal{G}(\theta).$

Доведення. Перше твердження безпосередньо випливає з властивостей згортки. Щоб довести друге, зауважимо, що

$$G_n(x \bullet y) = \sum_{k=0}^n G_k(x) G_{n-k}(y).$$

Отже,

$$(\theta \star G_n)(x) = \theta(T_x^s(G_n)) = \theta\left(\sum_{k=0}^n G_k(x) G_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^n G_k(x) \theta(G_{n-k}).$$

Таким чином,

$$(\varphi \star \theta)(G_n) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n G_k(x)\theta(G_{n-k})\right) = \sum_{k=0}^n \varphi(G_k)\theta(G_{n-k}).$$

Отже, будучи абсолютно збіжним рядом,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varphi)\mathcal{G}(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \varphi(G_k) \sum_{m=0}^{\infty} t^m \theta(G_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} t^n \varphi(G_k)\theta(G_m) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k+m=n} \varphi(G_k)\theta(G_m) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\varphi \star \theta)(G_n) = \mathcal{G}(\varphi \star \theta). \end{aligned}$$

□

Приклад 2. Візьмемо ψ_λ як у прикладі 1. Ми знаємо, що $\mathcal{F}(\psi_\lambda) = \lambda$. Щоб знайти $\mathcal{G}(\psi_\lambda)$, зауважимо, що

$$G_k(v_n) = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \binom{n}{k}, \text{ отже } \varphi(G_k) = \lim_n G_k(v_n) = \frac{\lambda^k}{k!}$$

і, таким чином,

$$\mathcal{G}(\psi_\lambda)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\lambda t)^k \psi_\lambda(G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{\lambda t}.$$

Згідно з відомою формулою Ньютона, для $x \in \ell_1$ маємо:

$$nG_n(x) = F_1(x)G_{n-1}(x) - F_2(x)G_{n-2}(x) + \cdots + (-1)^{n+1}F_n(x). \quad (15)$$

Крім того, якщо ξ — комплексний гомоморфізм (не обов'язково неперервний) на просторі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, тоді

$$n\xi(G_n) = \xi(F_1)\xi(G_{n-1}) - \xi(F_2)\xi(G_{n-2}) + \cdots + (-1)^{n+1}\xi(F_n). \quad (16)$$

Далі вкажемо на обмеження техніки побудови, описаної в 1.

Зауваження 3. Нехай ξ — комплексний гомоморфізм на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ такий, що $\xi(F_m) = c \neq 0$ для $m \geq 2$ і $\xi(F_n) = 0$ для $n \neq m$. Тоді

$$\mathcal{G}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ — непарне} \\ 2 - e^{-\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ — парне} \end{cases}$$

і ξ неперервне тільки у випадку $m = 2$.

Доведення. Використовуючи формулу (40) ми бачимо, що

$$\xi(G_{km}) = (-1)^{m+1} \frac{\xi(F_m)\xi(G_{(k-1)m})}{km}$$

і $\xi(G_n) = 0$ якщо $n \neq km$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. За індукцією маємо, що

$$\xi(G_{km}) = \frac{((-1)^{m+1}c/m)^k}{k!}$$

і, таким чином,

$$\mathcal{G}(\xi)(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^{m+1}c/m)^k}{k!} t^{km} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^{m+1} \frac{ct^m}{m})^k}{k!} = e^{((-1)^{m+1} \frac{ct^m}{m})}.$$

Отже, $\mathcal{G}(\xi)(t) = e^{-\frac{(-ct)^m}{m}} = e^{-\frac{(-c)^m}{m} t^m}$. Оскільки $m \geq 2$, $\mathcal{G}(\xi)$ не є експоненціальним типу. Отже, якби ξ був неперервним, його можна було б продовжити до елемента в $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, що призводить до протиріччя з твердженням 12. $\square$

Згідно з факторизаційною теоремою Адамара (див. [62, с. 27]) функція експоненційного типу $\mathcal{G}(\varphi)(t)$ має вигляд:

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = e^{\lambda t} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_k}\right) e^{t/a_k}, \quad (17)$$

де $\{a_k\}$ — нулі $\mathcal{G}(\varphi)(t)$. Якщо $\sum |a_k|^{-1} < \infty$, тоді це представлення набуває вигляду

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = e^{\lambda t} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_k}\right). \quad (18)$$

Нагадаємо, як ψ_λ було означене в прикладі 1.

Твердження 13. *Якщо $\varphi \in (\mathcal{M}_{bs}(\ell_1), \star)$ є оборотним, то $\varphi = \psi_\lambda$ для деякого λ . Зокрема, напівгрупа $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_1), \star)$ не є групою.*

Доведення. Якщо φ оборотний, то $\mathcal{G}(\varphi)(t)$ є оборотною цілою функцією експоненціального типу і тому не має нулів. Згідно з факторизацією Адамара (17) ми маємо, що $\mathcal{G}(\varphi)(t) = e^{\lambda t}$ для деякого комплексного числа λ . Отже, $\varphi = \psi_\lambda$ за твердженням 12.

Значення $\delta_{(1,0,\dots,0,\dots)}$ не збігається з жодним ψ_λ , оскільки, наприклад, $\psi_\lambda(F_2) = 0 \neq 1 = \delta_{(1,0,\dots,0,\dots)}(F_2)$. $\square$

Іншим наслідком наших досліджень є наступне зауваження.

Наслідок 5. *Нехай Φ — гомоморфізм з $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ в себе такий, що $\Phi(F_k) = -F_k$ для кожного k . Тоді Φ — розривний.*

Доведення. Якщо Φ неперервний, його можна продовжити до неперервного гомоморфізму $\tilde{\Phi}$ алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. Тоді для $x = (1, 0, \dots, 0, \dots)$ ми маємо $\delta_x \star (\delta_x \circ \tilde{\Phi}) = \delta_0$. Однак це неможливо, оскільки δ_x не є оборотним. $\square$

Ми завершуємо цей підрозділ аналізуючи подальші зв'язки, встановлені за допомогою відображення $\mathcal{G}$.

З комбінаторики відомо, (див., напр., [64, с. 3, 4]), що

$$\mathcal{G}(\delta_x)(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x_k t) \quad \text{і} \quad \mathcal{F}(\delta_x)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1 - x_k t} \quad (19)$$

для кожного $x \in c_{00}$. Формула (19) для $\mathcal{G}(\delta_x)$ є вірною і для кожного $x \in \ell_1$. Дійсно, для фіксованого t як нескінченний добуток, так і $\mathcal{G}(\delta_x)(t)$ є аналітичними функціями на ℓ_1 .

Беручи до уваги формулу (19) ми бачимо, що нулями $\mathcal{G}(\delta_x)(t)$ є $a_k = -1/x_k$ для $x_k \neq 0$. Навпаки, якщо $f(t)$ є цілою функцією експоненційного типу, яка рівна правій частині (18) з $\sum |a_k|^{-1} < \infty$, то для $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, що задається формулою $\varphi = \psi_\lambda \star \delta_x$, де $x \in \ell_1$, $x_k = -1/a_k$ і ψ_λ з прикладу 1, виявляється, що $\mathcal{G}(\varphi)(t) = f(t)$. Тому залишається тільки дослідити цілі функції експоненційного типу з канонічним добутком Адамара

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_k}\right) e^{t/a_k} \quad (20)$$

з $\sum |a_k|^{-1} = \infty$. Зауважимо, що порядок зростання функції $f(t)$ не перевищує 1. Згідно з теоремою Бореля [62, ст. 30], ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^{1+d}}$$

збігається для кожного $d > 0$. Нехай

$$\Delta_f = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|a_n|}, \quad \eta_f = \limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{|a_n| < r} \frac{1}{a_n} \right|$$

і $\gamma_f = \max(\Delta_f, \eta_f)$. Згідно з теоремою Ліндельофа [62, ст. 33] тип σ_f функції f і γ_f одночасно рівні або нулю, або нескінченності, або додатнім числом. Оскільки $f(t)$ вигляду (20) є функцією експоненційного типу тоді і тільки тоді, коли $\sum |a_k|^{-1-d}$ збігається для кожного $d > 0$ і γ_f є скінченним.

Наслідок 6. *Якщо послідовність $(x_n) \notin \ell_p$ для деякого $p > 1$, тоді не існує $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ такого, що*

$$\varphi(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k$$

для всіх k .

Нехай $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ — послідовність комплексних чисел, така що $x \in \ell_{1+d}$ для кожного $d > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n|x_n| < \infty, \quad \limsup_{r \rightarrow 1} \left| \sum_{\frac{1}{|x_n|} < r} x_n \right| < \infty \quad (21)$$

і $\lambda \in \mathbb{C}$. Позначимо через $\delta_{(x,\lambda)}$ гомоморфізм на алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ наступного вигляду:

$$\delta_{(x,\lambda)}(F_1) = \lambda, \quad \delta_{(x,\lambda)}(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k > 1.$$

Твердження 14. *Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді звуження φ на алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ співпадає з $\varphi_{(x,\lambda)}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ і x , що задовільняють (25).*

Доведення. Розглянемо функцію експоненціального типу $\mathcal{G}(\varphi)$, що задається (17) і відповідною послідовністю $x = (\frac{-1}{a_n})$. Якщо $x \in \ell_1$, то згідно з (18), $\varphi = \psi_\lambda \star \delta_x$. Якщо $x \notin \ell_1$, тоді $\mathcal{G}(\varphi)(t) = e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n}$ та, з іншого боку, $\mathcal{G}(\varphi)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(G_n) t^n$.

Маємо, що

$$\begin{aligned} \left(e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)'_t &= \lambda e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} + \\ e^{\lambda t} \left(-tx_1^2 e^{-tx_1} \prod_{n \neq 1} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - tx_2^2 e^{-tx_2} \prod_{n \neq 2} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - \dots \right) &= \end{aligned}$$

$$\lambda e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - t e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{-tx_k} \prod_{n \neq k} (1 + tx_n) e^{-tx_n}$$

і

$$\left(e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)' \Big|_{t=0} = \lambda.$$

Таким чином, з єдиності коефіцієнтів Тейлора, $\varphi(G_1) = \varphi(F_1) = \lambda$. Тепер

$$\begin{aligned} & \left(e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)''_t = \\ & \left(\lambda e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)'_t - \left(t e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{-tx_k} \prod_{n \neq k} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)'_t = \\ & \lambda^2 e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - \lambda t e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{-tx_k} \prod_{n \neq k} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - \\ & e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{-tx_k} \prod_{n \neq k} (1 + tx_n) e^{-tx_n} - t \left(e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 e^{-tx_k} \prod_{n \neq k} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)'_t \end{aligned}$$

і

$$\left(e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} \right)'' \Big|_{t=0} = \lambda^2 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2.$$

Тоді

$$\varphi(G_2) = \frac{\lambda^2 - F_2(x)}{2} = \frac{(\varphi(F_1))^2 - F_2(x)}{2}.$$

З іншого боку,

$$\varphi(G_2) = \frac{\varphi(F_1^2) - \varphi(F_2)}{2}$$

і ми маємо, що

$$\varphi(F_2) = F_2(x).$$

Далі, використовуючи індукцію, отримуємо потрібний результат. □

2.2 Мультиплікативна згортка на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$

Отже, за допомогою введеної операції симетричної згортки на спектрі алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, вдалося отримати представлення $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ в термінах цілих функцій експоненційного типу. Однак залишалось відкритим питання про те, чи є $\mathcal{G}$ сюр'єктивним відображенням? Далі ми вводимо мультиплікативну згортку на спектрі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, що дозволяє отримати негативну відповідь на поставлене запитання. Також буде показано, що $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ з операціями симетричної та мультиплікативної згорток стає комутативним напівкільцем з одиницею.

Мультиплікативна згортка.

Означення 8. Нехай $x, y \in \ell_p$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$. Визначимо операцію мультиплікативного змішування $x \diamond y$ як множини $\{(x_i y_j), \quad i, j \in \mathbb{N}\}$, пронумеровану одним індексом у деякому фіксованому порядку.

Зауважимо, що для подальших викладок порядок нумерації не має значення.

Твердження 15. Для довільних $x, y \in \ell_p$ маємо, що:

1. $x \diamond y \in \ell_p \quad i \quad \|x \diamond y\| = \|x\| \|y\|;$
2. $F_k(x \diamond y) = F_k(x) F_k(y) \quad \forall k \geq [p].$
3. Якщо P є n -однорідним симетричним поліномом на просторі ℓ_p і y — фіксований елемент, то функція $x \mapsto P(x \diamond y)$ є n -однорідною.

Доведення. Дійсно, $\|x \diamond y\|^p = \sum_{i,j} |x_i y_j|^p = \sum_i |x_i|^p \sum_j |y_j|^p = \|x\|^p \|y\|^p$. Аналогічно, $F_k(x \diamond y) = \sum_{i,j} (x_i y_j)^k = \sum_i x_i^k \sum_j y_j^k = F_k(x) F_k(y)$. Твердження (3) випливає з рівності $\lambda(x \diamond y) = (\lambda x) \diamond y$. $\square$

Для заданого $y \in \ell_p$, відображення $x \in \ell_p \xrightarrow{\pi_y} (x \diamond y) \in \ell_p$ є лінійним і неперервним згідно з твердженням 15. Якщо $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, тоді $f \circ \pi_y \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, оскільки $f \circ \pi_y$ є аналітичною і обмеженою на обмежених множинах і, очевидно, $f(\sigma(x) \diamond y) = f(x \diamond y)$ для кожної перестановки $\sigma \in \mathcal{G}$. Таким

чином, якщо ми позначимо $M_y(f) = f \circ \pi_y$, то M_y є оператором композиції на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, і ми будемо називати його *оператором мультиплікативного зсуву*. Також зауважимо, що $M_y = M_{\sigma(y)}$ для довільної перестановки $\sigma \in \mathcal{G}$ і що $M_y(F_k) = F_k(y)F_k \quad \forall k \geq [p]$.

Твердження 16. *Нехай $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Тоді $f(x \diamond y) \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ для кожного фіксованого $y \in \ell_p$.*

Доведення. Легко бачити, що f є G -аналітичною і симетричною, оскільки $\sigma(x) \diamond y = x \diamond y$ для кожної підстановки σ .

Маємо, що $\|f_n(x \diamond y)\| \leq \|f_n\| \|y\| \|x\|$. Таким чином, для фіксованого $y \in \ell_p$ маємо $\|f_n(\cdot \diamond y)\| = \|f_n\| \|y\|^n$ і

$$\rho_0(f) = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|f_n\| \|y\|^n}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|f_n\| \|y\|}} = \infty.$$

Таким чином, $f(\cdot \diamond y)$ є аналітичною функцією обмеженого типу для кожного $y \in \ell_p$. $\square$

Твердження 17. *Для кожного $y \in \ell_p$ оператор мультиплікативного зсуву M_y є неперервним гомоморфізмом на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.*

Доведення. Очевидно, що M_y є лінійним та мультиплікативним. Нехай x належить ℓ_p і $\|x\| \leq r$. Тоді $\|x \diamond y\| = \sqrt[p]{\|x\|^p \|y\|^p} \leq r \|y\|$ і

$$|M_y f(x)| \leq \sup_{\|z\| \leq r \|y\|} |f(z)| = \|f\|_{r \|y\|}. \quad (22)$$

Таким чином, M_y — неперервний. $\square$

Зауважимо, що якщо f_n є n -однорідним неперервним поліномом, то $\|M_y(f_n)\| \leq \|f_n\| \|y\|^n$. Також, для $\lambda \in \mathbb{C}$, $M_{\lambda y}(f_n) = \lambda^n M_y(f_n)$, тому що $\pi_{\lambda y}(x) = \lambda \pi(x)$. Аналогічно $M_{y+z}(f_n) = f_n \circ (\pi_y + \pi_z)$, оскільки $\pi_{y+z} = \pi_y + \pi_z$. Тому відображення $y \in \ell_p \mapsto M_y(f_n)$ є n -однорідним неперервним поліномом.

Нагадаємо, що *радіус-функцією* $R(\phi)$ комплексного гомоморфізма $\phi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ є нижня грань усіх r таких, що ϕ неперервний відносно норми рівномірної збіжності на кулі rB_{ℓ_p} , тобто $|\phi(f)| \leq C_r \|f\|_r$. Відомо, що

$$R(\phi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\phi_n\|^{1/n},$$

де ϕ_n — звуження ϕ на $\mathcal{P}_s(^n\ell_p)$ і $\|\phi_n\|$ є його відповідною нормою.

Твердження 18. Для кожного $\theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$ та кожного $y \in \ell_p$ радіус-функція неперервного гомоморфізму $\theta \circ M_y$ задовольняє нерівність

$$R(\theta \circ M_y) \leq R(\theta)\|y\|$$

і для фіксованого $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ функція $y \mapsto \theta \circ M_y(f)$ також належить $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Доведення. Для даного $y \in \ell_p$, нехай $(\theta \circ M_y)_n$ (відповідно, θ_n) буде звуженням $\theta \circ M_y$ (відповідно, θ) на підпростір n -однорідних симетричних поліномів. Тоді маємо, що

$$\|(\theta \circ M_y)_n\| = \sup_{\|f_n\| \leq 1} \left| \theta_n \left(\frac{M_y(f_n)}{\|y\|^n} \right) \right| \|y\|^n \leq \|\theta_n\| \|y\|^n.$$

Отже,

$$R(\theta \circ M_y) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\theta_n\| \|y\|^n)^{1/n} = R(\theta)\|y\|.$$

Оскільки члени ряду Тейлора функції $y \mapsto \theta \circ M_y(f)$ є $y \mapsto \theta \circ M_y(f_n)$, де (f_n) є членами Тейлора ряду f , то формула вище доводить друге твердження. $\square$

Використовуючи оператор мультиплікативного зсуву, ми можемо ввести мультиплікативну згортку на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$.

Означення 9. Нехай $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, $\theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$. Мультиплікативну згортку $\theta \diamond f$ визначимо наступним чином:

$$(\theta \diamond f)(x) = \theta[M_x(f)] \text{ для кожного } x \in \ell_p.$$

Згідно з твердженням 18 маємо, що $\theta \diamond f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Означення 10. Для довільних $\varphi, \theta \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)'$ їх мультиплікативна згортка визначається як

$$(\varphi \diamond \theta)(f) = \varphi(\theta \diamond f) \text{ для кожного } f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p).$$

Для гомоморфізму значення в точці y, δ_y , зауважимо, що

$$\begin{aligned} (\delta_y \diamond f)(x) &= \delta_y(M_x(f)) = (f \circ \pi_x)(y) = \\ &= f(\pi_x(y)) = f(x \diamond y) = f(\pi_y(x)) = M_y(f)(x). \end{aligned}$$

Отже, $\delta_x \diamond \delta_y = \delta_{x \diamond y}$.

Твердження 19. Якщо $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, то $\varphi \diamond \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Доведення. З мультиплікативності M_y випливає, що $\varphi \diamond \theta$ є характером. Використовуючи аргументи, як у твердженні 18, ми маємо, що

$$R(\varphi \diamond \theta) \leq R(\varphi)R(\theta).$$

Отже, $\varphi \diamond \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. □

Теорема 22.

$$1. \text{ Якщо } \varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \text{ то } (\varphi \diamond \theta)(F_k) = \varphi(F_k)\theta(F_k) \quad \forall k \geq [p]. \quad (23)$$

2. Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \diamond)$ є комутативною і значення в точці $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$, δ_{x_0} , є її одиничним елементом.

Доведення. Візьмемо спочатку $x, y \in \ell_p$ і $\delta_x, \delta_y \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ — відповідні гомоморфізми значення в точці. Тоді $(\delta_x \diamond \delta_y)(F_k) = F_k(x \diamond y) = \sum x_i^k y_j^k = F_k(x)F_k(y)$.

Нехай тепер $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Тоді

$$(\theta \diamond F_k)(x) = \theta(M_x(F_k)) = \theta(F_k(x)F_k) = F_k(x)\theta(F_k).$$

Отже,

$$(\varphi \diamond \theta)(F_k) = \varphi(F_k\theta(F_k)) = \varphi(F_k)\theta(F_k).$$

Аналогічно,

$$(\theta \diamond \varphi)(F_k) = \theta(F_k)\varphi(F_k) = (\varphi \diamond \theta)(F_k),$$

звідки випливає, що мультиплікативна згортка є комутативною для F_k . Оскільки кожен симетричний поліном — це алгебраїчна комбінація поліномів F_k і

кожна функція з $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ рівномірно апроксимується симетричними поліномами, то операція згортки є комутативною. Аналогічно $\diamond$ є асоціативною, оскільки

$$(\psi \diamond (\varphi \diamond \theta))(F_k) = \psi(F_k)\varphi(F_k)\theta(F_k) = ((\psi \diamond \varphi) \diamond \theta)(F_k).$$

Також з (23) випливає, що виконується правило скорочення і δ_{x_0} , де $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$, — одиниця даної напівгрупи. $\square$

У прикладі 1 було побудовано сімейство $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ елементів множини $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ таке, що $\psi_\lambda(F_p) = \lambda$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > p$. Згадаймо конструкцію: розглянемо для кожного $n \in \mathbb{N}$ елемент $v_n = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{1/p} (e_1 + \dots + e_n)$, для якого $F_p(v_n) = \lambda$, і $\lim_n F_j(v_n) = 0$ для $j > p$. Тоді послідовність $\{\delta_{v_n}\}$ має граничну точку ψ_λ у спектрі для топології поточної збіжності, для якої $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > p$, що запобігає оборотності ψ_λ через (23).

Зауваження 4. Напівгрупа $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \diamond)$ не є групою.

Нагадаємо, що для будь-яких $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ і $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, в [9] та у попередньому підрозділі було визначено симетричну згортку $\varphi \star \theta$ таким чином:

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(T_y^s(f)),$$

де $T_y^s(f)(x) = f(x \bullet y)$.

Твердження 20. Для довільних $\theta, \varphi, \psi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ має місце наступна рівність:

$$\theta \diamond (\varphi \star \psi) = (\theta \diamond \varphi) \star (\theta \diamond \psi).$$

Доведення. Дійсно, використовуючи теорему 22 та теорему 19, отримаємо

$$\begin{aligned} ((\theta \diamond \varphi) \star (\theta \diamond \psi))(F_k) &= (\theta \diamond \varphi)(F_k) + (\theta \diamond \psi)(F_k) = \\ \theta(F_k)\varphi(F_k) + \theta(F_k)\psi(F_k) &= \theta(F_k)(\varphi(F_k) + \psi(F_k)) = \\ \theta(F_k)(\varphi \star \psi)(F_k) &= \theta \diamond (\varphi \star \psi)(F_k), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести. $\square$

Наслідок 7. Множина $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \diamond, \star)$ є комутативним напівкільцем з одиницею.

Лінійний оператор $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ називається *оператором мультиплікативної згортки*, якщо існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \diamond f$.

Твердження 21. Неперервний гомоморфізм $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ є оператором мультиплікативної згортки тоді і тільки тоді, коли він комутує з усіма мультиплікативними операторами M_y , $y \in \ell_p$.

Доведення. Припустимо, що існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \diamond f$. Зафіксуємо $y \in \ell_p$. Тоді

$$\begin{aligned} [T \circ M_y](f)(x) &= [T(M_y(f))](x) = [\theta \diamond M_y(f)](x) = \\ &= \theta[M_x(M_y(f))] = \theta[M_{x \diamond y}(f)]. \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$[M_y \circ T](f)(x) = [M_y(Tf)](x) = Tf(x \diamond y) = (\theta \diamond f)(x \diamond y) = \theta[M_{x \diamond y}(f)].$$

Навпаки, для $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$ покладемо $\theta = \delta_{x_0} \circ T$. Очевидно, що $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Перевіримо, що $Tf = \theta \diamond f$. Дійсно, $(\theta \diamond f)(x) = \theta[M_x(f)] = [T(M_x(f))](x_0) = [M_x(T(f))](x_0) = Tf(x_0 \diamond x) = Tf(x)$. $\square$

Теорема 23. Гомоморфізм $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $T(F_k) = a_k F_k$, $k \geq [p]$, є неперервним тоді і тільки тоді, коли існує $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $\varphi(F_k) = a_k$, $k \geq [p]$.

Доведення. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ та $\varphi(F_k) = a_k$. Тоді

$$(\varphi \diamond F_k)(x) = \varphi(M_x(F_k)) = \varphi(F_k F_k(x)) = a_k F_k(x).$$

Таким чином, якщо $Tf = \varphi \diamond f$, то T визначає неперервний гомоморфізм і $T(F_k) = a_k F_k$.

І навпаки, якщо такий гомоморфізм T є неперервним, то, очевидно, T комутує з усіма M_y . За твердженням 21, він має вигляд $T(f) = \varphi \diamond f$ для деякого $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Таким чином, $T(F_k) = \varphi(F_k) F_k(x) = a_k F_k$, отже $\varphi(F_k) = a_k$. $\square$

Твердження 22. *Тотожний оператор є єдиним оператором на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, який одночасно є оператором згортки та мультиплікативної згортки.*

Доведення. Нехай $T : \mathcal{H}_{bs}(\ell_p) \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ є таким оператором. Тоді існує $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $Tf = \theta \star f$ і T комутує з усіма M_y . Зокрема, для всіх поліномів F_k , $k \geq [p]$, ми маємо, що

$$\begin{aligned} M_y(TF_k) &= M_y(\theta \star F_k) = M_y(\theta(F_k) + F_k) = \\ &= \theta(F_k) + M_y(F_k) = \theta(F_k) + F_k(y)F_k \end{aligned}$$

і

$$T(M_y(F_k)) = T(F_k(y)F_k) = F_k(y)\theta \star F_k = F_k(y)(\theta(F_k) + F_k)$$

співпадають. Отже, $\theta(F_k) = F_k(y)\theta(F_k)$, звідки випливає, що $\theta(F_k) = 0$. З останньої рівності маємо, що $\theta = \delta_0$, або, іншими словами, $T = Id$. $\square$

Випадок простору ℓ_1 .

Як відомо, окрім базису $\{F_n\}$, алгебра $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ має інший природний базис, який задається послідовністю $\{G_n\}$:

$$G_n(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_n}^{\infty} x_{k_1} \cdots x_{k_n}$$

і $G_0 := 1$.

Згідно з лемою 4, $\|G_n\| = \frac{1}{n!}$. З цього випливає, що для кожного $t \in \mathbb{C}$, функція $\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ і що такий ряд рівномірно збігається на обмежених підмножинах простору ℓ_1 . Таким чином, якщо $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, то

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \varphi\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(G_n)$$

є коректно визначеним і, як було показано в твердженні 12, відображення

$$\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{G}(\varphi) \in H(\mathbb{C})$$

є взаємнооднозначним і діє у підпростір цілих функцій експоненціального (скінченного) типу. Залишалось відкритим питанням: чи є $\mathcal{G}$ сюр'єктивним

відображенням? У наслідку 8, використовуючи мультиплікативну згортку, на це питання дається негативна відповідь.

Зауважимо, що для кожного $a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \left(\delta_{(a,0,0,\dots)} \diamond \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \right)(x) &= M_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \right)(a, 0, 0, \dots) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \right)(x \diamond (a, 0, 0, \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n G_n(x). \end{aligned}$$

Тому,

$$\mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_{(a,0,0,\dots)})(t) = \varphi \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n G_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n \varphi(G_n).$$

Згідно з теоремою 19(a), $\delta_{(a,0,0,\dots)} \star \delta_{(b,0,0,\dots)} = \delta_{(a,b,0,0,\dots)}$. Отже, використовуючи твердження 20 і теорему 21(2), маємо:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_{(a,b,0,0,\dots)})(t) &= \mathcal{G} \left((\varphi \diamond \delta_{(a,0,0,\dots)}) \star (\varphi \diamond \delta_{(b,0,0,\dots)}) \right)(t) = \\ &= \mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_{(a,0,0,\dots)})(t) \mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_{(b,0,0,\dots)})(t) = \\ &= \left(\delta_{(a,0,0,\dots)} \diamond \delta_x \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \right) \left(\delta_{(b,0,0,\dots)} \diamond \delta_x \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n a^n \varphi(G_n) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n b^n \varphi(G_n). \end{aligned}$$

Тому,

$$\mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)})(t) = \prod_{k=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_k^n \varphi(G_n).$$

Крім того, оскільки послідовність $\left(\delta_{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)} \right)_m$ поточно збіжна до $\delta_{(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)}$ в $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ то, беручи до уваги комутативність $\diamond$, маємо, що послідовність $\left(\varphi \diamond \delta_{(x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)} \right)_m$ поточно збігається до $\varphi \diamond \delta_{(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots)}$. Таким чином,

$$\mathcal{G}(\varphi \diamond \delta_x)(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^n x_k^n \varphi(G_n) \quad \text{для } x = (x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in \ell_1. \quad (24)$$

Для згаданого вище сімейства $\{\psi_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ в попередньому підрозділі було показано, що $\mathcal{G}(\psi_\lambda)(t) = e^{\lambda t}$. Крім того, легко побачити, що

1. $\psi_\lambda \diamond \varphi(F_1) = \lambda \varphi(F_1)$.
2. $\psi_\lambda \diamond \varphi(F_k) = 0, \quad k > 1$.
3. $\mathcal{G}(\psi_\lambda \diamond \varphi) = e^{\lambda \varphi(F_1)t}$.

Наступна теорема може представляти інтерес для теорії функцій.

Теорема 24. *Нехай $g(t)$ і $h(t)$ — цілі функції експоненціального типу однієї комплексної змінної, такі що $g(0) = h(0) = 1$ і $\{a_n\}$ є нулями функції $g(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} < \infty$; $\{b_n\}$ є нулями функції $h(t)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b_n|} < \infty$. Тоді існує функція експоненціального типу $u(t)$ з нулями $\{a_n b_m\}_{n,m}$, яку можна подати у вигляді*

$$u(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a_k}\right)^n h_n(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{b_k}\right)^n g_n(t).$$

Доведення. Згідно з попереднім підрозділом (текст після формули (19)), $g(t) = \mathcal{G}(\delta_x)(t)$ і $h(t) = \mathcal{G}(\delta_y)(t)$, де $x, y \in \ell_1$, $x_n = -\frac{1}{a_n}$, $y_n = -\frac{1}{b_n}$. Отже, $u(t) = \mathcal{G}(\delta_x \diamond \delta_y)(t)$. Застосувавши (24), отримуємо твердження теореми. $\square$

Нехай $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ — послідовність комплексних чисел, така що $x \in \ell_{1+d}$ для кожного $d > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n|x_n| < \infty, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{\substack{n \\ |x_n| < r}} x_n \right| < \infty \quad (25)$$

і $\lambda \in \mathbb{C}$. Позначимо через $\delta_{(x,\lambda)}$ гомоморфізм на алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ наступного вигляду:

$$\delta_{(x,\lambda)}(F_1) = \lambda, \quad \delta_{(x,\lambda)}(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k, \quad k > 1.$$

Нагадаємо, що згідно з [62] с. 17, $\limsup_{n \rightarrow \infty} n|x_n|$ збігається з так званою *верхньою щільністю* послідовності $(\frac{1}{x_n})$, яка визначається як $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}(r)}{r}$, де $\mathbf{n}(r)$ позначає *рахункове число* послідовності $(\frac{1}{x_n})$, тобто кількість членів послідовності з абсолютним значенням не більше r . Також, наведемо тут для зручності твердження 14:

Твердження 23. (14) Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді звуження φ на алгебру $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ співпадає з $\varphi_{(x,\lambda)}$ для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ і x , що задовільняє (25).

Насправді, завдяки [10, теоремі 1.3] така послідовність x є єдиною з точністю до перестановки.

Теорема 25. Не існує неперервного характеру вигляду $\delta_{(v,\lambda)}$ в просторі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, де

$$v = \left\{ c_1, \frac{c_2}{2}, \dots, \frac{c_n}{n}, \dots \right\},$$

і $|c_k| = 1$ для кожного k .

Доведення. Припустимо протилежне, тобто що $\delta_{(v,\lambda)}$ є звуженням деякого $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді, згідно з (23),

$$(\varphi \diamond \varphi)(F_k) = \varphi(F_k)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^k \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^k \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m^k \right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (v_n v_m)^k.$$

Тому послідовність $(v_n v_m)_{n,m} = v \diamond v := s$, з точністю до перестановки, є тією, що з'являється в твердженні 14, і тому вона має задовольняти умову (25), тобто послідовність обернених має скінченну верхню щільність.

Позначимо через $d(m)$ кількість дільників натурального числа m . Тоді у послідовності $|s|$ абсолютних значень кожен елемент з абсолютним значенням $1/m$ зустрічається $d(m)$ разів. Таким чином, $|s|$ можна переставити, якщо потрібно, у вигляді

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots, \underbrace{\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}}_{d(m)}, \dots \right).$$

Зокрема, номер останнього входження елемента з абсолютним значенням $\frac{1}{m}$ дорівнює $\sum_{n=1}^m d(n)$. Отже, для послідовності обернених і її рахункового числа $\mathbf{n}(m)$, маємо, що $\mathbf{n}(m) = \sum_{n=1}^m d(n)$. З теорії чисел відомо [12, теорема 3.3], що

$$\sum_{n=1}^m d(n) = m \ln m + 2(\gamma - 1)m + O(\sqrt{m}),$$

де γ — константа Ейлера. Тому ми отримуємо протиріччя, оскільки

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{n}(m)}{m} \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{m \ln m}{m} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \ln m = \infty.$$

□

Наслідок 8. Існує функція експоненціального типу $g(t)$, для якої не існує характеру $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ такого, що $\mathcal{G}(\varphi)(t) = g(t)$.

Доведення. Достатньо взяти функцію експоненціального (скінченного) типу, нулями якої будуть елементи послідовності

$$\left\{ \frac{1}{v_n} \right\} = \{-1, 2, \dots, (-1)^n n, \dots\}.$$

Такою є, наприклад, функція

$$g(t) = \prod_1^\infty \left(1 + (-1)^n \frac{t}{n} \right) \exp \left((-1)^n \frac{t}{n} \right).$$

□

Кожен $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ визначається послідовністю $(\varphi(F_m))$, для якої виконується нерівність $\limsup_n |\varphi(F_m)|^{1/m} \leq R(\varphi)$, оскільки $\|F_m\| \leq 1$. Як наслідок з теореми 25 ми бачимо, що умова $\limsup_m |a_m|^{1/m} < +\infty$, не гарантує існування $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ такого, що $\varphi(F_m) = a_m$. Дійсно, нехай $a_m = \sum_n \frac{1}{n^m}$ для $m > 1$ і довільного a_1 . Тоді послідовність (a_m) є обмеженою, тому $\limsup_m |a_m|^{1/m} \leq 1$ і, якби існував $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ такий, що $\varphi(F_m) = a_m$, то це означатиме, що для послідовності $x := (\frac{1}{n})$, $\varphi(F_m) = \sum_n \frac{1}{n^m}$, тому $\delta_{(x, a_1)} = \varphi|_{P_s(\ell_1)}$.

Питання про те чи кожен елемент з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ можна подати у вигляді цілої функції експоненціального типу з нулями $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ такими, що або $\{a_n\} = \emptyset$ або $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|} < \infty$ буде розглянуто у наступному розділі.

2.3 Спектр алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$

В даному підрозділі ми отримуємо повний опис спектру алгебри Фреше симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі послідовностей ℓ_1 . Це досягається шляхом доведення того факту, що радіус будь-якого гомоморфізму значення в точці δ_x , $x \in \ell_1$, збігається з нормою точки x .

Для кожного елемента $x \in \ell_p$ ми маємо функціонал значення в точці δ_x ,

$$\delta_x: f \rightarrow f(x), \quad f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p),$$

який, очевидно, належить $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Ми говоримо, що вектори $x, y \in \ell_p$ є еквівалентними, $x \sim y$, якщо $\delta_x = \delta_y$. Зрозуміло, що $x \sim y$ тоді і тільки тоді, коли $P(x) = P(y)$ для кожного симетричного полінома P . Легко побачити, що якщо x можна отримати шляхом перестановки координат y , то тоді $x \sim y$. Навпаки, в [10] доведено, що якщо всі координати x і всі координати y відмінні від нуля і $x \sim y$, то x можна отримати шляхом перестановки координат y . У [10] та у прикладі 1 було побудовано однопараметричне сімейство “виняткових” характерів ψ_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$, в $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ для додатних цілих чисел p . Характери ψ_λ не є функціоналами значення в точці і мають таку властивість: $\psi_\lambda(F_p) = \lambda$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для кожного $k > p$. Якщо p не є цілим числом, ми покладемо $\psi_\lambda \equiv 0$.

Коротко нагадаємо деякі означення та результати двох попередніх підрозділів. А саме, були введені деякі алгебраїчні операції на просторі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$: Для заданих $x, y \in \ell_p$ ми встановлюємо

$$x \bullet y = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \dots) \quad \text{і}$$

$$x \diamond y = (x_i y_j)_{i,j=1}^\infty$$

— послідовність, що упорядковує множину $\{x_i y_j: i, j \in \mathbb{N}\}$ одним єдиним індексом у фіксованому порядку. Зауважимо, що $\|x \bullet y\| = \|x\| + \|y\|$ і $\|x \diamond y\| = \|x\| \|y\|$ для всіх $x, y \in \ell_p$. Операції “ $\bullet$ ” та “ $\diamond$ ” не є комутативними або асоціативними, і ми домовляємося, що

$$x \bullet y \bullet z = x \bullet (y \bullet z) \quad \text{і} \quad x \bullet y \diamond z = x \bullet (y \diamond z).$$

Операції “ $\bullet$ ” та “ $\diamond$ ” можуть бути продовжені до комутативних та асоціативних операцій “ $\star$ ” та “ $\Diamond$ ” на спектрі $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, і тому $(\mathcal{M}_{bs}(\ell_p), \star, \Diamond)$ є півкільцем. Зокрема, $\delta_x \star \delta_y = \delta_{x \bullet y}$, $\delta_x \Diamond \delta_y = \delta_{x \diamond y}$, $\psi_\lambda \star \psi_\mu = \psi_{\lambda + \mu}$, та $\psi_\lambda \Diamond \psi_\mu = \psi_{\lambda \mu}$, де $x, y \in \ell_p$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Також,

$$\varphi \star \theta(F_k) = \varphi(F_k) + \theta(F_k) \quad \text{та} \quad \varphi \Diamond \theta(F_k) = \varphi(F_k) \theta(F_k),$$

для всіх $\varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, $k \geq [p]$. Звідси випливає, зокрема, що $\psi_\lambda \Diamond \delta_x = \psi_{\lambda F_p(x)}$, якщо p є цілим числом, і нулем у протилежному випадку.

Нехай

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(G_n), \quad \varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1), \quad t \in \mathbb{C}$$

— генеруюча функція для послідовності $\varphi(G_n)$, де $G_0 = 1$. Відомо, що для кожного фіксованого φ , $\mathcal{G}(\varphi)(t)$ є аналітичною функцією експоненційного типу,

$$\mathcal{G}(\varphi \star \theta)(t) = \mathcal{G}(\varphi)(t) \mathcal{G}(\theta)(t), \quad \varphi, \theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1),$$

і відображення $\varphi \mapsto \mathcal{G}(\varphi)(t)$ є ін’єктивним (але не сюр’єктивним) в множину аналітичних функцій експоненційного типу, що рівні одиниці в нулі. Наприклад,

$$\mathcal{G}(\psi_\lambda)(t) = e^{\lambda t}, \quad \text{та} \quad \mathcal{G}(\delta_x)(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n),$$

для будь-якого $x \in \ell_1$ та $\lambda \in \mathbb{C}$.

Використовуючи цей факт, в наслідку 6 та в твердженні 14 було отримано наступний результат:

Теорема 26. *Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$, тоді існує число $\lambda \in \mathbb{C}$ та елемент $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_p$ для всіх $p > 1$, такий що*

$$\mathcal{G}(\varphi)(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) & \text{якщо } x \in \ell_1, \\ e^{\lambda t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) e^{-tx_n} & \text{якщо } x \notin \ell_1. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо $x \in \ell_1$, то $\varphi = \psi_\lambda \star \delta_x$. Якщо $x \notin \ell_1$, тоді $\varphi = \delta_{(x, \lambda)}$, де

$$\delta_{(x, \lambda)}(F_1) = \lambda \quad \text{і} \quad \delta_{(x, \lambda)}(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k$$

для кожного $k > 1$.

Зауважимо, що не було знайдено жодних характерів вигляду $\delta_{(x,\lambda)}$ для $x \notin \ell_1$. Метою даного підрозділу є показати, що будь-який $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ має вигляд $\varphi = \psi_\lambda \star \delta_x$, забезпечуючи тим самим повний опис спектра $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$.

Відомо, що кожний лінійний неперервний функціонал φ на просторі усіх цілих функцій однієї комплексної змінної $H(\mathbb{C})$ може бути представлений послідовністю

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots), \quad \varphi_j \in \mathbb{C}$$

такою, що

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n|^{\frac{1}{n}} =: R(\varphi) < \infty \quad (27)$$

і що кожна послідовність комплексних чисел, що задовольняє (27), породжує лінійний неперервний функціонал φ такий, що

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n c_n,$$

де $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \in H(\mathbb{C})$. Еквівалентно, використовуючи борелівське перетворення $\varphi \rightsquigarrow \varphi(e^{\lambda t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n \lambda^n}{n!}$ ми можемо ідентифікувати функціонал $\varphi \in H(\mathbb{C})'$ з функцією експоненційного типу $\gamma_\varphi(\lambda) := \varphi(e^{\lambda t})$ і відображення $\varphi \rightsquigarrow \gamma_\varphi$ є топологічним ізоморфізмом з $H(\mathbb{C})'$ на простір аналітичних функцій експоненційного типу $Exp(\mathbb{C})$. Зауважимо, що $R(\varphi)$ є експоненційним типом γ_φ . Цей підхід працює для цілих функцій декількох змінних і навіть для ядерних цілих функцій на банаховому просторі (див. [43]).

Для випадку усіх цілих функцій обмеженого типу маємо наступну ситуацію. Згідно з [14], якщо $\varphi \in H_b(X)'$, а φ_n є її звуженням на банаховий простір усіх n -однорідних поліномів $\mathcal{P}(^n X)$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^{\frac{1}{n}} < \infty. \quad (28)$$

Навпаки: якщо послідовність функціоналів (φ_n) , $\varphi_n \in \mathcal{P}(^n X)'$, задовольняє (28), то вона породжує функціонал φ , такий що

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(f_n),$$

де $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ є рядом Тейлора функції $f \in H_b(X)$.

Границя, що з'являється у (28), співпадає [14] з $R(\varphi)$, так званою *радіус-функцією* функціонала φ , яка визначається як інфімум $r > 0$, для якого φ є неперервним відносно норми рівномірної збіжності в $H_b(X)$ на кулі радіуса r , з центром в нулі.

На початку підрозділу 2.1 показано, що всі згадані результати про $H_b(X)$ також справедливі для алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Позначимо через $R_p(\varphi)$ радіус елемента $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Лема 5. *Нехай $\delta_\lambda = \delta_{(\lambda, 0, 0, \dots)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ та $\phi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді*

$$R_1(\delta_\lambda \diamond \phi) = |\lambda| R_1(\phi).$$

Доведення. Очевидно, що $F_k(\delta_\lambda \diamond \phi) = F_k(\delta_\lambda) F_k(\phi) = \lambda^k F_k(\phi)$. Нехай P_n є довільним n -однорідним симетричним поліномом на ℓ_1 . Тоді

$$P_n(x) = \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} F_1^{k_1}(x) F_2^{k_2}(x) \dots F_n^{k_n}(x)$$

і, отже, $P_n(\delta_\lambda \diamond \phi) = \lambda^n P_n(\phi)$. Звідси

$$R_1(\delta_\lambda \diamond \phi) = \limsup_{\|P_n\| \leq 1} |\lambda^n \phi(P_n)|^{1/n} = |\lambda| R_1(\phi).$$

□

Наступна лема, ймовірно, відома.

Лема 6. *Для будь-якого $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$,*

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty = \max_n |x_n|.$$

Доведення. В [44, с. 28-29, теорема 20] доведено, що для будь-якого скінченного набору додатних чисел $a_1, \dots, a_m$ має місце рівність

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m a_n^p \right)^{1/p} = \max_n a_n.$$

Для заданого $\varepsilon > 0$, оберемо число m так, щоб $\max_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \max_{n \leq m} |x_n|$ і $\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$. Тоді

$$\begin{aligned} \|x\|_p &\leq \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{1/p} + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^m |x_n|^p \right)^{1/p} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, $\limsup_p \|x\|_p \leq \limsup_p \|(x_1, \dots, x_m)\|_p + \varepsilon \leq \|x\|_{\infty} + \varepsilon$ і, таким чином, $\limsup_p \|x\|_p \leq \|x\|_{\infty} + \varepsilon$. Звідси, $\limsup_p \|x\|_p \leq \|x\|_{\infty}$.

З іншого боку, $\|x\|_p \geq \|x\|_{\infty}$ і тому $\liminf_p \|x\|_p \geq \|x\|_{\infty}$. Таким чином, шуканий ліміт існує і $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_{\infty}$. $\square$

Теорема 27. Для кожного $x \in \ell_1$,

$$R_1(\delta_x) = \|x\|_1.$$

Доведення. Очевидно, що $R_1(\delta_x) \leq \|x\|_1$. Припустимо, що існує $x \in \ell_1$ з $\|x\|_1 = 1$ та $R_1(\delta_x) = c < 1$. Якщо x має лише одну ненульову координату x_m , то $|x_m| = 1$ і $R_1(\delta_x) \geq |F_m(x)|^{1/m} = 1$. Отже, кількість ненульових координат елемента x більша за 1, а модуль всіх координат x менший за 1. Позначимо $b = \max_n |x_n|$. Очевидно, $0 < b < 1$. Виберемо λ таким чином, що

$$1 < \lambda < \min\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}\right).$$

Таке число завжди існує, оскільки обидва $1/c$ та $1/b$ більші за 1. Позначимо $z = \lambda x$. Тоді z має наступні властивості:

1. $\|z\|_1 > 1$ оскільки $\|x\|_1 = 1$ і $\lambda > 1$.
2. $R_1(\delta_z) = R_1(\delta_{\lambda x}) = R_1(\delta_{\lambda} \diamond \delta_x) = \lambda c < 1$ за лемою 5.
3. $|z_n| < 1$ для кожної координати z_n вектора z , оскільки $\lambda b < 1$.

Тому існує число n , для якого виконується

$$\sum_{k=1}^n |z_k| > 1 + \epsilon$$

для деякого $\epsilon > 0$. Оскільки

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^t, \quad t > 1$$

є неперервною функцією, існує число $t = q > 1$ таке, що $\|z\|_q > 1$. З іншого боку, існує число $r > q$ таке, що $\|z\|_r < 1$. Дійсно, оскільки $\lim_{p \rightarrow \infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty < 1$, звідси випливає, що $\|z\|_r < 1$ для деякого $q < r < \infty$.

Позначимо

$$w_n(z) = \delta_z \star (\delta_z \diamond \delta_z) \star \dots \star (\delta_z \diamond \overset{n}{\dots} \diamond \delta_z) = \bigstar_{i=1}^n \delta_z^{\diamond i} \in M_{bs}(\ell_1).$$

З властивостей операцій " $\star$ " та " $\diamond$ " і властивостей радіус-функції випливає, що

$$R_1(w_n) \leq \sum_{k=1}^n (R_1(\delta_z))^k \leq \frac{R_1(\delta_z)}{1 - R_1(\delta_z)} < \infty.$$

Оскільки множина характерів $\{\phi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1) : R_1(\phi) \leq C\}$ для деякого $C > 0$ є поточною обмеженою та замкненою, вона є компактною підмножиною в $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ в топології Гельфанда, тобто в $\ast$ -слабкій топології. Таким чином, послідовність $\{w_n\}$ має граничну точку $w_z \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$.

Згідно з доведеним в підрозділі 2.1, генеруюча функція, асоційована з базисом G_n ,

$$\mathcal{G}(w_z)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_z(G_n) t^n, \quad t \in \mathbb{C},$$

є функцією експоненційного типу. Нехай ξ_n — множина нулів цієї функції. Згідно з підрозділом 2.1, $\xi_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і якщо $y_n = -1/\xi_n$, то $(y_n) \in \ell_p$ для будь-якого $p > 1$ і

$$w_z(F_k) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n^k, \quad k > 1$$

(див. теорему 26). З іншого боку,

$$w_z(F_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \bigstar_{m=1}^{n_j} \delta_z^{\diamond m}(F_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{n_j} F_k(z \diamond \overset{m}{\dots} \diamond z).$$

Розглянемо послідовність $u = (u_1, \dots, u_n, \dots)$, отриману шляхом звичайного упорядкування головної діагоналі матриці розміром $\infty \times \infty$:

$$\begin{pmatrix} z \\ z \diamond z \\ \dots \\ z \diamond \dots \diamond z \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Щоб переконатися, що u належить ℓ_r , розглянемо будь-яку часткову суму $\sum_1^s |u_i|^r$; така сума виникає з елементів у головному $s \times s$ мінорі, тому

$$\|(u_1, \dots, u_s)\|_r \leq \sum_{i=1}^s \|z \diamond \dots \diamond z\|_r = \sum_{i=1}^s \|z\|_r^i \leq \frac{\|z\|_r}{1 - \|z\|_r}.$$

Таким чином, $u \in \ell_r$, як і було потрібно.

Крім того, для будь-якого $k > r$ маємо:

$$F_k(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k = \sum_{m=1}^{\infty} F_k(z \diamond \dots \diamond z) = w_z(F_k).$$

Отже, для будь-якого $k > r$ виконується: $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^k$. Звідси випливає, що послідовність $y = (y_1, y_2, \dots)$ еквівалентна послідовності u в ℓ_r , а також послідовності w , яка отримується з послідовності u шляхом видалення всіх нульових членів. Іншими словами, послідовності y і w співпадають з точністю до перестановки. Крім того,

$$\|z \bullet z \diamond z \bullet \dots \bullet z \diamond \dots \diamond z \bullet\|_q^q = \sum_{n=1}^m \|z\|_q^{nq},$$

тому жодна з послідовностей w і u не може належати ℓ_q , оскільки $|z|_q > 1$. Отже, ми приходимо до суперечності, оскільки послідовність y належить ℓ_q . $\square$

Наслідок 9. Для кожного $x \in \ell_1$ існує послідовність n_j -однорідних поліномів $P_{n_j} \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$ таких, що $|P_{n_j}| = 1$ і

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |P_{n_j}(x)|^{1/n_j} = \|x\|_{\ell_1}.$$

Ми кажемо, що підмножина $\mathcal{P}_0(X)$ множини $\mathcal{P}(X)$ є *нормуючою* для X , якщо існує послідовність n_j -однорідних поліномів $P_{n_j} \in \mathcal{P}_0(X)$ таких, що $|P_{n_j}| = 1$ і

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |P_{n_j}(x)|^{1/n_j} = \|x\|_X.$$

Наслідок 9 стверджує, що $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ є нормуючою підмножиною в ℓ_1 .

Позначимо через $\mathcal{P}_{ks}(\ell_1)$ підалгебру в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, породжену поліномами $\{F_{nk}\}_{n=1}^\infty$.

Твердження 24. *Алгебра $\mathcal{P}_{ks}(\ell_1)$ є нормуючою для ℓ_1 для кожного натурального числа k .*

Доведення. Нехай $x \in \ell_1$ і $k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ k -ті корені з одиниці. Покладемо

$$y_x = \left(\frac{x}{k} \bullet \frac{\alpha_1 x}{k} \bullet \dots \bullet \frac{\alpha_{k-1} x}{k} \right).$$

Тоді $\|y_x\|_1 = \|x\|_1$. Нехай $\varepsilon > 0$ і P – однорідний поліном у $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ такий, що $|P| = 1$ і $\left| \|P(y_x)\|^{1/\deg P} - \|y_x\|_1 \right| < \varepsilon$. Такий поліном існує за наслідком 9. Розглянемо поліном

$$Q(x) = P\left(\frac{x}{k} \bullet \frac{\alpha_1 x}{k} \bullet \dots \bullet \frac{\alpha_{k-1} x}{k} \right).$$

Легко перевірити, що Q є однорідним поліномом в $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, причому $Q(x) = P(y_x)$, $\deg Q = \deg P$ і $|Q| = 1$. З іншого боку, якщо $m = nk + r$ для $r < k$, то

$$\begin{aligned} F_{nk+r}(y_x) &= F_m(y_x) = \sum_{j=0}^{k-1} F_m\left(\frac{\alpha_j x}{k}\right) = F_m\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^r = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{якщо } r \neq 0 \\ \frac{F_m(x)}{k^{m-1}} & \text{якщо } r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, $Q \in \mathcal{P}_{ks}(\ell_1)$. З цього випливає, що

$$\left| \|Q(x)\|^{1/\deg Q} - \|x\|_1 \right| = \left| \|P(y_x)\|^{1/\deg P} - \|y_x\|_1 \right| < \varepsilon.$$

□

Твердження 25. *Для кожного $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ і $k \in \mathbb{N}$ маємо, що $R_p(\varphi) = \sup_n \|\varphi_n\|^{1/n} = \sup_n \|\varphi_{nk}\|^{1/nk}$.*

Доведення. Зауважимо, що оскільки $\mathcal{P}_s({}^n\ell_p) \cdot \mathcal{P}_s({}^m\ell_p) \subset \mathcal{P}_s({}^{n+m}\ell_p)$, маємо $\|\varphi_n\| \|\varphi_m\| \leq \|\varphi_{n+m}\|$. Зокрема, $\|\varphi_{kn}\| = \|\varphi_{k(n-1)+k}\| \geq \|\varphi_{k(n-1)}\| \cdot \|\varphi_k\| \geq \dots \geq \|\varphi_k\|^n$. Отже, отримуємо

$$\|\varphi_{kn}\|^{1/kn} \geq \|\varphi_k\|^{1/k}. \quad (29)$$

Очевидно, що $R_p(\varphi) \leq \sup_n \|\varphi_n\|^{1/n}$. Якщо для деякого λ виконується $R_p(\varphi) < \lambda < \sup_n \|\varphi_n\|^{1/n}$, то існуватиме деяке $k \in \mathbb{N}$ таке, що $\lambda < \|\varphi_k\|^{1/k}$, і отже, $\lambda < \|\varphi_{kn}\|^{1/kn}$ для всіх n . Таким чином, ми приходимо до суперечності $\lambda < \limsup \|\varphi_{nk}\|^{1/nk} = R_p(\varphi)$.

Для другої рівності, скористаємося (29). □

Нехай $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Ми знаємо, що канонічне вкладення $\ell_{p_1} \xrightarrow{i} \ell_{p_2}$ має норму 1. Через композицію з i (або звуження) отримуємо відображення $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_{p_2}) \mapsto f \circ i \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_{p_1})$ і відповідне супряжене відображення $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_{p_1}) \mapsto \tilde{\varphi} \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_{p_2})$.

Лема 7. *Нехай $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$. Для кожного $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_{p_1})$ маємо, що $\|\tilde{\varphi}_n\|_{p_2} \leq \|\varphi_n\|_{p_1}$. Внаслідок цього, $R_{p_2}(\tilde{\varphi}) \leq R_{p_1}(\varphi)$.*

Доведення. Зауважимо, що $\|Q \circ i\|_{p_1} \leq \|Q\|_{p_2}$, і що

$$\{Q \circ i : Q \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_{p_2}) \text{ з } \|Q\|_{p_2} \leq 1\} \subset \{P \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_{p_1}) : \|P\|_{p_1} \leq 1\}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_n\|_{p_2} &= \sup_{\{Q \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_{p_2}) : \|Q\|_{p_2} \leq 1\}} |\tilde{\varphi}(Q)| = \sup_{\{Q \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_{p_2}) : \|Q\|_{p_2} \leq 1\}} |\varphi(Q \circ i)| \leq \\ &\sup_{\{P \in \mathcal{P}_s({}^n\ell_{p_1}) : \|P\|_{p_1} \leq 1\}} |\varphi(P)| = \|\varphi_n\|_{p_1}. \end{aligned}$$

□

Теорема 28. *Для кожного $x \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, має місце рівність: $R_p(\delta_x) = \|x\|_p$.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $p = m/k \geq 1$, $m, k \in \mathbb{N}$. Для заданого $x = (x_n) \in \ell_p$ позначимо через x^p послідовність $(x_n^p) = (x_n^{m/k}) \in \ell_1$. Зауважимо, що

$$\|x\|_p^p = \|x^p\|_1. \quad (30)$$

З твердження 24 випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує однорідний поліном $Q \in \mathcal{P}_{ks}(\ell_1)$, $\|Q\| = 1$, такий що

$$\left| \|x^p\|_1 - |Q(x^p)|^{1/\deg Q} \right| < \varepsilon.$$

Оскільки $Q \in \mathcal{P}_{ks}(\ell_1)$, ми можемо записати

$$Q = \sum_{km_1 + \dots + sm_s = \deg Q} a_{1,\dots,s} F_k^{m_1} F_{2k}^{m_2} \dots F_{sk}^{m_s},$$

і $\deg Q = nk$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$F_{sk}(x^p) = F_{sk}(x^{m/k}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{ms} = F_{ms}(x).$$

Таким чином,

$$Q(x^p) = \sum_{mm_1 + \dots + mkm_s = nm} a_{1,\dots,s} F_1^{m_1}(x) F_2^{m_2}(x) \dots F_s^{m_s}(x).$$

Покладемо

$$T_Q(x) = Q(x^p) = \sum_{mm_1 + \dots + mkm_s = nm} a_{1,\dots,s} F_1^{m_1}(x) F_2^{m_2}(x) \dots F_s^{m_s}(x).$$

Тоді T_Q є однорідним поліномом на ℓ_p і $\deg T_Q = nm$.

Для кожного nk -однорідного поліному $Q \in \mathcal{P}_{ks}({}^{nk}\ell_1)$ маємо, що $T_Q \in \mathcal{P}_s({}^{mn}\ell_p)$ і

$$\|T_Q\|_p = \sup_{\|z\|_p=1} |Q(z^p)| \leq \sup_{\|y\|_1=1} |Q(y)| = \|Q\|_1.$$

Внаслідок цього,

$$\{T_Q : Q \in \mathcal{P}_{ks}({}^{nk}\ell_1) \text{ with } \|Q\|_1 \leq 1\} \subset \{P \in \mathcal{P}_s({}^{mn}\ell_p) : \|P\|_p \leq 1\}.$$

Тоді

$$\|(\delta_{x^p})_{nk}\|_1 = \sup_{\{Q \in \mathcal{P}_{ks}({}^{nk}\ell_1) : \|Q\|_1 \leq 1\}} |Q(x^p)| \leq \sup_{\{P \in \mathcal{P}_s({}^{mn}\ell_p) : \|P\|_p \leq 1\}} |P(x)| = \|(\delta_x)_{mn}\|_p.$$

Отже, $\|(\delta_{x^p})_{nk}\|_1^{k/nk} \leq \|(\delta_x)_{mn}\|_p^{m/mn} \leq R_p(\delta_x)^m$, звідки $R_1(\delta_{x^p})^k \leq R_p(\delta_x)^m$. З твердження 25 і теореми 27 отримуємо, що

$$\|x^p\|_1^k = R_1(\delta_{x^p})^k \leq R_p(\delta_x)^m \leq \|x\|_p^m$$

і тому

$$\|x^p\|_1 = R_1(\delta_{x^p}) \leq R_p(\delta_x)^p \leq \|x\|_p^p.$$

Враховуючи (30), маємо $R_p(\delta_x) = \|x\|_p$.

Нехай тепер $1 \leq p < \infty$ — довільне ірраціональне число. Для кожного $\epsilon > 0$ ми можемо взяти число $r > 0$ таке, що $p+r \in \mathbb{Q}$, $r < \epsilon$ і, використовуючи лему 7, маємо

$$R_p(\delta_x) \geq R_{p+r}(\delta_x) = \|x\|_{p+r}.$$

Оскільки це вірно для кожного $\epsilon > 0$, маємо, що $R_p(\delta_x) \geq \|x\|_p$. Таким чином, $R_p(\delta_x) = \|x\|_p$, що і потрібно було довести. $\square$

З теореми 28 ми можемо отримати аналог твердження 24 для загального випадку ℓ_p .

Твердження 26. *Алгебра $\mathcal{P}_{ks}(\ell_p)$ є нормуючою для ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, для кожного натурального числа k .*

Доведення. З теореми 28 випливає, що $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ є нормуючою в ℓ_p .

Нехай $x \in \ell_p$, $k \in \mathbb{N}$, і $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ — k -і корені з 1. Позначимо

$$y_x = \left(\frac{x}{k^{1/p}} \bullet \frac{\alpha_1 x}{k^{1/p}} \bullet \dots \bullet \frac{\alpha_{k-1} x}{k^{1/p}} \right).$$

Тоді $\|y_x\|_p = \|x\|_p$. Нехай $\epsilon > 0$ і P — однорідний поліном в $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ такий, що $\|P\| = 1$ та $\left| |P(y_x)| |^{1/\deg P} - \|y_x\|_1 \right| < \epsilon$. Розглянемо поліном

$$Q(x) = P\left(\frac{x}{k} \bullet \frac{\alpha_1 x}{k} \bullet \dots \bullet \frac{\alpha_{k-1} x}{k} \right).$$

Як і в твердженні 24, можна перевірити, що $Q \in \mathcal{P}_{ks}(\ell_p)$, $Q(x) = P(y_x)$, $\|Q\| = 1$, $\deg Q = \deg P$, і

$$\left| |Q(x)| |^{1/\deg Q} - \|x\|_1 \right| = \left| |P(y_x)| |^{1/\deg P} - \|y_x\|_1 \right| < \epsilon.$$

$\square$

Теорема 29. Нехай $x \in \ell_p$, $1 \leq p < \infty$ і $\|x\| < 1$. Тоді існує послідовність $\{z_n\} \subset \ell_p$, $\|z_n\| = 1$ така, що для кожного $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$,

$$f(z_n) \rightarrow f(x) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Іншими словами, функціонали значення в точках на одиничній сфері простору ℓ_1 є щільними в множині функціоналів значення в точках на одиничній кулі в топології Гельфанда.

Доведення. Нехай $y \in \ell_p$ такий, що $\|y\|^p = 1 - \|x\|^p$. Крім того, якщо p - ціле число, то припустимо, що $F_p(y) = 0$. Розглянемо наступну послідовність:

$$\begin{aligned} z_1 &= x \bullet y \\ z_2 &= x \bullet \frac{y}{2^{1/p}} \bullet \frac{y}{2^{1/p}} \\ &\dots \\ z_n &= x \bullet \frac{y}{n^{1/p}} \bullet \dots \bullet \frac{y}{n^{1/p}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Тоді $\|z_n\| = 1$ і $F_p(z_n) = F_p(x) + F_p(y) = F_p(x)$, якщо p - ціле число. Крім того, для кожного $k > p$,

$$F_k(z_n) = F_k(x) + \frac{nF_k(y)}{n^{p/k}} \rightarrow F_k(x) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, для кожного полінома $P \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$, $P(z_n) \rightarrow P(x)$. Оскільки $\{z_n\}$ обмежена, а кожна функція $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ наближається поліномами рівномірно на обмежених множинах, ми отримуємо, що $f(z_n) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Наслідок 10. Радіус-функція є розривною в топології Гельфанда як функція з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ в $\mathbb{C}$.

Доведення. Нехай $x = 0$ і $\{z_n\}$ така, як в теоремі 29. Згідно з теоремою 29, $\delta_{z_n} \rightarrow \delta_0$ в топології Гельфанда на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. За теоремою 27, $R_1(\delta_{z_n}) = \|z_n\| = 1$ але $R_1(\delta_0) = 0$. $\square$

Теорема 30. Нехай $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. Тоді $\varphi = \psi_\lambda \star \delta_x$ для деяких $x \in \ell_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доведення. Якщо це не вірно, то з теореми 26 випливає, що існує число $\lambda \in \mathbb{C}$ і елемент $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$, $y \in \ell_p$ для всіх $p > 1$ і $y \notin \ell_1$ такі, що $\varphi(F_1) = \lambda$ і $\varphi(F_k) = F_k(y)$, $k > 1$. Нехай $c = R_1(\varphi) < \infty$. З теореми 28 випливає, що $R_p(\varphi) = \|y\|_p$, $p > 1$. Оскільки $y \notin \ell_1$, існує $q > 1$ такий, що $\|y\|_q > c$. Отже, $R_q(\varphi) > R_1(\varphi)$, що суперечить лемі 7. $\square$

Зрозуміло, що $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ містить копію $\mathbb{C}$: $\lambda \mapsto \psi_\lambda$. Але ми не знаємо, чи містить $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ копію $\mathbb{C}^n$ для деякого $n > 1$?

2.4 Спектр алгебри симетричних цілих функцій на просторі ℓ_p

В даному підрозділі за допомогою аналога елементарних симетричних поліномів на ℓ_p запропоновано опис спектра алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на ℓ_p у вигляді мультиплікативної напівгрупи аналітичних функцій на комплексній площині. Отримано деякі застосування до алгебри всіх аналітичних функцій на ℓ_p .

Як і раніше, через $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ будемо позначати множину неперервних комплексних гомоморфізмів (характерів) алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ і через $M_s(\ell_p)$ — множину обмежених комплексних гомоморфізмів алгебри симетричних аналітичних функцій $H_s(\ell_p)$.

Послідовність (однорідних) поліномів (P_n) у $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ називається (*однорідним*) алгебраїчним базисом $\mathcal{P}_s(\ell_p)$, якщо для кожного полінома $Q \in \mathcal{P}_s(\ell_p)$ існує єдиний поліном q від скінченного числа m змінних, такий що

$$Q(x) = q(P_1(x), \dots, P_m(x)), \quad x \in \ell_p.$$

Відомо [39, 73], що алгебра всіх симетричних поліномів на ℓ_p , $\mathcal{P}_s(\ell_p)$, має алгебраїчну базу

$$\left\{ F_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n, \quad n = [p], [p] + 1 \dots \right\},$$

де $[p]$ — найменше ціле число, яке є більшим або дорівнює p .

Існування алгебраїчних базисів у $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ є дуже важливим для дослідження спектра алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$, оскільки, як і у випадку алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$, будь-який характер φ у $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ може бути повністю визначений його значеннями на елементах алгебраїчного базису (P_n) простору $\mathcal{P}_s(\ell_p)$. Таким чином, використовуючи відповідність

$$\varphi \rightsquigarrow (\varphi(P_1), \dots, \varphi(P_n), \dots),$$

ми можемо описати $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ як підмножину комплексних послідовностей. Ми маємо різні описи спектра для різних алгебраїчних базисів, які виявляють

його деякі різні властивості та структури. Наприклад, представлення

$$\varphi \rightsquigarrow (\varphi(F_{[p]}), \dots, \varphi(F_n), \dots)$$

є адитивним відносно операції згортки "★" на $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$.

Для кожного $x \in \ell_p$ існує так званий характер *значення в точці* $\delta_x \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ такий, що $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$. Зауважимо, що $\delta_x = \delta_y$ тоді і тільки тоді, коли $P(x) = P(y)$ для кожного симетричного полінома P . Якщо p є цілим числом, то $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$ допускає однопараметричне сімейство так званих виняткових характерів ψ_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, що $\psi_\lambda(F_p) = \lambda$ і $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > p$ (підрозділ 2.1). У підрозділі 2.3 було доведено, що кожен характер з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$ має вигляд $\delta_x \star \psi_\lambda$ для деяких $x \in \ell_1$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Ми не знаємо, чи це справедливо для інших $p > 1$. Зауважимо, що комплексний гомоморфізм φ на $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли радіус-функція φ , $R(\varphi)$, є скінченною (підрозділ 2.1). Радіус-функцію можна обчислити як

$$R(\varphi) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|^{1/n},$$

де φ_n — звуження φ на нормований простір n -однорідних поліномів. У підрозділі 2.3 доведено, що $R(\delta_x) = \|x\|$, $x \in \ell_p$ і $R(\psi_\lambda) = |\lambda|$.

Елементарні симетричні поліноми та їхня генеруюча функція на ℓ_p .

Нагадаємо, що інший природний базис, який корисний для представлення спектра у випадку $p = 1$, є базис *елементарних симетричних поліномів*, заданий за допомогою

$$G_n(x) = \sum_{k_1 < \dots < k_n} x_{k_1} \cdots x_{k_n}$$

(див., наприклад, [10]). Складність полягає в тому, що базис елементарних симетричних поліномів не можна безпосередньо поширити на випадок ℓ_p для $p > 1$, оскільки в цьому випадку ряд справа розбігається для кожного n . Однак, згідно з відомою формулою Ньютона, для кожного $x \in \ell_1$, ми можемо записати

$$nG_n(x) = F_1(x)G_{n-1}(x) - F_2(x)G_{n-2}(x) + \cdots + (-1)^{n+1}F_n(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Покладемо в (31) $F_k = 0$ для $k < p$ і тоді ми можемо визначити (див. [46])

$$nG_n^{(p)}(x) = (-1)^{[p]+1}F_{[p]}(x)G_{n-[p]}^{(p)}(x) - F_{[p]+1}(x)G_{n-[p]-1}^{(p)}(x) + \cdots + (-1)^{n+1}F_n(x), \quad (32)$$

$$n \geq [p].$$

Твердження 27. Поліноми $\{G_n^{(p)} : n \geq [p]\}$ є алгебраїчним базисом у $\mathcal{P}_s(\ell_p)$.

Доведення. Доведення безпосередньо випливає з того факту, що поліноми F_n , $n \geq [p]$ утворюють алгебраїчний базис у $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ та з оборотності (32). $\square$

Нехай $\mathcal{G}^{(p)}(x)(t)$ є так званою генеруючою функцією послідовності $(G_n^{(p)}(x))$,

$$\mathcal{G}^{(p)}(x)(t) = 1 + \sum_{n=[p]}^{\infty} t^n G_n^{(p)}(x), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Загальновідомо (див., наприклад, [64], ст. 3), що якщо x має лише скінченну кількість ненульових координат, то

$$\mathcal{G}(x)(t) = \mathcal{G}^{(1)}(x)(t) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right).$$

Це співвідношення все ще вірне для $x \in \ell_1$ (підрозділ 2.1.). Таким чином, для кожного $x \in \ell_1$,

$$\mathcal{G}^{(p)}(x)(t) = \exp \left(\sum_{k=1}^{[p]-1} t^k \frac{F_k(-x)}{k} \right) \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right). \quad (33)$$

З іншого боку, ми знаємо, що

$$\exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n).$$

Поєднуючи з (33), ми маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(p)}(x)(t) &= \exp \left(\sum_{k=1}^{[p]-1} t^k \frac{F_k(-x)}{k} \right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + tx_n) = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \exp \left(-tx_n + \frac{t^2 x_n^2}{2} + \cdots + \frac{t^{[p]} (-x_n)^{[p]}}{[p]} \right) (1 + tx_n). \end{aligned} \quad (34)$$

З теорії цілої функції однієї комплексної змінної [62, с. 29-30] ми маємо, що

$$\prod_{n=1}^{\infty} \exp \left(-tx_n + \frac{t^2 x_n^2}{2} + \cdots + \frac{t^{[p]} (-x_n)^{[p]}}{[p]} \right) (1 + tx_n)$$

є канонічним добутком Вейєрштрасса, що збігається для кожного $x \in \ell_p$ до цілої функції t порядку $\rho = \inf\{q > 0: x \in \ell_q\}$ з нулями $a_n = -\frac{1}{x_n}$, $x_n \neq 0$. Таким чином, ми довели наступну теорему:

Теорема 31. *Для кожного фіксованого $x \in \ell_p$ генеруюча функція (34) є цілою функцією t порядку $\rho = \inf\{q > 0: x \in \ell_q\}$ з нулями $a_n = -\frac{1}{x_n}$ для $x_n \neq 0$.*

Наслідок 11. *Функція*

$$x \mapsto \mathcal{G}^{(p)}(x)(1) = 1 + \sum_{n=[p]}^{\infty} (G_n^{(p)})(x)$$

є аналітичною функцією на просторі ℓ_p .

Доведення. $\mathcal{G}^{(p)}(x)(1)$ є коректно визначеним збіжним рядом неперервних однорідних поліномів. Отже, він — аналітичний. $\square$

Зауважимо, що $\mathcal{G}^{(1)}(x)(1)$ має обмежений тип (підрозділ 2.1.). Але ми не знаємо, чи це справедливо для $p > 1$.

Представлення спектру $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Легко перевірити, що

$$G_n(x \bullet y) = \sum_{k=0}^n G_k(x) G_{n-k}(y), \quad x, y \in \ell_1.$$

В підрозділі 2.1. було показано, що

$$\varphi \star \theta(G_n) = \sum_{k=0}^n \varphi(G_k) \theta(G_{n-k})$$

для довільних характерів φ, θ з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_1)$. З цього відношення було зроблено висновок, що

$$\mathcal{G}(\varphi \star \theta) = \mathcal{G}(\varphi) \mathcal{G}(\theta).$$

Наступна теорема розширює цю формулу для випадку ℓ_p .

Теорема 32. Для довільних характерів φ та θ з $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$, $1 \leq p < \infty$,

(i)

$$\varphi \star \theta(G_n^{(p)}) = \sum_{k=0}^n \varphi(G_k^{(p)}) \theta(G_{n-k}^{(p)});$$

(ii)

$$\mathcal{G}^{(p)}(\varphi \star \theta) = \mathcal{G}^{(p)}(\varphi) \mathcal{G}^{(p)}(\theta).$$

Тут ми припускаємо, що $G_0^{(p)} = 1$ і $G_k^{(p)} = 0$ для $k < p$.

Доведення. Спочатку припустимо, що $p \in \mathbb{N}$. Для заданого $x \in \ell_p$ ми визначаємо наступний характер $\eta_x^{(p)} \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ таким чином:

$$\eta_x^{(p)} = \delta_x \star \psi_{-F_p(x)}^{(p)}.$$

Тоді

$$\eta_x^{(p)}(F_p) = F_p(x) - F_p(x) = 0 \quad \text{і} \quad \eta_x^{(p)}(F_k) = F_k(x), \quad k > p.$$

Зауважимо, що радіус-функція

$$R(\eta_x^{(p)}) \leq R(\delta_x) + R(\psi_{-F_p(x)}^{(p)}) \leq 2\|x\|_p^p.$$

З визначення $\eta_x^{(p)}$ і формули (32) випливає, що

$$G_n^{(p+1)}(x) = \eta_x^{(p)}(G_n^{(p)}) = \delta_x \star \psi_{-F_p(x)}^{(p)}(G_n^{(p)}), \quad x \in \ell_p, \quad n \geq p+1, \quad (35)$$

і

$$\eta_x^{(p)}(G_p^{(p)}) = \eta_x^{(p)}\left((-1)^{p+1} \frac{F_p}{p}\right) = 0.$$

Крім того,

$$\eta_{x \bullet y}^{(p)} = \delta_{x \bullet y} \star \psi_{-F_p(x) - F_p(y)}^{(p)} = \delta_x \star \delta_y \star \psi_{-F_p(x)}^{(p)} \star \psi_{-F_p(y)}^{(p)} = \eta_x^{(p)} \star \eta_y^{(p)},$$

$x, y \in \ell_p$. Ми стверджуємо, що для всіх $x, y \in \ell_p$,

$$G_n^{(p+1)}(x \bullet y) = \sum_{k=0}^n \eta_x^{(p)}(G_k^{(p)}) \eta_y^{(p)}(G_{n-k}^{(p)}) = \sum_{k=0}^n (G_k^{(p+1)}(x)) (G_{n-k}^{(p+1)}(y)), \quad (36)$$

де $G_0^{(p+1)} = 1$ і $G_1^{(p+1)} = G_2^{(p+1)} = \dots = G_p^{(p+1)} = 0$. Дійсно, для $p = 1$ маємо

$$G_n^{(2)}(x \bullet y) = \eta_{x \bullet y}^{(1)}(G_n^{(1)}) = \eta_x^{(1)} \star \eta_y^{(1)}(G_n^{(1)}) =$$

$$\sum_{k=0}^n \eta_x(G_k^{(1)}) \eta_y(G_{n-k}^{(1)}) = \sum_{k=0}^n (G_k^{(2)}(x))(G_{n-k}^{(2)}(y)).$$

Припустимо, що рівняння (36) виконується для кожного $G_n^{(m+1)}$ такого, що $m < p$. Тоді

$$\begin{aligned} G_n^{(p+1)}(x \bullet y) &= \eta_{x \bullet y}^{(p)}(G_n^{(p)}) = \eta_x^{(p)} \star \eta_y^{(p)}(G_n^{(p)}) = \\ &= \sum_{k=1}^n \eta_x^{(p)}(G_k^{(p)}) \eta_y^{(p)}(G_{n-k}^{(p)}) = \sum_{k=1}^n (G_k^{(p+1)}(x))(G_{n-k}^{(p+1)}(y)). \end{aligned}$$

Таким чином, (36) доведено. Зауважимо, що і ліва, і права частини рівності

$$G_n^{(p+1)}(x \bullet y) = \sum_{k=0}^n (G_k^{(p+1)}(x))(G_{n-k}^{(p+1)}(y))$$

формально визначені, якщо x і y належать ℓ_{p+1} . Оскільки це вірно для $x, y \in \ell_p$, це має бути вірним, якщо x і $y \in \ell_{p+1}$, оскільки ℓ_p щільний в ℓ_{p+1} і функції $G_k^{(p+1)}$, $k \in \mathbb{N}$ неперервні на ℓ_{p+1} . Крім того, ми знаємо, що рівність виконується, якщо $p+1=1$. Отже, для кожного цілого $1 \leq p < \infty$ і $n \geq p$ маємо:

$$G_n^{(p)}(x \bullet y) = \sum_{k=0}^n (G_k^{(p)}(x))(G_{n-k}^{(p)}(y)). \quad (37)$$

Якщо $p > 1$ є нецілим числом, то $\ell_p \subset \ell_{[p]}$, і тому (37) є вірним для $n \geq [p]$.

Нехай тепер φ і $\theta \in \mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$. Використовуючи означення $\varphi \star \theta$ і (37), ми маємо

$$\varphi \star \theta(G_n^{(p)}) = \varphi \star \theta\left(\sum_{k=0}^n G_k^{(p)} G_{n-k}^{(p)}\right) = \sum_{k=0}^n \varphi(G_k^{(p)}) \theta(G_{n-k}^{(p)}) \quad (38)$$

для $n \geq [p]$. Таким чином, п. (i) доведено. Щоб довести пункт (ii), зауважимо, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi \star \theta(G_n^{(p)}) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n \varphi(G_k^{(p)}) \theta(G_{n-k}^{(p)}) = \mathcal{G}^{(p)}(\varphi) \mathcal{G}^{(p)}(\theta).$$

□

З теореми 32 випливає, що $\varphi \mapsto \varphi(G_k^{(p)})$ є представленням $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ у вигляді мультиплікативної напівгрупи цілих функцій комплексної змінної.

Повернемося до формули (31). У випадку цілого p вона набуває вигляду:

$$nG_n^{(p)}(x) = (-1)^{p+1}F_p(x)G_{n-p}^{(p)}(x) + (-1)^{p+2}F_{p+1}(x)G_{n-p-1}^{(p)}(x) + \dots + (-1)^{n-p+1}F_{n-p}(x)G_p^{(p)}(x) + (-1)^{n+1}F_n(x) \quad (39)$$

для $n \geq p$, де $G_0^{(p)}(x) \equiv 1$, $F_0(x) \equiv 1$ і

$$G_1^{(p)}(x) \equiv G_2^{(p)}(x) \equiv \dots \equiv G_{p-1}^{(p)}(x) \equiv 0,$$

$$F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv \dots \equiv F_{p-1}(x) \equiv 0.$$

Іншими словами, в (39) доданки $F_r(x)G_{q-r}^{(p)}(x) = 0$ якщо $r < p$ або $q - r < p$. Отже, якщо ξ є комплексним гомоморфізмом (не обов'язково неперервним) на просторі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_p)$, тоді

$$n\xi(G_n^{(p)}) = (-1)^{p+1}\xi(F_p)\xi(G_{n-p}^{(p)}) + (-1)^{p+2}\xi(F_{p+1})\xi(G_{n-p-1}^{(p)}) + \dots + (-1)^{n-p+1}\xi(F_{n-p})\xi(G_p^{(p)}) + (-1)^{n+1}\xi(F_n). \quad (40)$$

Твердження 28. Нехай p — натуральне число, а ξ — комплексний гомоморфізм на $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ такий, що $\xi(F_m) = c \neq 0$ для деякого $p \leq m \leq 2p$ і $\xi(F_n) = 0$ для $n \neq m$. Тоді

$$\xi(G_{km}^{(p)}) = (-1)^{k(m+1)} \frac{(c/m)^k}{k!}$$

і $\xi(G_n^{(p)}) = 0$ якщо $n \neq km$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Крім того,

$$\mathcal{G}^{(p)}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ є непарним,} \\ 2 - e^{-\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ — парне.} \end{cases}$$

Доведення. Покладемо у формулі (40) $\xi(F_j) = 0$, якщо $j \neq m$ і ми бачимо, що

$$\xi(G_{km}^{(p)}) = (-1)^{m+1} \frac{\xi(F_m)\xi(G_{(k-1)m}^{(p)})}{km}$$

та $\xi(G_n^{(p)}) = 0$ якщо $n \neq km$ для деякого $k \in \mathbb{N}$. Легко перевірити, що для $p \leq m \leq 2p$, $G_m^{(p)} = (-1)^{m+1}F_m/m$. Отже, для $k = 1$ маємо

$$\xi(G_m^{(p)}) = \frac{(-1)^{m+1}\xi(F_m)}{m} = \frac{(-1)^{m+1}c}{m}.$$

Припустимо, що

$$\xi(G_{(k-1)m}^{(p)}) = \left((-1)^{m+1}\right)^{k-1} \frac{(c/m)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \xi(G_{km}^{(p)}) &= \frac{\xi(F_m) \left((-1)^{m+1}\right)^{k-1} (c/m)^{k-1}}{km(k-1)!} = \\ &= \left((-1)^{m+1}\right)^k \frac{(c/m)^k}{k!} = (-1)^{k(m+1)} \frac{(c/m)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Тому

$$\mathcal{G}^{(p)}(\xi) = 1 + \left((-1)^{m+1}\right)^k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(c/m)^k t^{km}}{k!} = 1 + (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{ct^m}{m}\right)^k}{k!}.$$

Отже,

$$\mathcal{G}^{(p)}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ є непарним} \\ 2 - e^{-\frac{c}{m}t^m} & \text{якщо } m \text{ — парне.} \end{cases}$$

□

Наслідок 12. Нехай p — натуральне число. Тоді

$$\mathcal{G}^{(p)}(\psi_{\lambda}^{(p)}) = \begin{cases} e^{\frac{\lambda}{p}t^p} & \text{якщо } p \text{ непарне,} \\ 2 - e^{-\frac{\lambda}{p}t^p} & \text{якщо } p \text{ парне.} \end{cases}$$

i

$$\psi_{\lambda}^{(p)}(G_n^{(p)}) = \begin{cases} (-1)^{k(p+1)} \frac{(\lambda/p)^k}{k!} & \text{якщо } n = kp \text{ для деякого } k \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Нехай $x \in \ell_{p-1}$. Тоді з рівняння (35) і теореми 32 маємо:

$$G_n^{(p)}(x) = \delta_x \star \psi_{-F_{p-1}(x)}^{(p-1)}(G_n^{(p-1)}) = \sum_{k=0}^n G_k^{(p-1)}(x) \psi_{-F_{p-1}(x)}^{(p-1)}(G_{n-k}^{(p-1)}).$$

Беручи до уваги наслідок 12, ми можемо записати

$$\begin{aligned} G_n^{(p)}(x) &= \sum_{j(p-1) \leq n} G_{n-j(p-1)}^{(p-1)}(x) \psi_{-F_{p-1}(x)}^{(p-1)}(G_{j(p-1)}^{(p-1)}) = \\ &= \sum_{j(p-1) \leq n} G_{n-j(p-1)}^{(p-1)}(x) (-1)^{j(p+1)} \frac{(F_p(x))^j}{j!(p-1)^j}. \end{aligned} \tag{41}$$

Приклад 3. (пор. [46]). Позначимо $\mathbf{1} = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_p$. З (41) для $n \geq p > 1$ ми маємо:

$$G_n^{(p)}(\mathbf{1}) = \sum_{j(p-1) \leq n} G_{n-j(p-1)}^{(p-1)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(p-1)}(G_{j(p-1)}^{(p-1)}).$$

Зокрема, для $p = 2$ і $n \geq 2$,

$$G_n^{(2)}(\mathbf{1}) = \sum_{j=0}^n G_{n-j}^{(1)}(\mathbf{1}) \psi_{-1}^{(1)}(G_j^{(1)}) =$$

$$\psi_{-1}^{(1)}(G_n^{(1)}) + \psi_{-1}^{(1)}(G_{n-1}^{(1)}) = (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n!}.$$

Відображення піднесення до степеня та кореневе відображення.

Нехай $1 \leq p < \infty$ і $m \in \mathbb{N}$. Означимо $x^m = (x_1^m, \dots, x_i^m, \dots)$. Відображення $x \mapsto x^m$ є неперервним m -однорідним поліномом з ℓ_p в ℓ_q для кожного $q \geq p/m$. Крім того,

$$\|x^m\|_q = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{mq} \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{mp/m} \right)^{m/p} \leq \|x\|_p^m.$$

Якщо $q = p/m$, то x^m є сюр'єктивним і $\|x^m\|_q = \|x\|_p^m$. Очевидно, що воно не є ін'єктивним, якщо $m > 1$. Праве обернене відображення до x^m (яке не є єдиним) можна визначити таким чином:

$$\sqrt[m]{x} = (\sqrt[m]{x_1}, \dots, \sqrt[m]{x_i}, \dots),$$

де $\sqrt[m]{x_i}$ — головне значення n -го комплексного кореня x_i . Очевидно, що $x \mapsto \sqrt[m]{x}$ — це ін'єкція з ℓ_q до ℓ_{mq} ,

$$(\sqrt[m]{x})^m = x,$$

і

$$\|\sqrt[m]{x}\|_{mq} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q \right)^{1/mq} = \|x\|_q^{1/m}.$$

Позначимо через C^m оператор композиції з $H(\ell_q)$ в $H(\ell_{mq})$, визначений як

$$C^m: f(x) \mapsto f(x^m), \quad f \in H(\ell_q).$$

Також через C_b^m позначимо звуження C^m на $H_b(\ell_p)$, через C_s^m звуження C^m на $H_s(\ell_p)$ і через C_{bs}^m — звуження C^m на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Теорема 33. 1. Відображення C^m є неперервним гомоморфізмом з $H(\ell_q)$ на $H(\ell_{mq})$.

2. Відображення C_b^m є неперервним гомоморфізмом з $H_b(\ell_q)$ на $H_b(\ell_{mq})$.

3. Відображення C_s^m є неперервним гомоморфізмом з $H_s(\ell_q)$ на $H_s(\ell_{mq})$.

4. Відображення C_{bs}^m є неперервним гомоморфізмом з $\mathcal{H}_{bs}(\ell_q)$ на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_{mq})$.

Доведення. Відображення $x \mapsto x^m$ є неперервним m -однорідним поліномом з ℓ_{mq} в ℓ_q . Отже, це аналітичне відображення обмеженого типу. Отже, оператори композиції C^m і C_b^m — неперервні. Крім того, якщо f є симетричною функцією на ℓ_q , то $x \mapsto f(x^m)$ є симетричною функцією на ℓ_{mq} . Таким чином, оператори C_s^m і C_{bs}^m є неперервними операторами з областями значень в $H_s(\ell_{mq})$ і $\mathcal{H}_{bs}(\ell_{mq})$ відповідно. $\square$

Наслідок 13. Нехай Φ_m — неперервний гомоморфізм з $H(\ell_{mq})$ в топологічну алгебру A . Тоді $C^m \circ \Phi_m$ є неперервним гомоморфізмом з $H(\ell_q)$ в A . Аналогічно, якщо Φ_m є неперервним гомоморфізмом з $H_b(\ell_{mq})$ (відповідно з $H_s(\ell_{mq})$, з $\mathcal{H}_{bs}(\ell_{mq})$) в A , тоді $C_b^m \circ \Phi_m$ (відповідно $C_s^m \circ \Phi_m$, $C_{bs}^m \circ \Phi_m$) є неперервним гомоморфізмом з $H_b(\ell_q)$ (відповідно з $H_s(\ell_q)$, з $\mathcal{H}_{bs}(\ell_q)$) в A .

Твердження 29. Нехай z_n — послідовність комплексних чисел така, що $z = (z_1, z_2, \dots) \notin \ell_m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Якщо $F_k(z)$ є коректно визначеним для кожного $k \geq m$, тоді δ_z є розривним комплексним гомоморфізмом на алгебрі симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_m)$.

Доведення. Припустимо, що δ_z — неперервний. Тоді його можна продовжити за неперервністю до характеру на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_m)$. Таким чином, згідно з теоремою 33, $\delta_{C_{bs}^m(z)}$ є характером алгебри $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. З іншого боку, оскільки $z \notin \ell_m$, то з цього випливає, що $C_{bs}^m(z) \notin \ell_1$ і за підрозділом 2.3. маємо, що $\delta_{C_{bs}^m(z)}$ не може бути неперервним гомоморфізмом. Протиріччя. $\square$

Нехай $\mathcal{P}_0(X)$ — підалгебра неперервних поліномів $\mathcal{P}(X)$. Позначимо через $H_{b0}(X)$ (відповідно $H_0(X)$) алгебру аналітичних функцій $f \in H_b(X)$ (відповідно $H(X)$) таких, що всі однорідні поліноми в представленні ряду Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

належать $\mathcal{P}_0(X)$. Припускаємо, що простір $H_{b0}(X)$ наділений метризовною топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах (індукованою з $H_b(X)$), а $H_0(X)$ наділений топологією рівномірної збіжності на компактних множинах (індукованою з $H(X)$).

Твердження 30. *Нехай φ і ψ — неперервні лінійні функціонали на $H_0(X)$. Якщо $\varphi(P) = \psi(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_0(X)$, то $\varphi = \psi$.*

Доведення. Оскільки ряд Тейлора функції f збігається до f в топології рівномірної збіжності на компактних множинах для кожного $f \in H_0(X)$, а також завдяки неперервності функціоналів φ і ψ , маємо

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(f_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(f_n) = \psi(f)$$

для кожного $f \in H_0(X)$. □

Наслідок 14. *Оператор звуження характерів алгебри $H_0(X)$ на підалгебру $H_{b0}(X)$ є ін'єктивним відображенням спектра $M(H_0(X))$ алгебри $H_0(X)$ у спектр $M(H_{b0}(X))$ алгебри $H_{b0}(X)$. Іншими словами, $M(H_0(X)) \subseteq M(H_{b0}(X))$.*

Доведення. Якщо звуження φ дорівнює звуженню ψ на $H_{b0}(X)$, то $\varphi(P) = \psi(P)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_0(X)$. За твердженням 30, $\varphi = \psi$. □

Наступна теорема дає повний опис спектру $H_s(\ell_1)$.

Теорема 34. *Нехай p таке, що кожен характер у $\mathcal{M}_{bs}(\ell_p)$ може бути поданий як згортка функціонала значення в точці δ_x , $x \in \ell_p$, та виняткового функціонала ψ_λ , $\lambda \in \mathbb{C}$ (відомо, що це виконується, зокрема, для $p = 1$ згідно з підрозділом 2.3.). Тоді спектр $M_s(\ell_p)$ алгебри $H_s(\ell_p)$ складається з функціоналів значення в точці.*

Доведення. Досить показати, що ψ_λ , $\lambda \neq 0$ є розривним на $H_s(\ell_p)$ для будь-якого натурального p . У підрозділі 6.1. доведено, що $H_s(\ell_1)$ містить аналітичні функції необмеженого типу. Цей результат було узагальнено для будь-яких $H_s(\ell_p)$, $1 \leq p < \infty$ в [86].

Для заданого $p \in \mathbb{N}$ позначимо через $G_n^{\{p\}}$ np -однорідний поліном на ℓ_p , визначений як

$$G_n^{\{p\}}(x) = G_n(x^p) = \sum_{k_1 < \dots < k_n} x_{k_1}^p \cdots x_{k_n}^p.$$

З формули Ньютона маємо, що

$$\begin{aligned} nG_n^{\{p\}}(x) &= nG_n(x^p) = \\ &= F_1(x^p)G_{n-1}(x^p) - F_2(x^p)G_{n-2}(x^p) + \dots + (-1)^{n+1}F_n(x^p) = \\ &= F_p(x)G_{n-1}^{\{p\}}(x) - F_{2p}(x)G_{n-2}^{\{p\}}(x) + \dots + (-1)^{n+1}F_{np}(x). \end{aligned} \quad (42)$$

Враховуючи те, що $\|G_n\| = 1/n!$ (підрозділ 2.1.) і такі співвідношення

$$\left(\|x\|_p \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^p| \leq 1\right) \Leftrightarrow \left(\|x^p\|_1 \leq 1\right),$$

ми отримуємо, що

$$\|G_n^{\{p\}}\| = \sup_{\|x\|_p \leq 1} |G_n(x^p)| = \sup_{\|x^p\|_1 \leq 1} |G_n(x^p)| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |G_n(x)| = \frac{1}{n!}.$$

Позначимо через g_r , $r > 0$ таку аналітичну функцію на ℓ_p :

$$g_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!G_n^{\{p\}}(x)}{r^{np}}.$$

Тоді радіус обмеженості g_r в нулі дорівнює

$$\varrho_0(g_r) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\|n!G_n^{\{p\}}\|^{1/np}} = r.$$

Згідно з теоремою 2 і теоремою 1 у [86] функція g_r є коректно визначеною на ℓ_p і належить $H_s(\ell_p) \setminus \mathcal{H}_{bs}(\ell_p)$.

Нехай $\lambda \geq r$. Тоді з рівностей $\psi_\lambda(F_p) = \lambda^p$, $\psi_\lambda(F_k) = 0$ для $k > p$ і формули (42) маємо, що

$$\psi_\lambda(g_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{pn} = \infty.$$

Таким чином ψ_λ не визначено на $g_r \in H_s(\ell_p)$ для $\lambda \geq r$. □

3 Суперсиметричні поліноми та кільце мультимножин банахових алгебр

Даний розділ присвячено вивченню суперсиметричних аналітичних функцій на деяких комплексних банахових просторах. Результати, наведені в цьому розділі, опубліковано в таких працях: [53], [5], [6].

3.1 Суперсиметричні аналітичні функції на просторі ℓ_1

Будемо використовувати позначення $\mathbb{N}$ для множини натуральних чисел, а $\mathbb{Z}$ для множини цілих чисел. Також, покладемо $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus 0$ і позначимо через $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ банахів простір всіх абсолютно сумовних комплексних послідовностей, занумерованих числами з $\mathbb{Z}_0$. Символ $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N})$ позначає класичний банахів простір абсолютно сумовних комплексних послідовностей. Будь-який елемент $z \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ можна подати у вигляді

$$z = (\dots, z_{-n}, \dots, z_{-2}, z_{-1}, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots) =$$

$$(y|x) = (\dots, y_n, \dots, y_2, y_1|x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

з

$$\|z\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |z_i|,$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ і $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ належать ℓ_1 , $z_n = x_n$, $z_{-n} = y_n$ для $n \in \mathbb{N}$ і

$$x \longmapsto (0|x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \text{ і } y \longmapsto (\dots, y_{-n}, \dots, y_{-2}, y_{-1}|0)$$

є природними ізометричними вкладеннями копій ℓ_1 в $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Визначимо наступні поліноми на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$:

$$T_k(z) = F_k(x) - F_k(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Означення 11. Поліном P на просторі $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ називається суперсиметричним, якщо його можна представити як алгебраїчну комбінацію поліномів

$\{T_k\}_{k=1}^\infty$. Іншими словами, P — скінченна сума скінченних добутків $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ і сталих. Позначимо через $\mathcal{P}_{sup}$ алгебру всіх суперсиметричних поліномів на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Перш за все відмітимо, що поліноми T_k є алгебраїчно незалежними, оскільки такими є F_k . Отже, послідовність поліномів $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ утворює алгебраїчний базис $\mathcal{P}_{sup}$.

Скажемо, що $z \sim w$, для деяких $z, w \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$, якщо $T_k(z) = T_k(w)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Позначимо через $\mathcal{M}$ фактор-множину $\ell_1(\mathbb{Z}_0)/\sim$, яка є природною областю визначення для суперсиметричних поліномів. Для даного $z \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ позначимо $[z] \in \mathcal{M}$ — клас еквівалентності, який містить елемент z .

Аналогічно, як для випадку симетричних поліномів (див. підрозділ 2.1), введемо операцію “ $\bullet$ ” на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$:

$$z \bullet w = (y \bullet v | x \bullet u) = (\dots, v_n, y_n, \dots, v_1, y_1 | x_1, u_1, \dots, x_n, u_n, \dots),$$

де $z = (y|x)$ і $w = (v|u)$. Також позначимо $z^- = (y|x)^- = (x|y)$. Зрозуміло, що $(z^-)^- = z$ і $z \bullet z^- \sim (0|0)$. Ці операції можна природно визначити на $\mathcal{M}$:

$$[z] \bullet [w] = [z \bullet w] \text{ і } [z]^- = [z^-]. \quad (43)$$

Теорема 35. *Справедливі наступні твердження:*

1. $T_k(z \bullet w) = T_k(z) + T_k(w)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.
2. Операції в (43) коректно визначені, тобто не залежать від вибору представників.
3. $(\mathcal{M}, \bullet, [z] \mapsto [z]^-)$ — комутативна група з нулем $0 = (0|0)$.
4. $z \sim 0$ тоді і тільки тоді, коли існують $d, s \in \ell_1$ такі, що $z = (d|s)$ і $F_k(d) = F_k(s)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Це рівносильно тому, що всі ненульові координати d збігаються з ненульовими координатами s з точністю до перестановки.

Доведення. Твердження (1) є прямим наслідком означень операцій та поліномів T_k . Якщо $z' \sim z$ і $w' \sim w$, то

$$T_k(z' \bullet w') = T_k(z') + T_k(w') = T_k(z) + T_k(w) = T_k(z \bullet w), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $[z'] \bullet [w'] = [z] \bullet [w]$, тобто операція “ $\bullet$ ” не залежить від вибору представника. Аналогічно, для кожного $k \in \mathbb{N}$,

$$T_k(z'^-) = -T_k(z') = -T_k(z) = T_k(z^-).$$

Отже, $[z']^- = [z]^-$. Аксиоми комутативної групи для операцій (43) перевіряються безпосередньо.

У [10] доведено, що для даних $d, s \in \ell_1$, $F_k(d) = F_k(s)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ тоді і тільки тоді, коли всі ненульові координати d збігаються з ненульовими координатами s з точністю до перестановки. З цього факту безпосередньо випливає (4).

□

Нехай $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ — деякі алгебри поліномів на лінійних просторах X і Y відповідно, такі, що $\mathcal{P}_1$ породжений алгебраїчним базисом $\{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$, а $\mathcal{P}_2$ породжений алгебраїчним базисом $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots\}$ з $\deg P_n = \deg Q_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді відображення, визначене на базисних векторах $P_n \mapsto Q_n$ і продовжене на $\mathcal{P}_1$ за лінійністю та мультиплікативністю, очевидно, є алгебраїчним ізоморфізмом з $\mathcal{P}_1$ в $\mathcal{P}_2$, який зберігає степені поліномів.

Позначимо через Λ ізоморфізм з $\mathcal{P}_s = \mathcal{P}_s(\ell_1)$ в $\mathcal{P}_{sup}$ такий, що

$$\Lambda: F_n \mapsto T_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Твердження 31. *Якщо $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ є алгебраїчним базисом $\mathcal{P}_s$, то $\{\Lambda(P_n)\}_{n=1}^\infty$ є алгебраїчним базисом $\mathcal{P}_{sup}$.*

Доведення. Доведення випливає з загального факту, що область значень будь-якого алгебраїчного базису при ізоморфізмі є алгебраїчним базисом. Справді, $\Lambda(P_n)$, $n \in \mathbb{N}$ алгебраїчно незалежні, оскільки P_n , $n \in \mathbb{N}$ є такими і Λ є ін'єктивним. Також кожен $Q \in \mathcal{P}_{sup}$ належать до алгебраїчної комбінації

$\{\Lambda(P_n)\}_{n=1}^\infty$, оскільки $\Lambda^{-1}(Q)$ належать до алгебраїчної комбінації $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ і Λ є сюр'єктивним [10].

□

Нехай H_b^{sup} — поповнення $\mathcal{P}_{sup}$ відносно топології рівномірної збіжності на обмежених підмножинах. Іншими словами, H_b^{sup} — мінімальний замкнений підпростір $H_b(\ell_1(\mathbb{Z}_0))$, який містить $\mathcal{P}_{sup}$. Елементи H_b^{sup} називаються суперсиметричними аналітичними або цілими функціями на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Твердження 32. *Відображення Λ^{-1} є неперервним і може бути продовжено до неперервного гомоморфізма з H_b^{sup} в $\mathcal{H}_{bs} = \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ з щільною областю значень. Відображення Λ є розривним і щільно визначеним на $\mathcal{H}_{bs}$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\Lambda^{-1}(P)$ — звуження $P \in \mathcal{P}_{sup}$ на замкнений підпростір $\{(0|x): x \in \ell_1\}$. Оператор звуження, очевидно, є неперервним на H_b^{sup} і є продовженням Λ^{-1} . Область значень Λ^{-1} є щільною, оскільки містить усі симетричні многочлени на ℓ_1 . З іншого боку, у підрозділі 2.1 доведено, що гомоморфізм $\Lambda_-: \mathcal{P}_s \rightarrow \mathcal{P}_s$ такий, що $\Lambda_-F_k = -F_k$, $k \in \mathbb{N}$ є розривним на $(\mathcal{P}_s, \tau_b)$. Крім того, у [4] побудовано функцію $g(x) \in \mathcal{H}_{bs}$ таку, що $\Lambda_-(g) \notin \mathcal{H}_{bs}$. Якщо Λ є неперервним, то його можна продовжити на весь простір $\mathcal{H}_{bs}$ і тому $\Lambda g(x|0) = (\Lambda_-g)(x)$. А це приводить до суперечності: з лівого боку маємо обмежену функцію на всіх обмежених підмножинах, а в правій частині це не так.

□

Для даного $y \in \ell_1$ позначимо $\Lambda_y P(x) = (\Lambda P)(y|x)$, $P \in \mathcal{P}_s$. Легко бачити, що

$$\Lambda_y P(x \bullet y) = (\Lambda P)(y|x \bullet y) = (\Lambda P)(0|x) = P(x).$$

Теорема 36. *Нехай $\Lambda G_n = W_n$. Тоді*

$$W_n(y|x) = \sum_{k=0}^n G_k(x) H_{n-k}(-y), \quad n \in \mathbb{N} \quad (44)$$

i

$$\mathcal{W}(y|x)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) = \frac{\mathcal{G}(x)(t)}{\mathcal{G}(y)(t)}, \quad (45)$$

де рівність справедлива на спільній області збіжності.

Доведення. У підрозділі 2.1 доведено, що

$$\mathcal{G}(x \bullet y)(t) = \mathcal{G}(x)(t)\mathcal{G}(y)(t), \quad x, y \in \ell_1. \quad (46)$$

Отже, для фіксованого $y \in \ell_1$

$$\Lambda_y(\mathcal{G}(x \bullet y)(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (\Lambda G_n)(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y).$$

З іншого боку,

$$\Lambda_y(\mathcal{G}(x \bullet y)(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x).$$

Так

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x). \quad (47)$$

З (47) маємо

$$\mathcal{W}(y|x)(t)\mathcal{G}(y)(t) = \mathcal{G}(x)(t)$$

і так отримуємо (45). Враховуючи формулу (49), отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(y|x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n G_n(x) \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(-y) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{k=0}^n G_k(x) H_{n-k}(-y).$$

Звідси випливає (44). □

Наслідок 15.

$$\mathcal{W}((y|x) \bullet (d|b))(t) = \mathcal{W}(y|x)(t)\mathcal{W}(d|b)(t), \quad x, y, b, d \in \ell_1.$$

Доведення. Дане твердження негайно випливає з поєднання формул (46) і (45). □

Наслідок 16. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $x, y, b, d \in \ell_1$ маємо

$$W_n((y|x) \bullet (d|b)) = \sum_{k=0}^n W_k(y|x) W_{n-k}(d|b),$$

$$G_n(x \bullet b) = \sum_{k=0}^n G_k(x) G_{n-k}(b)$$

і

$$H_n(y \bullet d) = \sum_{k=0}^n H_k(y) H_{n-k}(d).$$

Доведення. За наслідком 15 маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n((y|x) \bullet (d|b)) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k W_k(y|x) \sum_{j=0}^{\infty} t^j W_j(d|b).$$

Прирівнявши коефіцієнти при степенях t^n , отримаємо першу рівність. Щоб отримати другу рівність зауважимо, що $G_n(x) = W_n(0|x)$ і тому

$$G_n(x \bullet b) = W_n((0|x) \bullet (0|b)) = \sum_{k=0}^n W_k(0|x) W_{n-k}(0|b) = \sum_{k=0}^n G_k(x) G_{n-k}(b)$$

для довільного натурального n . Третю рівність можна отримати, використовуючи аналогічні міркування враховуючи, що $H_n(y) = W_n(y|0)$.

□

Зрозуміло, що $(y \bullet a|x \bullet a) \sim (y|x)$ для всіх $x, y, a \in \ell_1$. Будемо казати, що $(y|x)$ є незвідним зображенням $u \in \mathcal{M}$, якщо $[(y|x)] = u$ і для кожного $x_n \neq 0$ і кожного k , $x_n \neq y_k$.

Твердження 33. $(y|x)$ є незвідним тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{G}(x)(t)$ і $\mathcal{G}(y)(t)$ не мають спільних нулів.

Доведення. Згідно з (19), для ненульових елементів x_k і y_k числа $(-x_k)^{-1}$ і $(-y_k)^{-1}$ є нулями функцій $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{G}(y)(t)$, відповідно. Тому функції $\mathcal{G}(x)(t)$ та $\mathcal{G}(y)(t)$ не мають спільних нулів тоді і тільки тоді, коли множини чисел $\{x_k\}$ і $\{y_k\}$ не мають спільних елементів.

□

Наслідок 17. Нехай $u \in \mathcal{M}$. Тоді елемент u повністю визначається функцією $\mathcal{W}(u)(t) = \mathcal{W}(y|x)(t)$. При цьому, $\mathcal{W}(y|x)(t)$ є мероморфною функцією вигляду $f(t)/g(t)$ де, f, g — цілі функції експоненціального типу з умовою $f(0) = 1$ і $g(0) = 1$, та $(y|x) \in u$. Більше того, нехай (α_k) і (β_k) — нулі функцій f і g відповідно, то $(1/\alpha_k)$ і $(1/\beta_k)$ належать до ℓ_1 ,

$$f(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\alpha_k}\right) \quad \text{і} \quad g(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\beta_k}\right),$$

і

$$\left(\dots, -\frac{1}{\beta_n}, \dots, -\frac{1}{\beta_2}, -\frac{1}{\beta_1} \mid -\frac{1}{\alpha_1}, -\frac{1}{\alpha_2}, \dots, -\frac{1}{\alpha_n}, \dots \right)$$

є незвідними зображеннями u .

Доведення. Оскільки поліноми W_n утворюють алгебраїчний базис в алгебрі суперсиметричних поліномів, кожен поліном T_k можна зобразити у вигляді алгебраїчної комбінації поліномів W_n , $n \leq k$. Тому, з рівності $W_n(u) = W_n(v)$, $n \in \mathbb{N}$ випливає $T_k(u) = T_k(v)$, $k \in \mathbb{N}$, що рівносильно тому, що $u = v$. Тобто елемент $u \in \mathcal{M}$ повністю визначається послідовністю $\{W_n(u)\}$ або функцією

$$\mathcal{W}(u)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n W_n(u).$$

Інша частина наслідку випливає з явного зображення функції $\mathcal{W}(u)(t)$.

□

Нехай $x \in \ell_1$. Позначимо через $\text{supp } x$ носій x , тобто

$$\text{supp } x = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}.$$

Наслідок 18. Нехай $(y|x)$ і $(y'|x')$ — два незвідні зображення елемента u . Тоді існують бієкції $i: \text{supp } x \rightarrow \text{supp } x'$ та $j: \text{supp } y \rightarrow \text{supp } y'$ такі, що $x_n = x'_{i(n)}$ і $y_m = y'_{j(m)}$ для всіх $n \in \text{supp } x$ і $m \in \text{supp } y$.

Доведення. З наслідку 17 маємо, що

$$\mathcal{W}(y|x)(t) = \frac{f(t)}{g(t)} = \mathcal{W}(y'|x')(t) = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Оскільки зображення $(y|x)$ і $(y'|x')$ є незвідними, то $f(t) = f'(t)$ і $g(t) = g'(t)$. Тому вектори x і x' та y і y' відповідно, співпадають, з точністю до перестановки ненульових координат. Це і означає, що існують бієкції між носіями $i: \text{supp } x \rightarrow \text{supp } x'$ та $j: \text{supp } y \rightarrow \text{supp } y'$ такі, що $x_n = x'_{i(n)}$ і $y_m = y'_{j(m)}$ для всіх $n \in \text{supp } x$ і $m \in \text{supp } y$.

□

Твердження 34. Для кожного $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$ у спільній області збіжності виконується наступна рівність

$$\mathcal{W}(u)(t) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n} \right) = \exp \left(- \int_0^t \mathcal{T}(-u)(\xi) d\xi \right), \quad (48)$$

де $-u = [(-y|-x)]$ і

$$\mathcal{T}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n t^{n-1}.$$

Доведення. З (45) і (19) випливає, що $\mathcal{W}(u)(t)$ збігається для кожного $t \in \mathbb{C}$, якщо $y = 0$ і в кулі $|t| < r$, де

$$r = \min_{|y_n| \neq 0} |y_n|^{-1}$$

якщо $y \neq 0$.

З комбінаторних міркувань відомо [64, ст. 3], що

$$\mathcal{G}(x)(t) = \frac{1}{H(-x)(t)} \quad (49)$$

та

$$\mathcal{G}(x)(t) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right) = \exp \left(- \int_0^t \mathcal{F}(-x)(\xi) d\xi \right), \quad (50)$$

де рівність виконується для кожного $x \in \ell_1$ і кожного t у спільній області збіжності.

Оскільки Λ^{-1} — неперервний гомоморфізм, то з (50) маємо, що для кожного $t \in \mathbb{C}$ такого, що $\mathcal{W}(u)(t)$ збігається

$$\Lambda^{-1} \mathcal{W}(u)(t) = \mathcal{G}(x)(t) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right).$$

Оскільки $\|F_n\| = 1$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n}$$

збігається, якщо $|t| < \|x\|$. Також, $\|T_n\| = 1$ і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n}$$

збігається, якщо $|t| < \|u\|$. Тож область збіжності

$$\exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right)$$

знаходиться в області визначення оператора Λ і

$$\mathcal{W}(u)(t) = \Lambda \mathcal{G}(x)(t) = \Lambda \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right).$$

Також, в області визначення

$$\Lambda^{-1} \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{T_n(-u)}{n} \right) = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{F_n(-x)}{n} \right).$$

□

Теорема 37. Нехай $u \in \mathcal{M}$ і $u \neq 0$. Для даного $\lambda \in \mathbb{C}$ існує $v \in \mathcal{M}$ такий, що $T_k(v) = \lambda T_k(u)$ тоді і тільки тоді, коли λ — ціле число.

Доведення. Нехай $\lambda = m \in \mathbb{Z}$. Якщо $n = 0$, то $v = 0$. Якщо $n > 0$, то $v = \underbrace{u \bullet \dots \bullet u}_n$. Якщо $n < 0$, тоді $v = \underbrace{u^- \bullet \dots \bullet u^-}_n$.

Тепер нехай $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Згідно з (48)

$$\mathcal{W}(v)(t) = (\mathcal{W}(u)(t))^\lambda.$$

Але це суперечить зображенню (45) для v .

□

З означення суперсиметричних поліномів випливає, що кожен суперсиметричний поліном є інваріантним відносно дії мінімальної напівгрупи операторів G_{sup} на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, яка включає перестановки базисних векторів окремо

для додатних індексів $(y|x) \mapsto (y|x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots)$, окремо для від'ємних індексів $(y|x) \mapsto (\dots, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(1)}|x)$ та операторів вигляду

$$A_\lambda: (y|x) \mapsto (y, \lambda|x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Твердження 35. *Базис $\mathbf{T} = \{T_k\}_{k=1}^\infty$ є симетрично повним. Тобто всі поліноми на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$, які є інваріантними відносно дії напівгрупи операторів G_{sup} є суперсиметричними.*

Доведення. Нехай P — G_{sup} -інваріантний поліном на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$. Тоді P є нарізно симетричним і $P \circ A_\lambda = P$ для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$. Нехай $\deg P = m$. Ми можемо записати

$$P(y|x) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \dots + ik_i + \\ n_1 + 2n_2 + \dots + jn_j = 0}}^m c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j} F_1^+(x)^{k_1} \dots F_i^+(x)^{k_i} F_1^-(y)^{n_1} \dots F_j^-(y)^{n_j}$$

для деяких констант $c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j}$.

Очевидно, що $T_k = F_k^+ - F_k^-$. Позначимо $Q_k = F_k^+ + F_k^-$. Тоді існує поліном $q: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такий, що

$$P(y|x) = q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x)).$$

Згідно з нашим припущенням, $P(y \bullet a|x \bullet a) = P(y|x)$, $a \in \ell_1$. Також,

$$T_k(y \bullet a|x \bullet a) = T_k(y|x) \quad \text{і} \quad Q_k(y \bullet a|x \bullet a) = Q_k(y|x) + 2F_k(a)$$

для кожного натурального k . Оскільки для довільного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ існує елемент $a \in \ell_1$ такий, що $F_n(a) = \lambda_n$, $1 \leq n \leq m$ (див. наприклад [10]), то для кожного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$

$$\begin{aligned} & q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x)) \\ &= q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x) + \lambda_1, \dots, Q_m(y|x) + \lambda_m). \end{aligned}$$

Але це означає, що q не залежить від змінних $Q_1, \dots, Q_m$. Тому P є суперсиметричним. $\square$

Структура нормованого кільця $\mathcal{M}$.

Розглянемо більш детально множину $\mathcal{M}$. Нехай $\mathcal{M}_+ = \{u \in \mathcal{M} : u = [(0|x)], x \in \ell_1\}$. Відповідно до [1] введемо операцію ‘ $\diamond$ ’ на $\mathcal{M}_+$ і продовжимо її на $\mathcal{M}$.

Нехай $x, y \in \ell_1$. Тоді $x \diamond y$ — послідовність, яка складається з чисел $x_i y_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ пронумерованих у деякому фіксованому порядку. Якщо $u = [(0|x)]$ і $v = [(0|y)]$, то $u \diamond v = [(0|x \diamond y)]$. З [1, 9] ми знаємо, що операція на $\mathcal{M}_+$ є комутативною, асоціативною і $[y \diamond (x \bullet d)] = [(y \diamond x) \bullet (y \diamond d)]$. Визначимо

$$u \diamond v = [((y \diamond b) \bullet (x \diamond d) | (y \diamond d) \bullet (x \diamond b))].$$

Твердження 36. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, $T_k(u \diamond v) = T_k(u)T_k(v)$, $u, v \in \mathcal{M}$.

Доведення. З [1] ми знаємо, що для всіх $x, z \in \ell_1$, $F_k(x \diamond z) = F_k(x)F_k(z)$. Нехай $u = [(y|x)]$ і $v = [(d|b)]$. Тоді

$$\begin{aligned} T_k(u \diamond v) &= F_k((y \diamond d) \bullet (x \diamond b)) - F_k((y \diamond b) \bullet (x \diamond d)) \\ &= F_k(y)F_k(d) + F_k(x)F_k(b) - F_k(y)F_k(b) - F_k(x)F_k(d) = T_k(u)T_k(v). \end{aligned}$$

□

Теорема 38. $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ — комутативне кільце з нулем $0 = [(0|0)]$ і одиницею $\mathbb{I} = [(0|1, 0, \dots)]$.

Доведення. Ми вже знаємо, що $(\mathcal{M}, \bullet)$ — комутативна група, а для довільного елемента $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$, елемент $u^- = [(y|x)^-] = [(x|y)]$ є оберненим (протилежним) до u . Асоціативність, комутативність множення і дистрибутивність були доведені в [1] для випадку $\mathcal{M}_+$. Ці ж міркування можна використати і в загального випадку. Справді, для будь-якого натурального k маємо:

$$T_k(u \diamond v) = T_k(u)T_k(v) = T_k(v \diamond u).$$

Отже, $u \diamond v = v \diamond u$, $u, v \in \mathcal{M}$. Аналогічно можна перевірити асоціативність і дистрибутивність.

□

Зауважимо, що на $\mathbb{C} \times \mathcal{M}$ визначена операція множення на константу

$$\lambda[(y|x)] = [(\lambda y|\lambda x)], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad [(y|x)] \in \mathcal{M}.$$

Зрозуміло, що

$$\lambda(u \bullet v) = \lambda u \bullet \lambda v \quad \text{і} \quad \lambda(u \diamond v) = (\lambda u) \diamond v = u \diamond (\lambda v) \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad u, v \in \mathcal{M}.$$

Але, в загальному випадку,

$$(\lambda_1 + \lambda_2)u \neq \lambda_1 u \bullet \lambda_2 u.$$

Отже, $(\mathcal{M}, \bullet, (\lambda, u) \mapsto \lambda u)$ не є лінійним простором над $\mathbb{C}$. Тому $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ не є алгеброю. Іншими словами, ми можемо казати, що $(\mathcal{M}, \bullet, \diamond)$ є нелінійним кільцем, в якому визначено операцію множення на константу з $\mathbb{C}$. Для введення топології на $\mathcal{M}$ ми можемо використати стандартну норму на $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$.

Означення 12. Нехай $u \in \mathcal{M}$. Визначимо норму u наступним чином:

$$\|u\| = \|x\| + \|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|,$$

де $(y|x)$ — незвідне зображення u .

З наслідку 18 випливає, що означення норми $\|\cdot\|$ не залежить від незвідного зображення.

Зауважимо, що визначена норма не є нормою у загальноприйнятому сенсі, оскільки $\mathcal{M}$ не є лінійним простором. Проте, наступне твердження показує, що, як і в лінійному просторі, норма має природні властивості.

Твердження 37. Нехай $u, v \in \mathcal{M}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Виконуються наступні властивості:

1. $\|u\| \geq 0$ і $\|u\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $u = 0$.
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.
3. $\|u\| = \min_{(y|x) \in u} (\|x\| + \|y\|)$.

$$4. \|u \bullet v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

$$5. \|u \diamond v\| \leq \|u\| \|v\|.$$

$$6. \|u^-\| = \|u\|.$$

Доведення. Пункти 1, 2 і 6 є очевидними. Перевіримо пункт 3. Нехай $(y|x)$ деяке зображення елемента u . Ми можемо записати з точністю до перестановки, що $(y|x) = (y' \bullet a|x' \bullet a)$ для деякого $a \in \ell_1$ і незвідного $(y'|x')$. Тому

$$\|u\| = \|x'\| + \|y'\| \leq \|x\| + \|y\|$$

для кожного $(y|x) \in u$. З іншого боку,

$$\|u\| = \|x\| + \|y\|,$$

якщо $(y|x)$ — незвідне зображення елемента u . Тому

$$\|u\| = \min_{(y|x) \in u} (\|x\| + \|y\|).$$

Перевіримо пункт 4. Нехай $(y|x)$ — незвідне зображення елемента u , а $(d|b)$ — незвідне зображення елемента v . Тоді, згідно пункту 3,

$$\|u \bullet v\| = \|(y \bullet d|x \bullet b)\| \leq \|y \bullet d\| + \|x \bullet b\| = \|x\| + \|d\| + \|y\| + \|b\| = \|u\| + \|v\|.$$

□

Визначимо метрику ρ на $\mathcal{M}$, природним чином асоційовану з нормою. Нехай $u, v \in \mathcal{M}$. Покладемо

$$\rho(u, v) = \|u \bullet v^-\|.$$

Легко перевірити, що ρ є метрикою, використовуючи ті ж аргументи, що і в класичному випадку лінійних нормованих просторів, оскільки в означенні метрики не використовується множення на константу.

Твердження 38. *Множення на $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \lambda u$ для фіксованого $u \in \mathcal{M}$ загалом є розривним у кожній ненульовій точці $\mathbb{C}$ та неперервним в нулі. Тут ми розглядаємо стандартну топологію на $\mathbb{C}$ і топологію на $\mathcal{M}$, породжену метрикою ρ .*

Доведення. Нехай ε_n — послідовність у $\mathbb{C}$ така, що $\varepsilon_n \neq 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\lambda \neq 0$ і $u = [(\dots, 0, y_1 | x_1, 0, \dots)]$, де $x_1 \neq 0$ або $y_1 \neq 0$ і $x_1 \neq y_1$. Тоді

$$\begin{aligned} \rho(\lambda(1 + \varepsilon_n)u, \lambda u) &= \|[(\dots, 0, \lambda y_1, \lambda(1 + \varepsilon_n)x_1 | \lambda x_1, \lambda(1 + \varepsilon_n)y_1, 0, \dots)]\| \\ &= \|\lambda x_1\| + \|\lambda y_1\| + \|\lambda(1 + \varepsilon_n)x_1\| + \|\lambda(1 + \varepsilon_n)y_1\| > |\lambda|\|u\| > 0, \end{aligned}$$

тоді як $\lambda(1 + \varepsilon_n) \rightarrow \lambda$ при $n \rightarrow \infty$.

Нехай тепер $\lambda = 0$, $u \in \mathcal{M}$ і $(y|x)$ — незвідне зображення u . Тоді

$$\rho(\varepsilon_n u, 0) = \|\varepsilon_n u\| = |\varepsilon_n|\|x\| + |\varepsilon_n|\|y\| \rightarrow 0.$$

□

Теорема 39. *Операції ‘ $\bullet$ ’ і ‘ $\diamond$ ’ є сукупно неперервними на $(\mathcal{M}, \rho)$.*

Доведення. Легко перевірити, що якщо $\rho(u, u') < \varepsilon_1$ і $\rho(v, v') < \varepsilon_2$, то

$$\rho(u \bullet v, u' \bullet v') < \|(u \bullet v) \bullet (u' \bullet v')^-\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

і

$$\rho(u \diamond v, u' \diamond v') < \varepsilon_1\|u\| + \varepsilon_2\|v\| + \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

□

Твердження 39. *Метричний простір $(\mathcal{M}, \rho)$ є несепарабельним.*

Доведення. Розглянемо наступну множину

$$S_1 = \{u_\lambda = \lambda \mathbb{I} = (0 | \lambda, 0, 0 \dots) : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}.$$

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$\rho(u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}) = \|(\dots, 0, 0, \lambda_2 | \lambda_1, 0, 0 \dots)\| = 2.$$

Отже, одинична сфера метричного простору $(\mathcal{M}, \rho)$ містить незліченну множину S_1 таку, що відстань між кожною парою різних точок S_1 дорівнює 2.

□

Теорема 40. *Метричний простір $(\mathcal{M}, \rho)$ є повним.*

Доведення. Нехай u і v є елементами $\mathcal{M}$, $\rho(u, v) = \|u \bullet v^-\| < \varepsilon$ і $(y|x)$ — незвідне зображення u . Тоді існує $(d|b)$ — незвідне зображення v таке, що $\|(y|x) - (d|b)\| < \varepsilon$. Справді, з нерівності $\|u \bullet v^-\| < \varepsilon$ і означення норми випливає, що існує елемент $w \in \mathcal{M}$ такий, що $u = u' \bullet w$, $v = v' \bullet w$ і $\|u'\| + \|v'\| < \varepsilon$. Розглянемо $(d|b)$ — зображення елемента v таке, що елемент w в $(d|b)$ представлений тим самим вектором, що і в $(y|x)$. Нехай $(y'|x')$ є незвідним зображення u' в $(y|x)$ і $(d'|b')$ — незвідне зображення v' в $(d|b)$. Тоді

$$\|(y|x) - (d|b)\| = \|(y'|x') - (d'|b')\| \leq \|u'\| + \|v'\| < \varepsilon.$$

Нехай $u^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ — фундаментальна послідовність в $(\mathcal{M}, \rho)$. Перейшовши до підпослідовності, якщо потрібно, ми можемо вважати, що якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, то

$$\rho(u^{(m)}, u^{(n)}) < 1/2^{N+1}.$$

Виберемо $(y^{(m)}|x^{(m)})$ — незвідні зображення $u^{(m)}$ такі, що

$$\|(y^{(m+1)}|x^{(m+1)}) - (y^{(m)}|x^{(m)})\| = \rho(u^{(m+1)}, u^{(m)}) < 1/2^{m+1}.$$

Отже, якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, то

$$\|(y^{(m)}|x^{(m)}) - (y^{(n)}|x^{(n)})\| < 1/2^N.$$

Таким чином, $(y^{(m)}|x^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}$ — послідовність Коші в $\ell_1(\mathbb{Z})$ і тому вона має граничну точку $z^{(0)} = (y^{(0)}|x^{(0)}) \in \ell_1(\mathbb{Z})$, оскільки простір $\ell_1(\mathbb{Z})$ є повним.

Нехай $z_i^{(m)}$ — i -та координата $z^{(m)} = (y^{(m)}|x^{(m)})$, $i \in \mathbb{Z}_0$, тобто $z_i^{(m)} = x_i^{(m)}$, якщо $i > 0$ і $z_i^{(m)} = y_{-i}^{(m)}$, якщо $i < 0$. Очевидно, що $z_i^{(m)} \rightarrow z_i^{(0)}$ при $m \rightarrow \infty$. Ми стверджуємо, що якщо $z_i^{(0)} = c \neq 0$, то існує число N таке, що для кожного $m > N$, $z_i^{(m)} = c$. Справді, якщо це не так, тоді для кожних $n, m > N$, $\rho(u^{(m)}, u^{(n)}) > c$ і ми отримаємо суперечність.

Для даного $\varepsilon > 0$ позначимо через z^ε вектор у $\ell_1(\mathbb{Z}_0)$ такий, що z^ε має скінченний носій і для координат цього вектора z_i^ε виконуються умови: $z_i^\varepsilon = z_i^{(0)}$ або $z_i^\varepsilon = 0$ і

$$\rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зауважимо, що в цьому випадку $\rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) = \|z^\varepsilon - z^{(0)}\|$. Нехай N — натуральне число, таке, що для кожного $n > N$, $z_i^\varepsilon = z_i^{(n)}$ для всіх $i \in \text{supp } z^\varepsilon$ та $\|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді

$$\rho(z^{(n)}, z^\varepsilon) = \|z^\varepsilon - z^{(n)}\| \leq \|z^\varepsilon - z^{(0)}\| + \|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\rho(z^{(n)}, z^{(0)}) \leq \rho(z^{(n)}, z^\varepsilon) + \rho(z^\varepsilon, z^{(0)}) < \varepsilon.$$

Тобто, послідовність $z^{(n)}$ прямує до точки $z^{(0)} \in \mathcal{M}$. Отже, послідовність $u^{(m)}$ має граничну точку $z^{(0)} \in \mathcal{M}$. Оскільки метричний простір є гаусдорфовим, то ця точка єдина, що доводить повноту простору $\mathcal{M}$.

□

Спектр алгебри H_b^{sup} .

Позначимо через M_b^{sup} спектр H_b^{sup} , тобто множину всіх неперервних ненульових комплексних гомоморфізмів (характерів) H_b^{sup} . Зрозуміло, що для кожної точки $(y|x) \in \ell_1(\mathbb{Z}_0)$ існує характер $\delta_{(y|x)} \in M_b^{sup}$ (так званий функціонал значення в точці), такий, що $\delta_{(y|x)}(f) = f((y|x))$, $f \in H_b^{sup}$. Крім того, $\delta_{(y|x)} = \delta_{(d|b)}$ тоді і тільки тоді, коли $(y|x) \sim (d|b)$. В цьому сенсі, можна сказати, що $\mathcal{M} \subset M_b^{sup}$.

Оскільки поліноми $\{W_n\}$ утворюють алгебраїчний базис в H_b^{sup} , то будь-який характер $\varphi \in M_b^{sup}$ повністю визначається його значеннями на W_n , $n \in \mathbb{N}$. Іншими словами, кожен характер φ може бути зображений формальним степеневим рядом

$$\varphi(\mathcal{W}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi(W_n). \quad (51)$$

Зауважимо, що якщо $\varphi = \delta_u$ для деякого $u \in \mathcal{M}$, то $\varphi(\mathcal{W}(t))$ може бути описаний наслідком 17. В цьому випадку функція є мероморфною і має особливості в точках $t_n = -1/y_n$ та нулі в точках $t_n = -1/x_n$, де $(y|x)$ — незвідне зображення u .

Використовуюючи ідеї з [1, 10] можна побудувати характер, який не є функціоналом значення в точці. Нехай λ і μ — комплексні числа. Розглянемо

$$u_n = \left(0, \dots, 0, \frac{\mu}{n}, \dots, \frac{\mu}{n} \middle| \frac{\lambda}{n}, \dots, \frac{\lambda}{n}, 0, \dots, 0\right).$$

З компактності, отримуємо, що $\{\delta_{u_n}\}$ має граничну точку $\psi_{\lambda, \mu}$ в M_b^{sup} .

Таким чином

$$\psi_{\lambda, \mu}(\mathcal{W}(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\lambda/n, \dots, \lambda/n, 0, \dots, 0)}{\sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\mu/n, \dots, \mu/n, 0, \dots, 0)}.$$

Враховуючи (підрозділ 2.1), що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^k G_k(\lambda/n, \dots, \lambda/n, 0, \dots, 0) = e^{\lambda t}$$

маємо

$$\psi_{\lambda, \mu}(\mathcal{W}(t)) = e^{(\lambda - \mu)t}.$$

Порівнюючи це зображення з наслідком 17, бачимо, що $\psi_{\lambda,\mu}$ не може збігатися з функціоналом значення в точці.

На спектрі алгебри Фреше A природними є такі топології: топологія Гельфанда і топологія Глісона. Топологія Гельфанда — це найслабша топологія на спектрі $M(A)$ відносно якої всі функції, які задаються перетворенням Гельфанда $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, $a \in A$, $\varphi \in M(A)$ будуть неперервними. З іншого боку, $M(A)$ є підмножиною топологічного спряженого простору A^* . Звуження сильної топології простору A^* на $M(A)$ називається топологією Глісона.

Твердження 40. *Існує неперервне, відносно топології Глісона, вкладення спектра $\mathcal{M}_{bs}$ алгебри $\mathcal{H}_{bs}$ у спектр M_b^{sup} алгебри H_b^{sup} .*

Доведення. Як було показано у твердженні 32, оператор Λ^{-1} є неперервним гомоморфізмом з H_b^{sup} в $\mathcal{H}_{bs}$ зі щільним образом. Тоді спряжений оператор $(\Lambda^{-1})^*$ буде неперервним лінійним оператором з $\mathcal{H}_{bs}^*$ в $(H_b^{sup})^*$. Позначимо Γ — звуження цього оператора на $\mathcal{M}_{bs} \subset \mathcal{H}_{bs}^*$. Тоді, для кожного $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}$, $\Gamma(\varphi) = \varphi \circ \Lambda^{-1}$. З того, що Λ^{-1} — гомоморфізм, випливає, що $\Gamma(\varphi) \in M_b^{sup}$. З неперервності $(\Lambda^{-1})^*$ отримуємо неперервність Γ .

Покажемо, що Γ — ін'єктивне відображення. Нехай $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}_{bs}$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Тоді, знайдеться функція $f \in \mathcal{H}_{bs}$ така, що $\varphi_1(f) \neq \varphi_2(f)$. З щільності образу оператора Λ^{-1} і неперервності φ_1, φ_2 випливає, що функцію f можна вибрати з образу оператора Λ^{-1} . Таким чином, існує функція $g \in H_b^{sup}$, така, що $g = \Lambda^{-1}(f)$ і

$$\Gamma(\varphi_1(g)) = \varphi_1(f) \neq \varphi_2(f) = \Gamma(\varphi_2(g)).$$

Тобто, Γ є ін'єктивним відображенням.

□

Зауважимо, що відображення Γ не є сюр'єктивним. Зокрема в образі Γ немає елемента δ_{u_0} для $u_0 = [(0, \dots, 0, 1|0)]$. Справді, припустимо що $\delta_{u_0} = \Gamma(\varphi)$ для деякого $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}$. Тоді,

$$\varphi(\Lambda^{-1}(g)) = g(u_0)$$

для довільного $g \in \mathcal{M}$. Зокрема, для $g = T_k$ маємо

$$\varphi(\Lambda^{-1})(T_k) = \varphi(F_k) = T_k(u_0) = -1$$

і ця рівність виконується для кожного натурального k . Але добре відомо, що не існує такого характеру $\varphi \in \mathcal{M}_{bs}$, що $\varphi(F_k) = -1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Крім топології Гельфанда і топології Глісона існує слабша топологія на спектрі M_b^{sup} алгебри H_b^{sup} , яку, за аналогією з симетричним випадком з попереднього розділу, ми будемо називати слабо поліноміальною топологією.

Позначимо w_p слабо поліноміальну топологію на M_b^{sup} , породжену наступною базою околів:

$$U_{\varepsilon, k_1, \dots, k_n}(\psi) = \{\psi \bullet \varphi : \varphi \in M_b^{sup}, \text{ і } |\varphi(T_{k_j})| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\}.$$

Оскільки, згідно з означенням і враховуючи комутативність згортки

$$U_{\varepsilon/2, k_1, \dots, k_n}(\psi) \bullet U_{\varepsilon/2, k_1, \dots, k_n}(\theta) \subset U_{\varepsilon, k_1, \dots, k_n}(\psi \bullet \theta),$$

операція згортки є неперервною в слабо поліноміальній топології M_b^{sup} .

Твердження 41. *Топологія w_p є гаусдорфовою*

Доведення. Якщо $\varphi \neq \psi$, то існує натуральне число k таке, що

$$|\varphi(T_k) - \psi(T_k)| = c > 0.$$

Покладемо $\varepsilon = c/3$. Тоді для довільних θ_1 і θ_2 в околі $U_{\varepsilon, k}(\delta_0)$

$$\begin{aligned} |(\varphi \bullet \theta_1)(T_k) - \varphi \bullet \theta_2(T_k)| &= |(\varphi(T_k) - \psi(T_k)) - (\theta_2(T_k) - \theta_1(T_k))| \geq \\ &\geq |(\varphi(T_k) - \psi(T_k))| - |(\theta_2(T_k) - \theta_1(T_k))| \geq c/3. \end{aligned}$$

Таким чином, околи $U_{\varepsilon, k}(\varphi)$ і $U_{\varepsilon, k}(\psi)$ не мають спільних точок.

□

Оборотність і гомоморфізми.

Якщо $u \in \mathcal{M}$ має обернений елемент відносно операції множення $\diamond$, то позначимо його $u^{-1} = u^{\diamond(-1)}$, тобто

$$u \diamond u^{-1} = u^{-1} \diamond u = \mathbb{I}.$$

Твердження 42. *Нехай $u \in \mathcal{M}$ і $\|u\| < 1$. Тоді $\mathbb{I} \bullet u^-$ є оборотним у кільці $\mathcal{M}$. При цьому,*

$$(\mathbb{I} \bullet u^-)^{-1} = \bigbullet_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n},$$

де $u^{\diamond 0} = \mathbb{I}$, $u^{\diamond n} = \underbrace{u \diamond \cdots \diamond u}_n$, а ряд праворуч збігається в $\mathcal{M}$.

Доведення. Використовуючи основну ідею доведення аналогічного твердження для класичних банахових алгебр, отримуємо

$$\left\| \bigbullet_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n = \frac{1}{1 - \|u\|} < \infty.$$

Отже, враховуючи повноту $\mathcal{M}$ маємо, що елемент $\bigbullet_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \in \mathcal{M}$. Крім того,

$$(\mathbb{I} \bullet u^-) \diamond \left(\bigbullet_{n=0}^{\infty} u^{\diamond n} \right) = \mathbb{I}.$$

□

Далі ми розглянемо гомоморфізми кільця $\mathcal{M}$ та його підкілець. Надалі ми не припускаємо, що гомоморфізми кілець зберігають множення на сталу. Зауважимо, що елемент x комутативної банахової алгебри A є оборотними тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x) \neq 0$ для кожного характера φ з A . В $\mathcal{M}$ ситуація інша. Нехай $\mathbb{I}^{\bullet n} = \underbrace{\mathbb{I} \bullet \cdots \bullet \mathbb{I}}_n = (0 | \underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)$.

Твердження 43. *Нехай φ — ненульовий гомоморфізм кілець з $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}$. Тоді $\varphi(\mathbb{I}^{\bullet n}) = n$, але $\mathbb{I}^{\bullet n}$ не є оборотним при $n > 1$.*

Доведення. Зрозуміло, що $\varphi(\mathbb{I}^{\bullet n}) = n\varphi(\mathbb{I}) = n$. З іншого боку, $\mathbb{I}^{\bullet n} \diamond u = u^{\bullet n} \neq \mathbb{I}$ для кожного $u \in \mathcal{M}$.

□

Приклад 4. Наведені нижче відображення є гомоморфізмами кілець з $\mathcal{M}$ в $\mathbb{C}$.

1. Поліноми T_n , $n \in \mathbb{N}$ є (неперервними) комплекснозначними гомоморфізмами кілець з $\mathcal{M}$, але тільки лінійний функціонал T_1 зберігає множення на сталі.

2. Нехай $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$. Визначимо

$$\Theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|.$$

Зрозуміло, що Θ є коректно визначеним. Адитивність та мультиплікативність будуть доведені для більш загального випадку.

Як звичайно, $\mathcal{R}$ є підкілцем $\mathcal{M}$, якщо він є підмножиною $\mathcal{M}$ і кільцем відносно операцій ‘ $\bullet$ ’ і ‘ $\diamond$ ’. Наприклад, нехай $\mathcal{M}_{00}$ складається з усіх елементів $u = [(y|x)]$ таких, що якщо $(y|x)$ є незвідним, тоді $\text{supp } x$ і $\text{supp } y$ є скінченними множинами. Тоді $\mathcal{M}_{00}$ є щільним підкілцем $\mathcal{M}$. Розглянемо кілька нетривіальних прикладів замкнутих підкілець $\mathcal{M}$.

Приклад 5. Нехай $\mathcal{M}_{\Delta}$, $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ визначені наступним чином:

$$\mathcal{M}_{\Delta} = \{u \in \mathcal{M}: |x_j| \leq 1, |y_j| \leq 1 \text{ для довільних незвідних зображень } (y|x) \in u\},$$

$$\mathcal{M}_S = \{u \in \mathcal{M}: |x_j| = 1 \text{ або } 0, |y_j| = 1 \text{ або } 0 \text{ для довільних незвідних зображень } (y|x) \in u\} \cup \{0\},$$

$$\mathcal{M}_1 = \{u \in \mathcal{M}: x_j = 1 \text{ або } 0, y_j = 1 \text{ або } 0 \text{ для довільних незвідних зображень } (y|x) \in u\} \cup \{0\}.$$

Зрозуміло, що $\mathcal{M}_{\Delta}$, $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ є підкілцями $\mathcal{M}$ і

$$\mathcal{M}_{\Delta} \supset \mathcal{M}_S \supset \mathcal{M}_1.$$

Також $\mathcal{M}_1$ ізоморфний кільцю $\mathbb{Z}$ цілих чисел відносно ізоморфізму

$$[(0|\underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)] \mapsto n, \text{ для } n \geq 0 \text{ і } [(1, \dots, 1, 0, \dots)|0] \mapsto n \text{ для } n < 0$$

і звуження топології з $(\mathcal{M}, \rho)$ на $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$ збігається з дискретною топологією.

У загальному випадку, нехай U є підмножиною $\mathbb{C}$. Позначимо через

$$\mathcal{M}_U = \{u \in \mathcal{M} : x_j \in U, y_j \in U \text{ для довільних}$$

$$\text{незвідних зображень } (y|x) \in u\} \cup \{0\}.$$

Тоді $\mathcal{M}_U$ є підкільцем $\mathcal{M}$, якщо U є замкненим відносно множення на $\mathbb{C}$ і $1 \in U$.

Твердження 44. Нехай $\gamma(t)$ — функція однієї змінної, яка коректно визначена і мультиплікативна на підмножині $U \in \mathbb{C}$. Визначимо

$$\Theta_\gamma(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(y_n), \quad u \in \mathcal{M},$$

де $(y|x) \in u$. Якщо U є замкненою відносно множення і $1 \in U$, тоді Θ_γ — комплекснозначний гомоморфізм кілець з $\mathcal{M}_U$.

Доведення. По-перше, зауважимо, що $\Theta_\gamma(u)$ не залежить від вибору зображення. Таким чином

$$\begin{aligned} \Theta_\gamma((y|x) \bullet (d|b)) &= \Theta_\gamma(y \bullet d|x \bullet b) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(x_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(y_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(d_n) = \Theta_\gamma(y|x) + \Theta_\gamma(d|b). \end{aligned}$$

За мультиплікативністю γ маємо

$$\Theta_\gamma((0|x) \diamond (0|b)) = \sum_{n=i,j}^{\infty} \gamma(x_i) \gamma(b_j) = \sum_{n=i}^{\infty} \gamma(x_i) \sum_{n=j}^{\infty} \gamma(b_j)$$

і $\Theta_\gamma(x|0) = -\Theta_\gamma(0|x)$. Отже,

$$\Theta_\gamma((y|x) \diamond (d|b)) = \Theta_\gamma((y \diamond b) \bullet (x \diamond d)|(x \diamond b) \bullet (y \diamond d))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=i}^{\infty} \gamma(x_i) \sum_{n=j}^{\infty} \gamma(b_j) + \sum_{n=i}^{\infty} \gamma(y_i) \sum_{n=j}^{\infty} \gamma(d_j) - \sum_{n=i}^{\infty} \gamma(y_i) \sum_{n=j}^{\infty} \gamma(b_j) - \sum_{n=i}^{\infty} \gamma(x_i) \sum_{n=j}^{\infty} \gamma(d_j) \\
&= \Theta_{\gamma}(y|x) \Theta_{\gamma}(d|b).
\end{aligned}$$

□

Приклад 6. Розглянемо деякі приклади комплекснозначних гомоморфізмів підкілець $\mathcal{M}$.

1. Нехай g — мультиплікативна функція з $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. У теорії чисел такі функції називаються цілком мультиплікативними арифметичними функціями. Тоді для $\gamma = |g|$, Θ_{γ} — комплекснозначні гомоморфізми кілець $\mathcal{M}_S$ і $\mathcal{M}_1$.
2. Нехай $\varepsilon < 1$ і $\varepsilon\Delta$ — замкнений круг в $\mathbb{C}$ радіуса ε і з центром в нулі. Тоді $\mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$ — ідеал $\mathcal{M}_1$. Нехай

$$\chi_{\mathbb{C} \setminus \varepsilon\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |t| \leq \varepsilon \\ 1, & \text{якщо } |t| > \varepsilon, \end{cases}$$

то $\Theta_{\chi_{\mathbb{C} \setminus \varepsilon\Delta}}$ — комплекснозначні гомоморфізми кілець з $\mathcal{M}_1$. Зауважимо, що якщо $u \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$ і $v \in \mathcal{M}_{\varepsilon\Delta}$, тоді $\rho(u, v) \geq \varepsilon$. Звідси маємо, що $\Theta_{\chi_{\mathbb{C} \setminus \varepsilon\Delta}}$ є неперервним.

Добре відомо, що кожен комплексний гомоморфізм банахової алгебри є неперервним. Для алгебр Фреше, питання про неперервність комплексних гомоморфізмів складає відому проблему Майкла 1952 року [67]. Ми не знаємо, чи кожен комплекснозначний гомоморфізм з $\mathcal{M}$ або його замкнутого підкілля є неперервним.

Степеневі операції та диференціювання, асоційовані з суперсиметричними поліномами на банаховому просторі.

У цьому підрозділі ми розглядаємо різні підходи до побудови степеневих операцій в кільці мультимножин, асоційованому з суперсиметричними поліномами від нескінченної кількості змінних. Будуть встановлені деякі співвідношення між побудованими степеневими операціями. Також, буде досліджено оператори диференціювання на алгебрах симетричних і суперсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі абсолютно збіжних послідовностей.

Нехай $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathcal{M}$. Ми будемо використовувати позначення

$$\bigodot_{k=1}^n u_k := u_1 \bullet u_2 \bullet \dots \bullet u_n.$$

Використовуючи операцію “ $\diamond$ ”, можемо розглянути для заданого $k \in \mathbb{N}$ природну степеневу функцію на $\mathcal{M}$

$$u \longmapsto u^{\diamond k} = \underbrace{u \diamond \dots \diamond u}_k.$$

Однак існують різні способи введення степеневі функції на $\mathcal{M}$ або $\mathcal{M}_+$. Визначимо

$$u^{[k]} = [(\dots, y_n^k, \dots, y_1^k | x_1^k, \dots, x_n^k, \dots)], \quad u = [(y|x)] \in \mathcal{M}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо $u = [(0|x)] \in \mathcal{M}_+$, то

$$u^{\langle k \rangle} = \bigodot_{i_1 < \dots < i_k} [(0|x_{i_1} \dots x_{i_k})] = [(0|x_1 x_2 \dots x_k, x_2 x_3 \dots x_{k+1}, \dots)].$$

Нарешті, для $u = [(0|x)] \in \mathcal{M}_+$, ми визначаємо

$$u^{\overline{\langle k \rangle}} = \bigodot_{i_1 \leq \dots \leq i_k} [(0|x_{i_1} \dots x_{i_k})].$$

Очевидно, що

$$T_1(u^{\diamond k}) = (T_1(u))^k, \quad T_1(u^{[k]}) = T_k(u)$$

$$T_1([(0|x)]^{\langle k \rangle}) = G_k(x), \quad T_1([(0|x)]^{\overline{\langle k \rangle}}) = H_k(x).$$

Для загального випадку $u = [(y|x)]$ покладемо

$$u^{\langle k \rangle} = \bigodot_{m+n=k} \bigodot_{\substack{i_1 \leq \dots \leq i_m \\ j_1 < \dots < i_n}} [(\underbrace{y_{i_1} \dots y_{i_m}}_{\text{if } m \text{ is odd}} x_{j_1} \dots x_{j_n} | \underbrace{y_{i_1} \dots y_{i_m}}_{\text{if } m \text{ is even}} x_{j_1} \dots x_{j_n})].$$

Твердження 45. Нехай $u = [(y|x)] \in \mathcal{M}$. Тоді $T_1(u^{\langle k \rangle}) = W_k(u)$.

Доведення. Використовуючи (44), ми можемо бачити, що

$$\begin{aligned} T_1(u^{\langle k \rangle}) &= \sum_{n+m=k, m=2s} H_m(y)G_n(x) - \sum_{n+m=k, m=2s+1} H_m(y)G_n(x) = \\ &= \sum_{n+m=k} H_m(-y)G_n(x) = W_k(u). \end{aligned}$$

□

Теорема 41. Для кожного $k \in \mathbb{N}$, степеневі операції $u \mapsto u^{\diamond k}$, $u \mapsto u^{[k]}$, $u \mapsto u^{\langle k \rangle}$ є коректно визначеними на $\mathcal{M}$ і неперервними.

Доведення. Припустимо, що $u = [(y|x)]$, $v = [(d|b)]$ і $(y|x) \sim (d|b)$. Тоді

$$T_n(u^{\diamond k}) = (T_n(u))^k = (T_n(v))^k = T_n(v^{\diamond k}), \quad n \in \mathbb{N},$$

тобто, $u^{\diamond k} = v^{\diamond k}$. Неперервність $u \mapsto u^{\diamond k}$ доведено в підрозділі 3.1. Аналогічно,

$$T_n(u^{[k]}) = T_{nk}(u) = T_{nk}(v) = T_n(v^{[k]}), \quad n \in \mathbb{N}$$

і, таким чином, $u^{[k]} = v^{[k]}$.

Нарешті,

$$T_n(u^{\langle k \rangle}) = T_1((u^{\langle k \rangle})^{[n]}) = T_1((u^{[n]})^{\langle k \rangle}) = W_k(u^{[n]}) = W_k(v^{[n]}) = T_n(v^{\langle k \rangle}).$$

Неперервність $u \mapsto u^{[k]}$ і $u \mapsto u^{\langle k \rangle}$ випливає з такого простого факту: якщо $\|u_j\| \rightarrow 0$, то $\|u^{[k]}\| \rightarrow 0$ і $\|u^{\langle k \rangle}\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. □

У підрозділі 3.1 доведено, що існує неперервний гомоморфізм $\Phi: H_b^{sup} \rightarrow \mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ зі щільною множиною значень, такий, що $\Phi(T_n) = F_n$ і $\Phi(W_n) = G_n$. Отже, звуження оберненого відображення $\Lambda = \Phi^{-1}$ на підпростір суперсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{sup}$ є ізоморфізмом алгебри $\mathcal{P}_{sup}$ на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$. Застосовуючи Λ до формули Ньютона, ми маємо:

$$kW_k(u) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} T_i(u) W_{k-i}(u), \quad u \in \mathcal{M}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (52)$$

Твердження 46. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $u \in \mathcal{M}$ виконується наступна рівність:

$$\underbrace{u^{\langle k \rangle} \bullet \dots \bullet u^{\langle k \rangle}}_k = \bigodot_{i=1}^k [(1|0)]^{\diamond(i+1)} \diamond u^{[i]} \diamond u^{\langle k-i \rangle}.$$

Доведення. Використовуючи (52), ми можемо записати

$$\begin{aligned} T_n \left(\underbrace{u^{\langle k \rangle} \bullet \dots \bullet u^{\langle k \rangle}}_k \right) &= kT_n(u^{\langle k \rangle}) = kW_k(u^{[n]}) = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} T_i(u^{[n]}) W_{k-i}(u^{[n]}) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} T_n(u^{[i]}) T_n(u^{\langle k-i \rangle}) = \\ &= T_n \left(\bigodot_{i=1}^k [(1|0)]^{\diamond(i+1)} \diamond u^{[i]} \diamond u^{\langle k-i \rangle} \right). \end{aligned}$$

Оскільки це вірно для кожного $n \in \mathbb{N}$, ми отримуємо бажану рівність. $\square$

Позначимо через $\nu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{M}$ таке відображення: $\nu(n) = [(0| \underbrace{1, \dots, 1}_n, 0, \dots)]$, якщо $n \geq 0$, і $\nu(n) = [(\dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{-n} | 0)]$, якщо $n < 0$. Зрозуміло, що ν є гомоморфізмом кільця. Нехай

$$q(t) = \sum_{k=0}^m n_k t^k$$

є поліномом з цілими коефіцієнтами. Для заданого $u \in \mathcal{M}$ ми розглядаємо такі перетворення з множини $\mathbb{Z}[t]$ поліномів із цілими коефіцієнтами в $\mathcal{M}$:

$$q_{\diamond}(u) = \bigodot_{k=0}^m \nu(n_k) u^{\diamond k};$$

$$q_{[\cdot]}(u) = \bigodot_{k=0}^m \nu(n_k) u^{[k]};$$

$$q_{\langle \cdot \rangle}(u) = \bigodot_{k=0}^m \nu(n_k) u^{\langle k \rangle}.$$

З доведених властивостей степеневих операцій маємо таке твердження.

Твердження 47. *Усі відображення $q \mapsto q_{\diamond}$, $q \mapsto q_{[\cdot]}$, $q \mapsto q_{\langle \cdot \rangle}$ є адитивними відображеннями і $q \mapsto q_{\diamond}$ є мультиплікативним відображенням між кільцями $\mathbb{Z}[t]$ і $\mathcal{M}$.*

Розглянемо наступні оператори на $\mathcal{H}_{bs}$:

$$\partial f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \bullet (t, 0, 0, \dots)) - f(x)}{t}.$$

Спочатку зауважимо, що ∂ є лінійним і задовольняє правило Лейбніца для диференціювання

$$\partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g)$$

для всіх f, g в області визначення ∂ . Крім того, ∂ є коректно визначеним на поліномах в $\mathcal{H}_{bs}$. Справді,

$$F_m(x \bullet (t, 0, 0, \dots)) - F_m(x) = F_m((t, 0, 0, \dots)) = t^m.$$

Таким чином,

$$\partial F_1 = 1 \quad \text{і} \quad \partial F_m(x) = 0 \quad \text{для} \quad m > 0.$$

Оскільки поліноми F_k , $k \in \mathbb{N}$ утворюють алгебраїчний базис в алгебрі всіх симетричних поліномів $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, оператор ∂ визначений на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$ і $\partial P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$ для кожного $P \in \mathcal{P}_s(\ell_1)$.

Твердження 48. *Оператор диференціювання ∂ є неперервним на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$.*

Доведення. Нехай $A_0: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ — оператор прямого зсуву на ℓ_1 ,

$$A_0(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

і d_1 — похідна Гато у напрямку $(1, 0, 0, \dots)$ на $H_b(\ell_1)$. Тоді ∂ — це звуження на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$ неперервного оператора $d_1 \circ C_{A_0}$, де $C_{A_0}(f)(x) = f(A_0(x))$, $f \in H_b(\ell_1)$. Таким чином, ∂ є неперервним на $\mathcal{H}_{bs}(\ell_1)$. $\square$

Твердження 49. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ маємо, що $\partial G_m = G_{m-1}$ і $\partial H_m = H_{m-1}$.

Доведення. Оскільки

$$G_m(x \bullet z) = \sum_{k+n=m} G_k(x) G_n(z), \quad x, z \in \ell_1,$$

маємо, що

$$G_m(x \bullet (t, 0, 0 \dots)) = \sum_{k=0}^m t^k G_k(x)$$

і тому $\partial G_m = G_{m-1}$. Другу рівність можна отримати аналогічно або за допомогою формул Ньютона і простої індукції. $\square$

Оператор диференціювання ∂ можна продовжити на суперсиметричні аналітичні функції. Нехай $\mathbb{I} = [(0|1)]$, отже $\mathbb{I}^- = [(1|0)]$. Покладемо

$$\partial_+ f(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u \bullet t\mathbb{I}) - f(u)}{t} \quad \text{і} \quad \partial_- f(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u \bullet t\mathbb{I}^-) - f(u)}{t},$$

де $u \in \mathcal{M}$. Подібно до симетричного випадку, і ∂_+ , і ∂_- неперервні та коректно визначені на всьому просторі H_b^{sup} .

Теорема 42. Для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\partial_+ W_m = W_{m-1} \quad \text{та} \quad \partial_- W_m = -W_{m-1},$$

де $W_0 = 1$.

Доведення. Згідно з (44), ми можемо записати

$$\begin{aligned} \partial_+ W_m(y|x) &= \partial_+ \sum_{k=0}^n G_k(x) H_{m-k}(-y) = \sum_{k=0}^n G_{k-1}(x) H_{m-k}(-y) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} G_k(x) H_{m-k-1}(-y) = W_{m-1}. \end{aligned}$$

Другу рівність можна довести таким же чином, враховуючи, що $H_{m-k}(-y) = (-1)^{m-k} H_{m-k}(y)$. $\square$

3.2. Суперсиметричні поліноми та кільце мультимножин банахової алгебри

3.2 Суперсиметричні поліноми та кільце мультимножин банахової алгебри

Ми розглядаємо можливі узагальнення результатів, отриманих у підрозділі 3.1, для більш загальних випадків. Замість простору послідовностей ℓ_1 , розглядаємо простір послідовностей $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, де x_n — елементи банахової алгебри $\mathcal{A}$ і кожна послідовність норм $(\|x_1\|_{\mathcal{A}}, \|x_2\|_{\mathcal{A}}, \dots, \|x_n\|_{\mathcal{A}}, \dots)$ є вектором у банаховому просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$ і симетричним базисом $\{e_n\}$.

У цьому підрозділі ми будуємо кільце мультимножин $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ для множин із мультиплікативної напівгрупи $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ і досліджуємо основні властивості. Зокрема, ми показуємо, що $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ є повним у метризованій топології, індукованій з X . Також досліджуємо гомоморфізми $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ та відповідні суперсиметричні поліноми.

Нагадаємо (див. [63] для деталей), що послідовність $\{e_n\}$ є *топологічним* базисом (або базисом *Шаудера*) в банаховому просторі X , якщо кожен елемент $x \in X$ можна однозначно виразити через

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m x_n e_n,$$

де границю взято в $(X, \|\cdot\|_X)$. Звідси, зокрема, ми маємо, що $x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Топологічний базис називається *симетричним*, якщо він еквівалентний базису $\{e_{\sigma(n)}\}$ для кожної перестановки σ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Це означає, що для кожного σ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{\sigma(n)}$ збігається. Відомо [63] (стор. 114), що кожен банаховий простір X із симетричним базисом має еквівалентну, так звану *симетричну*

норму таку, що

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \theta_n e_{\sigma(n)} \right\|_X = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \right\|_X$$

для кожної перестановки σ і послідовності чисел $\{\theta_n\}$ такої, що $|\theta_n| = 1$. Надалі ми припускаємо, що X має симетричну норму. У цьому випадку ми знаємо, що для кожного $x \in X$, $|x_n| \leq 2\|x\|$.

Нехай X — банаховий простір із нормованим симетричним базисом $\{e_n\}$ і симетричною нормою $\|\cdot\|_X$, нехай $\mathcal{A}$ — банахова алгебра з одиницею $\mathbf{e}$, і нехай $\mathcal{D}$ — замкнута мультиплікативна підгрупа в $\mathcal{A}$, що містить $\mathbf{e}$. Позначимо через $X(\mathcal{D})$ множину послідовностей $u = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $x_i \in \mathcal{D}$, і

$$\|u\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} e_i \|x_i\|_{\mathcal{A}} \right\|_X.$$

Також, позначимо через $\Lambda_X(\mathcal{D}) = X(\mathcal{D}) \times X(\mathcal{D})$, і ми представляємо кожен елемент $v \in \Lambda_X(\mathcal{D})$ як

$$v = (y|x) = (\dots, y_n, \dots, y_2, y_1 | x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

$x, y \in X(\mathcal{D})$. Очевидно, що $\Lambda_X(\mathcal{A})$ є банаховим простором з нормою

$$\|v\| = \|x\| + \|y\|,$$

і $\Lambda_X(\mathcal{D})$ є його закритою підмножиною.

Для заданого $x \in \Lambda_X(\mathcal{D})$ ми позначаємо через $\text{supp } x$ підмножину всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, що $x_n \neq 0$.

Нехай σ, μ — перестановки на $\mathbb{N}$ і $(y|x) \in X(\mathcal{D})$. Визначимо

$$(\sigma, \mu)(y|x) = (\dots, y_{\sigma(n)}, \dots, y_{\sigma(1)} | x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, \dots).$$

Нехай $u = (y|x)$ і $w = (d|b)$ належать $\Lambda_X(\mathcal{D})$. Тоді,

$$u \bullet w = (y \bullet d | x \bullet b) = (\dots, d_n, y_n, \dots, d_1, y_1 | x_1, b_1, \dots, x_n, b_n, \dots).$$

Зауважимо, що якщо $x, b \in X(\mathcal{D})$, тоді $\|x \bullet b\| \leq \|x\| + \|b\|$. Отже, $u \bullet w \in \Lambda_X(\mathcal{D})$ для всіх $u, w \in \Lambda_X(\mathcal{D})$.

Розглянемо еквівалентність, визначену таким чином: $(y|x) \sim (y'|x')$ тоді і тільки тоді, коли існують вектори $(a|a), (c|c) \in \Lambda_X(\mathcal{D})$, та бієкції σ і μ такі, що σ відображає $\text{supp } x \bullet c$ на $\text{supp } x' \bullet a$ і μ відображає $\text{supp } y \bullet c$ на $\text{supp } y' \bullet a$. Окрім цього,

$$(\sigma, \mu)((y'|x') \bullet (a|a)) = (y|x) \bullet (c|c). \quad (53)$$

Позначимо через $\mathcal{M}(\mathcal{D}) = \mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ фактор-множину $\Lambda_X(\mathcal{D})/\sim$ по відношенню еквівалентності “ $\sim$ ”. Позначимо через $[(y|x)] \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ клас еквівалентності, що містить елемент $(y|x)$. Очевидно, для кожного $a \in X(\mathcal{D})$, $(a|a) \sim (0|0)$, отже, $[(y|x) \bullet (x|y)] = [(0|0)]$. Крім того, позначимо $\mathcal{M}^+(\mathcal{D}) = \{[(0|x)]: x \in \Lambda_X(\mathcal{D})\}$.

Пояснимо визначення еквівалентності більш детально. Вимога, щоб σ і μ діяли бієктивно між носіями відповідних векторів означає, що нульові координати “не мають значення”, тобто, наприклад,

$$\begin{aligned} &(\dots, y_n, \dots, y_2, y_1 | x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \sim \\ &(\dots, y_n, 0, \dots, 0, y_2, 0, y_1 | x_1, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, \dots). \end{aligned}$$

Також, наприклад,

$$\begin{aligned} &(\dots, y_n, \dots, y_2, y_1 | x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \sim \\ &(\dots, y_n, \dots, y_2, y_1, \lambda | \lambda, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \end{aligned}$$

для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$. Крім того, класи еквівалентності є інваріантними відносно перестановок координат x і y окремо. Цей підхід дозволяє нам розглядати $\mathcal{M}^+(\mathcal{D})$ як набір мультимножин з $\mathcal{D}$. Точніше, підмножину $\mathcal{M}_{00}^+(\mathcal{D})$, що складається з усіх елементів у $\mathcal{M}^+(\mathcal{D})$ зі скінченними носіями, можна природним чином ототожнити з множиною всіх скінченних мультимножин ненульових елементів у $\mathcal{D}$, а операція “ $\bullet$ ” фактично є об’єднанням мультимножин.

Ми кажемо, що $(y'|x')$ є *незвідним* представленням $[u] \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$, якщо $[(y'|x')] = [u]$ і $(y'|x') \sim (y|x)$ означає, що

$$(y|x) = (\sigma, \mu)((y'|x') \bullet (a|a))$$

для деяких перестановок σ, μ на $\mathbb{N}$ і $(a|a) \in \Lambda_X(\mathcal{D})$. Іншими словами, для кожної ненульової координати x'_i вектора x' ми маємо $x'_i \neq y'_j$ для всіх координат y'_j вектора y' .

Твердження 50. Для кожного $[u] \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$ існує незвідне представлення.

Доведення. Нехай $(y|x)$ є представником $[u]$. Оскільки елементи $\sum_n e_n \|x_n\|_{\mathcal{A}}$ і $\sum_n e_n \|y_n\|_{\mathcal{A}}$ належать до банахового простору X з базисом Шаудера e_n , то звідси випливає, що $\|x_n\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ і $\|y_n\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Без втрати загальності ми можемо припустити, що координати x впорядковані так, що $\|x_1\|_{\mathcal{A}} \geq \|x_2\|_{\mathcal{A}} \geq \dots \geq \|x_n\|_{\mathcal{A}} \geq \dots$. Якщо існує j таке, що $x_1 = y_j$, тоді видаляємо координату x_1 в x і y_j в y , і позначимо через $x^{(1)}$ і $y^{(1)}$ отримані вектори. Якщо такого числа j не існує, ми позначаємо $x^{(1)} = x$ і $y^{(1)} = y$. Припустимо, що $x^{(n)}$ і $y^{(n)}$ вже побудовано. Якщо існує такий j , що $x_{n+1} = y_j$, тоді ми видаляємо координату x_{n+1} в $x^{(n)}$ і y_j в $y^{(n)}$ і позначимо через $x^{(n+1)}$ і $y^{(n+1)}$ отримані вектори. В іншому випадку покладемо $x^{(n+1)} = x^{(n)}$ і $y^{(n+1)} = y^{(n)}$. Таким чином, ми отримаємо послідовність $(y^{(n)}|x^{(n)})$ в $\Lambda_X(\mathcal{D})$, яка, очевидно, є фундаментальною. За повнотою $\Lambda_X(\mathcal{D})$, існує границя

$$(y'|x') = \lim_{n \rightarrow \infty} (y^{(n)}|x^{(n)}).$$

Нехай a — вектор у $X(\mathcal{D})$ такий, що його координати a_n є вилученими координатами з x . Тоді $(y|x) = (y' \bullet a|x' \bullet a)$ і, отже, $(y'|x')$ є представником $[u]$. Згідно з конструкцією, $(y'|x')$ є незвідним. $\square$

Введемо тепер комутативну операцію “+” на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$.

Означення 13. Для заданих $\mathbf{u} = [u] = [(y|x)]$ і $\mathbf{w} = [w] = [(d|b)]$ у $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ визначимо

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} := [u \bullet w] = [(y \bullet d|x \bullet b)].$$

Крім того, покладемо $-\mathbf{u} = -[(y|x)] := [(x|y)]$.

Твердження 51. Операція “+” є коректно визначеною для $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, і $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), +)$ — комутативна група з нулем (нейтральний елемент), $0 = [(0|0)] = [(\dots, 0|0, \dots)]$.

Доведення. З визначення операції випливає, що $\mathbf{u} + 0 = \mathbf{u}$ і $\mathbf{u} - \mathbf{u} = 0$. Якщо $\mathbf{u} = [(y'|x')] \mathbf{i} \mathbf{w} = [(d'|b')] \mathbf{i} \mathbf{w}$, тоді, згідно з (53) і твердженням 50, $(y|x) = (y' \bullet a|x' \bullet a) \mathbf{i} (d|b) = (d' \bullet c|b' \bullet c)$ для деяких $a \mathbf{i} c$. Отже,

$$\begin{aligned} [(y|x)] + [(d|b)] &= [(y'|x') \bullet (a|a)] + [(d'|b') \bullet (c|c)] = \\ &= [(y'|x')] + [(d'|b')] + [(a|a)] + [(c|c)] = [(y'|x')] + [(d'|b')]. \end{aligned}$$

Таким чином, результат не залежить від представників. $\square$

Нехай $x, y \in X(\mathcal{D})$. Через $x \diamond y$ ми позначимо результуючу послідовність упорядкування множини $\{x_i y_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ одним індексом у певному фіксованому порядку.

Твердження 52. *Нехай $x, y \in X(\mathcal{D})$. Тоді $x \diamond y \in X(\mathcal{D})$ і $\|x \diamond y\| \leq 2\|x\|\|y\|$. Крім того, якщо $\mathcal{D}$ такий, що $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ для кожного $a, b \in \mathcal{D}$, і $X = c_0$ або ℓ_p для деякого $1 \leq p < \infty$, тоді $\|x \diamond y\| = \|x\|\|y\|$.*

Доведення. Нехай $k(i, j)$ — бієкція з $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Відповідно до безпосередніх розрахунків,

$$\|x \diamond y\| = \left\| \sum_{i,j=1}^{\infty} \|x_i y_j\|_{\mathcal{A}} e_{k(i,j)} \right\|_X \leq \sup_i \|x_i\|_{\mathcal{A}} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|_{\mathcal{A}} e_j \right\|_X \leq 2\|x\|\|y\|.$$

Нехай $\mathcal{D}$ таке, що $\|ab\| = \|a\|\|b\|$ для кожного $a, b \in \mathcal{D}$. Якщо $X = \ell_p(\mathcal{D})$, тоді

$$\|x \diamond y\|^p = \sum_{i,j=1}^{\infty} \|x_i y_j\|_{\mathcal{A}}^p = \sum_{i,j=1}^{\infty} \|x_i\|_{\mathcal{A}}^p \|y_j\|_{\mathcal{A}}^p = \|x\|^p \|y\|^p.$$

Якщо $X = c_0$, тоді

$$\|x \diamond y\| = \sup_{i,j} \|x_i y_j\|_{\mathcal{A}} = \sup_{i,j} \|x_i\|_{\mathcal{A}} \|y_j\|_{\mathcal{A}} = \|x\|\|y\|.$$

$\square$

Далі визначимо множення на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$.

Означення 14. Якщо $\mathbf{u} = [(0|x)]$ і $\mathbf{v} = [(0|y)]$, ми визначаємо $\mathbf{uv} = [(0|x \diamond y)]$. Якщо $\mathbf{u} = [(y|x)]$ і $\mathbf{v} = [(d|b)]$ належать $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, то ми визначаємо

$$\mathbf{uv} = [((y \diamond b) \bullet (x \diamond d)|(y \diamond d) \bullet (x \diamond b))].$$

Легко перевірити (див. [25] та підрозділ 3.1), що операція множення є коректно визначеною та асоціативною, і що в $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ виконується дистрибутивний закон відносно додавання. Якщо $\mathcal{A}$ є комутативною банаховою алгеброю, то введене множення є комутативним. Отже, маємо наступне твердження:

Твердження 53. $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), +, \cdot)$ — кільце з нулем $0 = [(0|0)]$ і одиницею $\mathbb{I} = [(0|\mathbf{e}, 0, \dots)]$. Якщо $\mathcal{A}$ є комутативною алгеброю, то кільце $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), +, \cdot)$ теж є комутативним.

Зауважимо, що $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ не є алгеброю, навіть якщо $\mathcal{D} = \mathbb{C}$, оскільки це не лінійний простір (див. підрозділ 3.1). Однак, на даному кільці можна ввести норму, яка має природні властивості та індукує метризовану топологію. Згадаймо наступне означення (див. [19]).

Означення 15. Якщо R — довільне кільце, то дійсна функція $\|z\|$, визначена на R , називається нормою для R , якщо вона задовольняє такі умови для всіх $z, r \in R$:

1. $\|z\| \geq 0$ і $\|z\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $z = 0$,
2. $\|z + r\| \leq \|z\| + \|r\|$,
3. $\|-z\| = \|z\|$,
4. $\|zr\| \leq C\|z\|\|r\|$ для деякої константи $C > 0$.

Означення 16. Визначимо норму на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ таким чином:

$$\|\mathbf{u}\| = \|[(y|x)]\| := \|(y'|x')\| = \|x'\| + \|y'\|,$$

де $(y'|x')$ є незвідним представником $\mathbf{u}$.

Твердження 54. Норма в означенні 16 є коректно визначеною на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ і задовольняє умови означення 15. Окрім цього,

$$\|\mathbf{u}\| = \min_{(y|x) \in \mathbf{u}} (\|x\| + \|y\|).$$

Доведення. Зауважимо, що незвідний представник $\mathbf{u}$ загалом не є єдиним. Однак, якщо $(y'|x')$ і $(y''|x'')$ є незвідними представниками $\mathbf{u}$, то вони складаються з однакових координат (з точністю до перестановки (σ, μ) ненульових координат) і тому $\|(y'|x')\| = \|(y''|x'')\|$. Таким чином, норма є коректно визначеною.

Зрозуміло, що якщо $\mathbf{u} = 0$, то $[(0|0)]$ є його незвідним представником і, отже, $\|\mathbf{u}\| = 0$. В іншому випадку, $\|\mathbf{u}\| \geq 0$. Друга властивість норми, очевидно, випливає з відповідної властивості трикутника норми на лінійному просторі. Крім того, $\|-\mathbf{u}\| = \|(x'|y')\| = \|(y'|x')\| = \|\mathbf{u}\|$.

Для будь-якого представника $(y|x)$ елемента $\mathbf{u}$ ми маємо $\|(y|x)\| \geq \|(y'|x')\|$, де $|(y'|x')\|$ є незвідним представником $\mathbf{u}$. Отже,

$$\|\mathbf{u}\| = \min_{(y|x) \in \mathbf{u}} (\|x\| + \|y\|).$$

Нехай $\mathbf{u} = [(y|x)]$ і $\mathbf{w} = [(d|b)] \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$, та $(y'|x')$ і $(b'|d')$ — відповідні незвідні представники. Тоді, за твердженням 52,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{uw}\| &= \|[(y'|x')(b'|d')]\| = \|[(y' \diamond b') \bullet (x' \diamond d') | (y' \diamond d') \bullet (x' \diamond b')]\| \leq \\ &\|((y' \diamond b') \bullet (x' \diamond d'))\| + \|((y' \diamond d') \bullet (x' \diamond b'))\| \leq \\ &2\|y'\| \|b'\| + 2\|x'\| \|d'\| + 2\|y'\| \|b'\| + 2\|x'\| \|b'\| = 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|. \end{aligned}$$

Таким чином, $\|\cdot\|$ задовольняє умову 4 в означенні 15 для $C = 2$. Крім того, за твердженням 52 ми можемо покласти $C = 1$, якщо $X = c_0$ або ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. $\square$

Визначимо метрику ρ на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, пов'язану з нормою природним чином. Нехай $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ належить $\mathcal{M}(\mathcal{D})$. Покладемо

$$\rho(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|.$$

Добре відомо та легко перевірити, що ρ є метрикою.

Приклад 7. Нехай $\mathbf{u}^{(n)} = [(0|h_n, 0, \dots)]$, $h_n \in \mathcal{D}$ є послідовністю в $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ такою, що $h_n \rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$. Якщо $h \neq 0$, то $\mathbf{u}^{(n)} \rightarrow [(0|h, 0, \dots)]$ тоді і тільки тоді, коли $h_n = h$ для всіх достатньо великих значень n . Дійсно, якщо $h_n \neq h$, то

$$\|[(0|h_n, 0, \dots)] - [(0|h, 0, \dots)]\| = \|[(\dots, 0, h_n|h, 0, \dots)]\| =$$

$$\|h_n\|_{\mathcal{A}} + \|h\|_{\mathcal{A}} \geq \|h\|_{\mathcal{A}}.$$

З іншого боку, якщо $h = 0$, тоді $\|\mathbf{u}^{(n)} - 0\| = \|h_n\|_{\mathcal{A}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Твердження 55. Фактор-відображення $(y|x) \mapsto [(y|x)]$ є розривним як відображення з банахового простору $\Lambda_X(\mathcal{D})$ у метричний простір $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), \rho)$ у кожній точці $\Lambda_X(\mathcal{D})$, окрім нуля.

Доведення. Приклад 7 можна легко модифікувати, щоб показати розривність фактор-відображення в будь-якій ненульовій точці. Дійсно, нехай $v = (y|x) \neq 0$; тоді, без втрати загальності, ми можемо припустити, що $x_1 \neq 0$. Розглянемо $u^{(n)} = (y|(1 - 1/n)x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) \in \Lambda_X(\mathcal{D})$. Тоді $u^{(n)} \rightarrow v$ в $\Lambda_X(\mathcal{D})$ при $n \rightarrow \infty$, але

$$\| [u^{(n)}] - [v] \| = \| [\dots, 0, x_1|(1 - 1/n)x_1, 0, \dots] \| =$$

$$2\|x_1\|_{\mathcal{A}} - \frac{\|x_1\|_{\mathcal{A}}}{n} > \|x_1\|_{\mathcal{A}} > 0,$$

і тому фактор-відображення є розривним в v . З іншого боку, якщо послідовність $u^{(n)}$ прямує до нуля, то $\|[u^{(n)}]\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, фактор-відображення є неперервним в нулі. $\square$

Теорема 43. Метричний простір $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), \rho)$ — повний.

Доведення. Нехай $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ належать $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ і нехай $(y|x)$ є незвідним представником $\mathbf{u}$. Ми стверджуємо, що існує незвідний представник $(d'|b') \in \mathbf{v}$ такий, що $\|(y|x) - (d'|b')\| < \varepsilon$ в $\Lambda_X(\mathcal{D})$. Дійсно, нехай $(d|b)$ — будь-який незвідний представник $\mathbf{v}$. Нерівність

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|[(y \bullet b|x \bullet d)]\| < \varepsilon$$

означає, що існує незвідний представник $(c|a)$ елемента $(y \bullet b|x \bullet d)$ такий, що $\|c\| + \|a\| < \varepsilon$. Зауважимо, що $(y \bullet b|x \bullet d)$ необов'язково є незвідним. Однак, оскільки обидва $(y|x)$ і $(d|b)$ є незвідними, може статися, що деякі координати y збігаються з деякими координатами d і що деякі координати x такі самі, як і деякі координати b . Побудуємо $(d'|b')$ так, що d' отримано шляхом перестановки координат d , а b' отримано шляхом перестановки координат b , тому координати d , які дорівнюють деяким координатам y , мають ті самі позиції в d' , що й відповідні координати в y , а координати b , які дорівнюють деяким координатам x , мають ті самі позиції в b' , що й відповідні координати в x . Тоді, $(d'|b') \sim (b|d)$ і

$$\|(y|x) - (d'|b')\| = \|(y \bullet b'|x \bullet d')\| = \|c\| + \|a\| < \varepsilon.$$

Нехай $\mathbf{u}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$ — послідовність Коші в $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), \rho)$. Взявши підпослідовність, якщо необхідно, ми можемо припустити що якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, то $\rho(\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{u}^{(n)}) < \frac{1}{2^{N+1}}$. Виберемо незвідні представники $(y^{(m)}|x^{(m)})$ елемента $\mathbf{u}^{(m)}$ з

$$\|(y^{(m+1)}|x^{(m+1)}) - (y^{(m)}|x^{(m)})\| = \rho(\mathbf{u}^{(m+1)}, \mathbf{u}^{(m)}) < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Таким чином, якщо $n \geq N$ і $m \geq N$, тоді

$$\|(y^{(m)}|x^{(m)}) - (y^{(n)}|x^{(n)})\| < \frac{1}{2^N}.$$

Отже, $(y^{(m)}|x^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}$ є послідовністю Коші в $X(\mathcal{D})$ і тому має границю $z^{(0)} = (y^{(0)}|x^{(0)})$. Нехай $z_i^{(m)}$ — i -та координата $z^{(m)} = (y^{(m)}|x^{(m)})$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тобто $z_i^{(m)} = x_i^{(m)}$, якщо $i > 0$ і $z_i^{(m)} = y_{-i}^{(m)}$, якщо $i < 0$. Очевидно, що $z_i^{(m)} \rightarrow z_i^{(0)}$ при $m \rightarrow \infty$. Ми стверджуємо, що якщо $z_i^{(0)} = c \neq 0$, то існує таке число N , що для кожного $m > N$, $z_i^{(m)} = c$. Дійсно, якщо це не так, то для кожного достатньо великого $n, m \in \mathbb{N}$ маємо, що $\rho(\mathbf{u}^{(m)}, \mathbf{u}^{(n)}) > c$ і отримуємо протиріччя.

Для заданого $\varepsilon > 0$ позначимо через z^ε вектор у $X(\mathcal{D})$ такий, що z^ε має скінченний носій, $z_i^\varepsilon = z_i^{(0)}$ або $z_i^\varepsilon = 0$ і

$$\rho([z^\varepsilon], [z^{(0)}]) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зауважимо, що для цього випадку $\rho([z^\varepsilon], [z^{(0)}]) = \|z^\varepsilon - z^{(0)}\|$. Нехай N — таке число, що для кожного $n > N$, $z_i^\varepsilon = z_i^{(n)}$ для всіх $i \in \text{supp } z^\varepsilon$ і $\|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отже,

$$\rho([z^{(n)}], [z^\varepsilon]) = \|z^\varepsilon - z^{(n)}\| \leq \|z^\varepsilon - z^{(0)}\| + \|z^{(n)} - z^{(0)}\| < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\rho([z^{(n)}], [z^{(0)}]) \leq \rho([z^{(n)}, z^\varepsilon]) + \rho([z^\varepsilon, z^{(0)}]) < \varepsilon.$$

Отже, $\mathbf{u} = [z^{(0)}]$ є границею $\mathbf{u}^{(m)}$ і, отже, простір $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), \rho)$ — повний. $\square$

З нерівностей трикутника та мультиплікативного трикутника норми ми маємо, що алгебраїчні операції спільно неперервні в $(\mathcal{M}(\mathcal{D}), \rho)$. Дійсно, нехай $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{u}') < \varepsilon_1$ і $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{v}') < \varepsilon_2$; тоді

$$\rho(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u}' + \mathbf{v}') < \|(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u}' + \mathbf{v}')\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

і

$$\rho(\mathbf{u}\mathbf{v}, \mathbf{u}'\mathbf{v}') < 2\varepsilon_2\|\mathbf{u}\| + 2\varepsilon_1\|\mathbf{v}\| + 4\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

З неперервності додавання випливає, що якщо Φ є адитивним відображенням з $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ в адитивну топологічну групу і Φ є неперервним в нулі, то воно буде неперервним в будь-якій точці.

Нехай $\mathcal{U}$ — замкнена мультиплікативна напівгрупа іншої банахової алгебри $\mathcal{B}$ і Y — банаховий простір із симетричним базисом.

Теорема 44. *Нехай γ — мультиплікативне відображення з $\mathcal{D}$ в $\mathcal{U}$. Якщо існує константа C_γ така, що $\|\gamma(z)\|_{\mathcal{B}} \leq C_\gamma\|z\|_{\mathcal{A}}$, $z \in \mathcal{D}$, то існує неперервний гомоморфізм кільця*

$$\Phi_\gamma: \mathcal{M}_X(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{M}_Y(\mathcal{U}),$$

що визначається як

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma(\mathbf{u}) &= \Phi_\gamma([(y|x)]) = \\ &= [(\dots, \gamma(y_n), \dots, \gamma(y_2), \gamma(y_1)) | \gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_n), \dots)]. \end{aligned}$$

Доведення. Очевидно, що $\Phi_\gamma([(y|x)])$ є адитивним і не залежить від представника. Окрім цього,

$$\begin{aligned} \|\Phi_\gamma([(y|x)])\| &= \\ \|[(\dots, \gamma(y_n), \dots, \gamma(y_2), \gamma(y_1)|\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_n) \dots)]\| &\leq C_\gamma \|\mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

Нехай $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ і нехай $(y|x)$ є його незвідним представником. Тоді

$$\|\Phi_\gamma(\mathbf{u})\| = \|\gamma(x)\| + \|\gamma(y)\| \leq C_\gamma(\|x\| + \|y\|) = C_\gamma \|\mathbf{u}\|.$$

Отже, Φ_γ є неперервним в нулі і, враховуючи адитивність, він є неперервним в кожній точці $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$.

За мультиплікативністю γ ,

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma([(0|x)][(0|x')]) &= [(0|\gamma(x_1)\gamma(x'_1), \dots, \gamma(x_n)\gamma(x'_n) \dots)] = \\ &= \Phi_\gamma([(0|x)])\Phi_\gamma([(0|x')])). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma([(y|x)][(y'|x')]) &= \\ \Phi_\gamma([(y|0)][(y'|0)]) + \Phi_\gamma([(0|x)][(0|x')]) - & \\ \Phi_\gamma([(0|x)][(0|y')]) - \Phi_\gamma([(0|0)][(0|x')]) &= \\ \Phi_\gamma([(y|x)])\Phi_\gamma([(y'|x')])). & \end{aligned}$$

□

Зауважимо, що в теоремі 44 нам не потрібна неперервність γ .

Приклад 8. Нехай $\mathcal{D} = B$ — відкрита одинична куля з центром в нулі банахової алгебри $\mathcal{A}$ і $\mathcal{U} = B_\varepsilon \cup \{\mathbf{e}\}$, де $\mathbf{e}$ — одиниця алгебри $\mathcal{A}$, а B_ε — відкрита куля радіуса $0 < \varepsilon < 1$, з центром в нулі $\mathcal{A}$. Крім того, нехай $X = Y$. Визначимо $\gamma: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{U}$ як

$$\gamma(z) = \begin{cases} z & \text{якщо } z \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Тоді Φ_γ задовольняє умови теореми 44 і, таким чином, є неперервним.

Наслідок 19. *Будь-який неперервний гомоморфізм φ з банахової алгебри $\mathcal{A}$ в банахову алгебри $\mathcal{B}$ можна продовжити до неперервного гомоморфізму з $\mathcal{M}_X(\mathcal{A})$ в $\mathcal{M}_Y(\mathcal{B})$ для будь-якого нескінченновимірного банахового простору Y із симетричним базисом.*

Доведення. Оскільки φ є неперервним лінійним і мультиплікативним оператором з $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, звідси випливає, що

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \|\varphi\| \|z\|_{\mathcal{A}}, \quad z \in \mathcal{A}.$$

Отже, Φ_γ задовольняє умови теореми 44 для $\gamma = \varphi$; таким чином, Φ_φ є неперервним гомоморфізмом з $\mathcal{M}_X(\mathcal{A})$ в $\mathcal{M}_Y(\mathcal{B})$. Відображення $z \mapsto [(0|z, 0, \dots)]$ — це вкладення $\mathcal{A}$ в $\mathcal{M}_X(\mathcal{A})$ і

$$\Phi_\varphi[(0|z, 0, \dots)] = [(0|\varphi(z), 0, \dots)].$$

Таким чином, ми можемо розглядати Φ_φ як продовження φ . Зауважимо, що $z \mapsto [(0|z, 0, \dots)]$ не є гомоморфізмом кілець, оскільки він не є адитивним.

Наступний приклад показує, що для деяких випадків умова $\|\gamma(z)\|_{\mathcal{B}} \leq C_\gamma \|z\|_{\mathcal{A}}$ не є необхідною для неперервності Φ_γ .

Приклад 9. *Нехай $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, нехай $Y = \ell_1$ і нехай n — натуральне число, $n \geq p$. Покладемо $\gamma(z) = z^n$, $z \in \mathcal{A}$. Тоді для кожної банахової алгебри $\mathcal{A}$, відображення Φ_γ з $\mathcal{M}_{\ell_p}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{M}_{\ell_1}(\mathcal{A})$ є неперервним гомоморфізмом. Дійсно, оскільки $n \geq p$, то $\Phi_\gamma(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}_{\ell_1}(\mathcal{A})$ для кожного $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{\ell_p}(\mathcal{A})$ та*

$$\|\Phi_\gamma(\mathbf{u})\| \leq \|\mathbf{u}\|^n.$$

Таким чином, Φ_γ — неперервне в нулі і, отже, неперервне.

Приклад 10. *Нехай $\gamma(z) = \|z\|_{\mathcal{A}}$. Тоді Φ_γ відображає $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ в $\mathcal{M}_X(\mathbb{C})$, і є неперервним і адитивним. Якщо норма $\mathcal{A}$ є мультиплікативною, то Φ_γ є мультиплікативним.*

Зауважимо, що якщо Φ є гомоморфізмом з $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ в $\mathcal{M}_Y(\mathcal{U})$ і для кожного $z \in \mathcal{D}$,

$$\Phi([0|z, 0, \dots]) = ([0|w, 0, \dots])$$

для деякого $w \in \mathcal{U}$, то відображення $\gamma: z \mapsto w$ є мультиплікативним. Однак ми не знаємо, чи кожен гомоморфізм із $\mathcal{M}_X(\mathcal{D})$ в $\mathcal{M}_Y(\mathcal{U})$ має вигляд, як у теоремі 44.

Розглянемо векторнозначні відображення на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$. Нехай E — лінійний нормований простір. Кажемо, що відображення $f: \Lambda_X(\mathcal{D}) \rightarrow E$ є *суперсиметричним*, якщо $f(y|x) = f(y'|x')$, коли $(y|x) \sim (y'|x')$. Фактично, кожна суперсиметрична функція може бути визначена на $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ як $\tilde{f}([(y|x)]) = f(y|x)$. Легко перевірити, що якщо f має вигляд

$$f(y|x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(x_i) - \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(y_j), \quad (54)$$

де γ — відображення з $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ в E , то тоді $\tilde{f}$ є суперсиметричною і адитивною. Якщо γ є мультиплікативним, то і $\tilde{f}$ є мультиплікативною.

Приклад 11. Нехай $(y|x)$ — незвідний представник $u \in \Lambda_X(\mathcal{D})$. Покладемо

$$f(u) = \|x\| - \|y\|.$$

Тоді f є суперсиметричною комплекснозначною функцією.

Якщо $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ є банаховою алгеброю, то $\Lambda_X(\mathcal{A})$ є банаховим простором, і ми можемо розглядати *суперсиметричні поліноми* на $\Lambda_X(\mathcal{A})$, тобто поліноміальні відображення в нормований простір E , які є суперсиметричними. Нагадаємо, що відображення P_n нормованого простору Z в E є n -однорідним поліномом, якщо існує мультилінійне відображення $\bar{P}_n$ на n -ій декартовій степені Z^n таке, що $P_n(x) = \bar{P}_n(x, \dots, x)$. Скінченна сума однорідних поліномів є поліномом. Неперервні поліноми на банахових просторах досліджувалися багатьма авторами (див., наприклад, [69]). Наступний приклад дає нам суперсиметричні поліноми на $\Lambda_{\ell_p}(\mathcal{A})$ для $1 \leq p \leq \infty$.

Приклад 12. Нехай $X = \ell_p$ для деякого $1 \leq p < \infty$, і $E = \mathcal{A}$. Для будь-якого цілого $n \geq p$ визначимо

$$T_m(y|x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^m - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^m.$$

Очевидно, що поліноми T_m — суперсиметричні. Оскільки відображення $x_i \mapsto x_i^m$ є мультиплікативним і $\|T_m(y|x)\| \leq (\|x\| + \|y\|)^m$, то відображення $\tilde{T}_m$ є неперервними гомоморфізмами кільця з $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$.

Поліном P на $\Lambda_{\ell_p}(\mathbb{C})$ є роздільно симетричним, якщо P інваріантний відносно всіх перестановок (σ, μ) , що діють як

$$\sigma: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, \dots)$$

і

$$\mu: (y_1, \dots, y_n, \dots) \mapsto (y_{\mu(1)}, \dots, y_{\mu(n)}, \dots).$$

Зрозуміло, що якщо P суперсиметричний, то він роздільно симетричний, але обернене твердження не вірне.

Приклад 13. Нехай

$$P(y|x) = \sum_{i < j} x_i x_j - \sum_{i < j} y_i y_j.$$

Очевидно, що P є роздільно симетричним. Крім того, $P(x|y) = -P(y|x)$. Однак P не є суперсиметричним. Дійсно, $P(\dots, 0, -1|1, 0, \dots) = 0$, тоді як $P(\dots, 0, 1, -1|1, 1, 0, \dots) = 2$. Проте,

$$(\dots, 0, -1|1, 0, \dots) \sim (\dots, 0, 1, -1|1, 1, 0, \dots).$$

Таким чином, P має різні значення на еквівалентних векторах, і, таким чином, він не може бути суперсиметричним.

Мінімальна алгебра, породжена поліномами T_m , $m \in \mathbb{N}$, вивчалася в підрозділі 3.1 та в [25] для випадку $X = \ell_1$ і $\mathcal{D} = \mathcal{A} = \mathbb{C}$. Наступна теорема показує, що кожен суперсиметричний поліном можна представити як скінченну алгебраїчну комбінацію поліномів T_m .

Теорема 45. Нехай P — суперсиметричний поліном на $\Lambda_{\ell_1}(\mathbb{C})$. Тоді P — алгебраїчна комбінація (тобто лінійна комбінація скінченних добутків) поліномів T_m , $m \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай P — суперсиметричний поліном на $\Lambda_{\ell_1}(\mathbb{C})$; тоді $P(y|x)$ є роздільно симетричним. Відповідно до [52], P є алгебраїчною комбінацією поліномів F_m^+ і F_m^- , $m \in \mathbb{N}$, де

$$F_m^+(y|x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^m \quad \text{і} \quad F_m^-(y|x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^m.$$

Отже, маємо

$$P(y|x) = \sum_{\substack{k_1 + 2k_2 + \dots + ik_i + \\ n_1 + 2n_2 + \dots + jn_j = 0}}^m c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j} F_1^+(x)^{k_1} \dots F_i^+(x)^{k_i} F_1^-(y)^{n_1} \dots F_j^-(y)^{n_j}$$

для деяких констант $c_{k_1 \dots k_i n_1 \dots n_j}$.

Очевидно, що $T_k = F_k^+ - F_k^-$. Позначимо $Q_k = F_k^+ + F_k^-$. Тоді існує поліном $q: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такий, що

$$P(y|x) = q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x)).$$

Відповідно до нашого припущення, $P(y \bullet a | x \bullet a) = P(y|x)$, $a \in \ell_1$. Ми бачимо, що

$$T_k(y \bullet a | x \bullet a) = T_k(y|x) \quad \text{і} \quad Q_k(y \bullet a | x \bullet a) = Q_k(y|x) + 2F_k(a)$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$. Відомо, що для кожного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$ існує вектор $a \in \ell_1$ такий, що $F_n(a) = \lambda_n$, $1 \leq n \leq m$ (див., наприклад, [10]). Таким чином, для кожного $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^m$,

$$q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x), \dots, Q_m(y|x)) = \\ q(T_1(y|x), \dots, T_m(y|x), Q_1(y|x) + \lambda_1, \dots, Q_m(y|x) + \lambda_m).$$

Однак це означає, що q не залежить від $Q_1, \dots, Q_m$. Отже, P є алгебраїчною комбінацією поліномів T_m , $m \in \mathbb{N}$.

□

Зокрема, у [25] було доведено, що $[(y|x)] = [(y'|x')]$ в $\mathcal{M}_{\ell_1}(\mathbb{C})$ тоді і тільки тоді, коли $T_m(y|x) = T_m(y'|x')$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Наступний приклад показує, що в більш загальному випадку суперсиметричні поліноми не розділяють точки $\mathcal{M}(\mathcal{D})$.

Приклад 14. Нехай $X = \ell_1$ і $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2$ — алгебра відносно покоординатного множення. Тоді вектор

$$(y|x) = \left(\dots, 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, 0, \dots \right)$$

не еквівалентний до $(0|0)$, але

$$T_m(y|x) = \begin{pmatrix} 3^m + 1^m - 1^m - 3^m \\ 4^m + 2^m - 2^m - 4^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай φ — комплексний гомоморфізм $\mathcal{A}$ і Φ — гомоморфізм кільця з $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ в $\mathcal{A}$. Тоді $\varphi \circ \Phi$ є комплексним гомоморфізмом кільця $\mathcal{M}(\mathcal{D})$. З наступного прикладу ми бачимо, що існують комплексні гомоморфізми в $\mathcal{M}(\mathcal{D})$, побудовані іншим способом.

Приклад 15. Розглянемо випадок $\mathcal{M}_{\ell_1}(\mathbb{C}^2)$, як у прикладі 14. Для довільних $k, n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$P_{kn}(y|x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k x_i'^n - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k y_i'^n,$$

де

$$(y|x) = \left(\dots, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}, \dots \right).$$

Зауважимо, що $\|P_{kn}(y|x)\| \leq (\|x\| + \|y\|)^{k+n}$. Поліноми P_{kn} мають вигляд (54) для $\gamma(x) = x_i^k x_i'^n$, а відображення γ є мультиплікативним. Отже, $\tilde{P}_{kn}$ є неперервними комплексними гомоморфізмами.

Поліноми P_{kn} у прикладі 15, які обмежені елементами $(0|x)$, називаються блочно-симетричними поліномами на $\ell_1(\mathbb{C}^2)$ (див., наприклад, [22, 57]) або поліномами Макмагона [74].

Приклад 16. Нехай $X = \ell_1$, і $\mathcal{A} = M_m$ — алгебра всіх квадратних матриць $m \times m$ для деякого фіксованого $m \in \mathbb{N}$. Тоді, $\mathcal{M}_{\ell_1}(M_m)$ є некомутативним кільцем матричних мультимножин. Нехай D — відображення з $\mathcal{M}_{\ell_1}(M_m)$ в $\mathcal{M}_{\ell_1}(\mathbb{C})$ такого вигляду:

$$D([(y|x)]) = [(\dots, \det(y_n), \dots, \det(y_2), \det(y_1) | \det(x_1), \det(x_2), \dots, \det(x_n), \dots)].$$

Оскільки визначник $\det(x_i)$ є мультиплікативним відображенням, D є гомоморфізмом. Неперервність D випливає з того факту, що $\|D(y|x)\| \leq (\|x\| + \|y\|)^m$.

Література

- [1] Chernega I., Galindo P. and Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2012. — Vol. 55. — P. 125–142.
- [2] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 395, № 2. — P. 569–577.
- [3] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The multiplicative convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. — 2014. — Vol. 27, № 2. — P. 575–585.
- [4] Chernega I., Zagorodnyuk A. Unbounded symmetric analytic functions on ℓ_1 // Math. Scand. — 2018. — Vol. 122, № 1. — P. 84–90.
- [5] Chernega I., Fushtei V., Zagorodnyuk A. Power operations and differentiations associated with supersymmetric polynomials on a Banach space // Carpathian Math. Publ. — 2020. — Vol. 12, № 2. — P. 360–367.
- [6] Chernega I., Zagorodnyuk A. Supersymmetric Polynomials and a Ring of Multisets of a Banach Algebra // Axioms. — 2022. — Vol. 11. — Article number 511.
- [7] Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. On the spectrum of the algebra of bounded type symmetric analytic functions on ℓ_1 // Math. Nachr. — 2024. — P. 1–11.
- [8] Chernega I., Zagorodnyuk A. Spectra of Algebras of Symmetric Entire Functions on ℓ_p // to appire.
- [9] Чернега І.В. Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2006. — Т. 49, № 2. — С. 52–57.
- [10] Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. — 2003. — Vol. 35, Iss. 2. — P. 55–64.
- [11] Ansemil J.M., Aron R.M. and Ponte S. Behavior of entire functions on balls in a Banach space // Indag. Math. — 2009. — Vol. 20, Iss. 4. — P. 483–489.
- [12] Apostol T. Introduction to Analytic Number Theory. — Springer-Verlag, New York, 1976.
- [13] Aron R. An introduction to polynomials on Banach spaces // Extracta Mathematica — 2002. — Vol. 17, Iss. 3. — P. 303–329.
- [14] Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 415. — P. 51–93.
- [15] Aron R. M., Cole B. J., Gamelin T. W. Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. — 1995. — Vol. 47. — P. 673–683.

- [16] Aron R., Falcó J., García D., Maestre M. Algebras of symmetric holomorphic functions of several complex variables // *Revista Matemática Complutense* — 2018. — Vol. 31, Iss. 3. — P. 651–672.
- [17] Aron R.M., Falcó J., Maestre, M. Separation theorems for group invariant polynomials // *J. Geom. Anal.* — 2018. — Vol. 28. — P. 393–404.
- [18] Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // *Bull. Lond. Math. Soc.* — 2016. — Vol. 48. — P. 779–796.
- [19] Aurora S. Multiplicative norms for metric rings // *Pacific J. Math.* — 1957. — Vol. 7. — P. 1279–1304.
- [20] Aron R., Galindo P., García D., Maestre M. Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 348, Iss. 2. — P. 543–559.
- [21] Banach S. Théorie des opérations linéaires. — Monografie Matematyczne, Warszawa, 1932.
- [22] Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic Basis of the Algebra of All Symmetric Continuous Polynomials on the Cartesian Product of ℓ_p -Spaces // *Axioms*. — 2022. — Vol. 11. — Article number 41.
- [23] Bong Chae S. Holomorphy and calculus in normed spaces. — Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 1985, 421 p.
- [24] Carne T. K., Cole B., Gamelin T. W. A uniform algebra of analytic functions on a Banach space // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1989. — Vol. 314. — P. 639–659.
- [25] Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Rings of Multisets and Integer Multinumerals // *Mathematics*. — 2022. — Vol. 10. — Article number 778.
- [26] Dineen S. The Cartan-Thullen theorem for Banach spaces // *Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa.* — 1970. — Vol. 24, Iss. 4. — P. 667–676.
- [27] Dineen S. Complex analysis in locally convex spaces. — North Holland, 1981.
- [28] Dineen S. Complex analysis on infinite dimensional spaces. — Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.
- [29] Falcó J., García D., Jung M., Maestre M. Group-invariant separating polynomials on a Banach space // *Publ. Mat.* — 2022. — Vol. 66. — P. 207–233.
- [30] Fréchet M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass // *C.R. Acad. Sci.* — 1904. — Vol. 139. — P. 848–850.
- [31] Fréchet M. Sur quelques points du Calcul fonctionnel // *Rend. Circ. mat. Palermo.* — 1906. — Vol. 22. — P. 1–74.
- [32] Fréchet M. Une définition fonctionnelle des polynômes // *Nouv. Ann. Math.* — 1909. — Vol. 9. — P. 145–162.

- [33] Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics — 2017. — Vol. 147, Iss. 4. — P. 743–761.
- [34] Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // RACSAM — 2020. — Vol. 114. — Article number 56.
- [35] Gamelin T.W. Uniform algebras. — Chelsea, New York, second ed., 1984.
- [36] Gâteaux R. Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques // C. R. Acad. Sci. Paris: Sér. A — 1913. — Vol. 157. — P. 325–327.
- [37] Gâteaux R. Fonctions d’une infinité des variables indépendantes // Bull. Soc. Math. France — 1919. — Vol. 47. — P. 70–96.
- [38] Gâteaux R. Sur diverses questions de calcul fonctionnel // Bull. Soc. Math. France — 1922. — Vol. 50. — P. 1–37.
- [39] González M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. — 1999. — Vol. 59, Iss. 2. — P. 681–697.
- [40] Gonzalo R. Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 202. — P. 379–397.
- [41] Graves L. M. Topics in the functional calculus, Part 1, The theory of functionals // Bull. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 41. — P. 641–662.
- [42] Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires // Mem. Amer. Math. Soc. vol. 16, 1955.
- [43] Gupta C.P. On the Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space. — Notas de Matemática, **37**, IMPA, Rio de Janeiro, 1968.
- [44] Hardy G. H., Littlewood J. E. and Polya G. Inequalities. — Cambridge University Press, 1934.
- [45] Hájek P. Polynomial algebras on classical Banach Spaces // Israel J. Math. — 1998. — Vol. 106. — P. 209–220.
- [46] Handera-Kalynovska O. V. and Kravtsiv V. V. The Waring-Girard formulas for symmetric polynomials on spaces ℓ_p // Carpathian Math. Publ. — 2024. — Vol. 16. — P. 407–413.
- [47] Hervé M. Analyticity in infinite dimensional spaces. — de Gruyter Stud. in Math., vol. 10, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.
- [48] Highberg I.E. Polynomials in abstract spaces. — Calif. Inst. Tech. Thesis, 1936.
- [49] Hilbert D. Wesen und Zieleiner Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variablen // Rend. del Circolo Mat. di Palermo. — 1909. — Vol. 27. — P. 59–74.

- [50] Hille E. Functional Analysis and semi-groups. — A.M.S. Colloquium Publications, vol. 31, 1948.
- [51] Isidro J.M. Characterization of the spectrum of some topological algebras of holomorphic functions // Advances in Holomorphy. Ed. J.A. Barroso. North Holland Math. Studies. — 1979. — Vol. 34. — P. 407–416.
- [52] Jawad F. Note on separately symmetric polynomials on the Cartesian product of ℓ_p // Mat. Stud. — 2018. — Vol. 50. — P. 204–210.
- [53] Jawad F., Zagorodnyuk A. Supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series // Symmetry. — 2019. — Vol. 11, Article number 1111.
- [54] Karoubi M. K-theory, an elementary introduction // Advanced Lectures in Mathematics (ALM); International Press: Somerville, MA, USA. — 2010. — Vol. 12. — P. 197–215.
- [55] von Koch H. Sur les système d'ordre infinie d'equations différentielles // Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar — 1899. — Vol. 61. — P. 395–411.
- [56] Kravtsiv V. The analogue of Newton's formula for block-symmetric polynomials // International Journal of Mathematical Analysis — 2016. — Vol. 10, Iss. 7. — P. 323–327.
- [57] Kravtsiv V. Algebraic basis of the algebra of block-symmetric polynomials on $\ell_1 \oplus \ell_\infty$ // Carpathian Math. Publ. — 2019. — Vol. 11, Iss. 1. — P. 89–95.
- [58] Kravtsiv V. Zeros of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Mat. Stud. — 2020. — Vol. 53, Iss. 2. — P. 206–211.
- [59] Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. On algebraic bases of algebras of block-symmetric polynomials on Banach spaces // Matematychni Studii — 2012. — Vol. 37, Iss. 1. — P. 109–112.
- [60] Kravtsiv V. V., Zagorodnyuk A. V. Representation of spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // Carpathian Math. Publ. — 2016. — Vol. 8, Iss. 2. — P. 263–271.
- [61] Kurosch A.G. Curso de Algebra Superior. — Mir, Moscow, 1977.
- [62] Levin B. Ya. Lectures in Entire Functions. — Translations of Mathematical Monographs, **150**, AMS, Providence, RI, 1996.
- [63] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. I, Sequence Spaces. — Springer-Verlag, 1977.
- [64] Macdonald I. G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. — University Lecture Series, **12**, AMS, Providence, RI, 1997.
- [65] Martin R. S. Contributions to the theory of functionals. Ph. D. Thesis. — University of California, 1932.
- [66] Mazur S., Orlicz W. Grundlegende eigenschaften der polynomischen operationen I, II // Studia Math. — 1935. — Vol. 5. — P. 50–68, 179–189.

- [67] Michael E. Locally multiplicatively convex topological algebras. — Mem. Amer. Math. Soc., vol. 11, Providence, 1952.
- [68] Mujica J. Ideals of holomorphic functions on Fréchet spaces // Advances in Holomorphy. Ed. J.A. Barroso. North-Holland Math. Studies. — 1979. — Vol. 34. — P. 563–567.
- [69] Mujica J. Complex analysis in Banach spaces. — North Holland, 1986.
- [70] Mujica J. Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 324. — P. 867–887.
- [71] Mujica J. Ideals of holomorphic functions on Tsirelson's space // Archiv der Mathematik — 2001. — Vol. 76. — P. 292–298.
- [72] Nachbin L. Topology on spaces of holomorphic mappings. — Erg. der Math. Springer-Verlag, vol. 47, 1969.
- [73] Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik — 1973. — Vol. 21, Iss. 2. — P. 255–277.
- [74] Rosas M. MacMahon symmetric functions, the partition lattice, and Young subgroups // J. Combin. Theory Ser. A/ — 2001. — Vol. 96. — P. 326–340.
- [75] Rudin W. Functional Analysis. — New York: McGraw-Hill, 1973.
- [76] Taylor A. E. Analytic functions in general analysis // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. — 1937. — Vol. 6, Iss. 2. — P. 277–292.
- [77] Taylor A. E. On the properties of analytic functions in abstract spaces // Math. Ann. — 1938. — Vol. 115. — P. 466–484.
- [78] Tsirelson B. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0 // Functional Anal. Appl. — 1974. — Vol. 8. — P. 138–141.
- [79] Vasylyshyn T. V. Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0, 1]$ // Carpathian Math. Publ. — 2014. — Vol. 6, No. 1. — P. 8–10.
- [80] Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. — 2019. — Vol. 52, Iss. 1. — P. 71–85.
- [81] Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes // Collection de Monographies sur le theorie des Fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [82] Wagstaff E., Fuchs F.B., Engelcke M., Osborne M. A., Posner, I. Universal Approximation of Functions on Sets // J. Mach. Learn. Res. — 2022. — Vol. 23. — P. 1–56.
- [83] Wiener N. Note on a paper of M. Banach // Fund. Math. — 1923. — Vol. 4. — P. 136–143.
- [84] Yarotsky, D. Universal Approximations of Invariant Maps by Neural Networks // Constr. Approx. — 2022. — Vol. 55. — P. 407–474.
- [85] Zagorodnyuk A. Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 2006. — Vol. 134, Iss. 9. — P. 2559–2569.

- [86] Zagorodnyuk A., Hihliuk A. Classes of Entire Analytic Functions of Unbounded Type on Banach Spaces // Axioms. — 2020. — Vol. 9, Iss. 4. — Article number 133.